清华经济学系列教材

经济控制论——
动态经济系统分析方法与应用

张金水　著

清华大学出版社

(京)新登字158号

内容简介

本书共分5章。第1章、第2章介绍离散时间与连续时间动态系统运动分析与稳定性分析。第3章介绍动态系统能控性、极点配置与鲁棒调节基本知识。第4章、第5章介绍动态系统最优控制的欧拉方程与庞得里亚金极大值原理。本书最重要的特点是各章穿插大量实用的例证,如:人口预测、市场调节与价格波动、经济最优增长、产出结构优化、双头垄断竞争对策、生态平衡、可再生与不可再生资源最优利用、最优货币政策与财政政策设计、经济波动周期分析等。书后有习题及参考答案。阅读本书仅须高等数学与线性代数基础知识。

本书可作为大学本科生、硕士研究生经济管理专业及相关专业的教材,也可供实际工作者学习、参考。

图书在版编目(CIP)数据

经济控制论:动态经济系统分析方法与应用/张金水著.—北京:清华大学出版社,1999
清华大学经济学系列教材
ISBN 7-302-03741-8

Ⅰ.经… Ⅱ.张… Ⅲ.①经济控制论-高等学校-教材②经济系统:动态系统-系统分析-高等学校-教材 Ⅳ.F224.1

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第50137号

出 版 者:清华大学出版社(北京清华大学学研楼,邮编100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑:魏荣桥
印 刷 者:清华大学印刷厂
发 行 者:新华书店总店北京发行所
开　　本:787×960 1/16　印张:18.25　字数:405千字
版　　次:1999年12月第1版　1999年12月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-302-03741-8/F・239
印　　数:0001~3000
定　　价:20.00元

目　录

导　　论

经济控制论的定义

在许多文献中有各种各样关于“经济学”、“控制论”、“控制理论”等的定义。关于“经济控制论”的定义不同知识背景的人会有不同的见解。如下两种定义是可以为较多人接受的。

定义 1:经济控制论是控制理论概念和方法在经济学中的各种应用。

定义 2:经济控制论是应用控制理论概念与方法来描述的经济学。

上述定义 1 强调以控制理论为主线来描述控制理论知识如何应用于经济学科。本书就是按这种风格来撰写。定义 2 强调以经济学为主线。在描述经济学知识过程中该用到什么样的控制理论知识,便去采用相应的控制理论知识。按定义 2 来撰写的经济控制论专著或教材,其书名往往不叫《经济控制论》。比如一本书名叫《高级宏观经济学》的书,该书可能一开始便建立了非线性动态经济系统模型,并采用最优控制理论及庞得里亚金极大值原理来分析系统运动与策略设计。因此这本《高级宏观经济学》就是一本应用控制理论概念与方法来描述的经济学。从目前国际上已出版的高水平经济学教材与专著来看,有应用越来越多的控制理论概念与方法的趋势。显然,一个读者如果缺乏控制理论基础知识,直接去读按定义 2 风格撰写的著作,将会遇到许多困难。因此,一个人要想成为与国际接轨并达到国际某些领域前沿的经济学理论与实践工作者,务必要深入掌握控制理论的概念与方法。但是,目前书店里出售的介绍控制理论的书,绝大部分属于工程控制理论的范畴。在工程控制理论的著作中,大量列举了如电子元件组成的电网络系统、力学控制系统、炉温控制系统等等。这些例子经济学工作者没兴趣,又看不懂。因此以定义 1 为风格的经济控制论教材或专著则是非常必要的,它是任何一个高水平数量经济工作者所必须深入掌握的基本知识。

简要地说,《控制论》是一门带有哲学高度的学科,它探讨改造自然界与人类社会的思想与方法。《控制理论》相对范围要窄一些。它侧重于研究方法与技术。《控制理论》又可分为《经济控制论》、《社会控制论》、《工程控制论》。

经济控制论的基本概念与基本问题

第 1 个基本概念与基本问题:目标的设定。

一个人无论从事什么工作总要达到某种目的。人们有许多小目标,也有许多大目标。比如:社会主义市场经济的目标是什么?回答是:现阶段实现各尽所能、按劳分配的公平境界以及物质较大丰富的有效益境界,未来阶段实现各尽所能、按需分配的共产主义道德境界以及物质极大丰富的有效益境界。再比如,经济学定义为:“利用有限资源、合理安排生产,生产出来的产品在消费者中合理分配,实现人类现阶段与未来阶段的最大满足。”无论资本主义经济学家还是社会主义经济学家都基本上会同意以上定义。在这个定义中指出了经济学的目

标是:“实现人类的最大满足。”社会主义经济学家认为现阶段上述社会主义市场经济的目标的实现便是人类的最大满足。而资本主义经济学家认为按资分配是公平的境界。

当我们给出了目标的文字描述之后,数量经济工作者还要给出目标的定量描述。比如,按劳分配的公平境界怎样定量描述。所谓按劳分配就是说一个人贡献的社会必要劳动时间与其分到的产品中所凝结的社会必要劳动时间相一致。那么怎么计算一个人贡献了多少社会必要劳动时间,以及一种产品中每单位凝结多少社会必要劳动时间呢?这显然是一个非常复杂却又不能不去解决的困难问题。这个问题属于经济学也是经济控制论的范畴,但它超出了本书的范围。本书一般只涉及物质是否极大丰富这一目标。物质是否极大丰富一般用人均国民生产总值来衡量。假如在第 t 年,一个国家人均国民生产总值为 $y(t)$元,那么目标 J 是否可以用如下式子来表示呢?

$$\max J = y(t)$$

回答是否定的,因为我们的目标应该是长期可持续经济增长。即:如果第 t 个时间周期国民生产总值为 $y(t)$,第 $t+\Delta t$ 个时间周期为 $y(t+\Delta t)$,…,那么目标应该是各个时间周期国民生产总值的加权平均和:

$$\begin{aligned}\max J &= A(t) \times y(t) + A(t + \Delta t) \times y(t + \Delta t) + \cdots \\ &\quad A(t + n\Delta t)y(t + n\Delta t) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A(t + n\Delta t) \times y(t + n\Delta t)\end{aligned}$$

如果令 $\Delta t \to 0$,则有:

$$\max J = \int_t^{\infty} A(t)y(t)dt$$

以上我们初步分析了如何设定经济建设的目标及如何将它定量化并使之用数学公式来表示。

我们仔细分析一下,发现即使讨论物质极大丰富这一目标的定量化工作也是极其复杂的。比如,在上式目标的数学表示中,权重函数 $A(t)$如何选取。从经济学意义上来讲,$A(t)$涉及到一个国家在当前幸福与未来幸福之间进行选择的问题。有人或许认为,当前幸福与未来幸福一样重要,那么权重系数 $A(t)=1$ 就可以了。这样系统目标为:

$$\max J = \int_t^{\infty} y(t)dt$$

这个想法看起来没什么问题,但在实际应用中就可能得出一些荒谬的结论。比如有如下两个关于 $y(t)$的历年数值:

$t=0$	$t=1$	$t=2$	…
$y(0)=1$	$y(1)=0$	$y(2)=10$	
$\tilde{y}(0)=2$	$\tilde{y}(1)=3$	$\tilde{y}(2)=4$	

由于:

$$y(0) + y(1) + y(2) = 11 > \tilde{y}(0) + \tilde{y}(1) + \tilde{y}(2) = 9$$

计算结果表明第 1 种情况 $y(0),y(1),y(2)$优于第 2 种情况 $\tilde{y}(0),\tilde{y}(1),\tilde{y}(2)$。而实际情况并非这样，因为 $y(1)=0$ 表明在 $t=1$ 这一个时间周期里人均国民生产总值为零。人均国民生产总值为零意味着人们在这个时间周期无法生存，因而第 1 种情况不应优于第 2 种情况。

总之，目标的设定是一件十分复杂的事情，如何正确设定目标要花较多篇幅，本书不作深入讨论。

第 2 个基本概念与基本问题：系统策略变量的选定与数学模型的建立。

当给定目标的定量描述后，下一步就要确定采用什么手段来达到目标。比如，我们的目标是人均国民生产总值累积最大，那么就要研究使国民生产总值增加的因素是什么。用$Y(t)$表示第 t 年国民生产总值。$Y(t)$与投入的资本与劳动力有关。用 $K_1(t)$表示交通等基础设施固定资本，用 $K_2(t)$表示厂房、设备等固定资本，用 $L(t)$表示劳动工时，那么投入的 $K_1(t)$，$K_2(t)$，$L(t)$与产出的 $Y(t)$有如下因果关系：

$$Y(t) = F(K_1(t), K_2(t), L(t))$$

上式在经济学上叫生产函数。经济学的任务就是要研究上式数学表达式是什么类型的函数。在微观经济学中，我们知道可以用柯布-道格拉斯类型的生产函数，或用 CES 类型的生产函数，等等。如果用柯布-道格拉斯类型的生产函数，那么上式具体-形式为：

$$Y(t) = AK_1(t)^a K_2(t)^b L(t)^{1-a-b}$$

其中，A,a,b 为参数，它的大小可以由实际数据来确定。

固定资本 $K_1(t)$与 $K_2(t)$的增加可引起 $Y(t)$的增加，那么 $K_1(t)$与 $K_2(t)$的增加又由其它什么变量来确定呢？它们由固定资本投资来决定。用 $I_1(t)$表示基础设施固定资本投资，$I_2(t)$表示厂房、设备等固定资本投资，那么投资量 $I_1(t)$与 $I_2(t)$与固定资本增加有如下因果关系：

$$\text{第}\,t+1\,\text{年固定资本}\,K_1(t+1) = \text{第}\,t\,\text{年固定资本}\,K_1(t) - \text{第}\,t\,\text{年固定资本折旧}\,\delta_1 \times K_1(t) + \text{第}\,t\,\text{年固定资本投资}\,I_1(t)$$

其中，δ_1 为折旧率。上式即为：

$$K_1(t+1) = K_1(t) - \delta_1 K_1(t) + I_1(t)$$

类似地有：

$$K_2(t+1) = K_2(t) - \delta_2 K_2(t) + I_2(t)$$

下面再进一步分析：投资 $I_1(t)$与 $I_2(t)$的钱从哪里来呢？在没有外债的封闭型经济中，投资的钱只能从 $Y(t)$中来。设 $Y(t)$中有一固定比例 $100\times d\%$($d<1$)用于消费，余下用于投资。即：

$$I_1(t) + I_2(t) = d \times Y(t)$$

再设就业人口为常数：

$$L(t) = \text{常数}\,L$$

那么我们的问题是如何分配 $dY(t)$给 $I_1(t)$与 $I_2(t)$能使人均国民生产总值累积额最大。

假如 $I_1(t)$ 分到的份额为 $100\times\sigma(t)\%$，即：

$$I_1(t)=\sigma(t)\times d\times Y(t)$$

那么策略变量便是 $\sigma(t)$，即各个时间周期 $\sigma(t)$ 应等于多少，才能使人均国民生产总值 $y(t)=Y(t)/L$ 累积量最大。以上我们便认为构造出从策略变量到目标变量之间的因果关系链，我们把这种具有因果关系的事物称为"系统"。把以上数学关系式称为系统的数学模型。

我们把以上目标及系统数学方程式集中写在一起：

目标：
$$\max J=\int_t^{\infty} y(t)\mathrm{d}t$$

系统方程：
$$\begin{aligned}
&Y(t)=AK_1(t)^aK_2(t)^bL(t)^{1-a-b}\\
&K_1(t+1)=K_1(t)-\delta_1K_1(t)+I_1(t)\\
&K_2(t+1)=K_2(t)-\delta_2K_2(t)+I_2(t)\\
&I_1(t)+I_2(t)=d\times Y(t)\\
&L(t)=L\\
&I_1(t)=\sigma(t)\times dY(t)\\
&y(t)=Y(t)/L
\end{aligned}$$

再接下来的工作便是如何去求解上述数学方程了。当求出 $\sigma(t)$ 的解答后，我们就明确了如何去分配资金分别投资于基础设施建设和厂房、设备方面的建设。当然，目标设定的不同解答也会有不同。

在上述数学模型中，我们称 $\sigma(t)$ 为系统的策略变量或控制输入变量，经济学中称之为外生变量。$y(t)$ 或 J 称为目标变量或输出变量。$y(t)$，$Y(t)$，$K_1(t)$，$K_2(t)$ 等经济学中称为内生变量。

要求解上述数学模型并非一件容易的事。一般地说，当我们依经济学知识构造出数学模型之后，要判断它属于什么类型的系统，然后再应用相应的学科知识来求解。比如，上述系统属于非线性动态离散时间系统。系统的类型有如下几种划分：

- 线性系统与非线性系统
- 静态系统与动态系统
- 连续时间系统与离散时间系统
- 确定性系统与随机性系统
- 精确参数系统与模糊参数系统
- 集中参数系统与分布参数系统
- 实数域上系统与环上系统，或有限域上系统及格上系统

……

如果给出静态线性系统，它的最优化问题属于"线性规划"学科知识，静态非线性系统的优化问题属于"非线性规划"学科知识。以上我们所举的例子非线性动态离散时间系统的优化问题，它可以用本书介绍的庞得里亚金极大值原理来求解。如果所涉及到的经济变量为随

机变量，那么相应就会得到随机性系统。由于现实的经济变量基本上都是随机变量，因此随机性动态经济系统基本知识是非常重要的。如果我们把许多著名经济学家的知识与经验收集起来，构造出一个专家系统，那么便会涉及到数理逻辑与布尔代数的知识，由于布尔代数是格的运算，因此所建立的系统可以看作格上系统。总之，以上我们列举了经济系统的一些类型。其中随机性动态系统、模糊参数系统、环上系统、有限域上系统、格上系统、分布参数系统等都不在本书讨论范围。经济控制论是涉及面很广的一个学科。在上述各种类型的系统中，线性动态离散时间系统与线性动态连续时间系统是最基本、最常用的两种类型系统。本书着重介绍这两种类型系统的运动分析。

第 3 个基本概念与基本问题：系统的分析。

当给出系统的数学模型后，就要探讨在某种策略输入之下，系统各变量的变化过程。简单地说，就是在确定输入变量的变化后，去求解系统方程。系统分析包括运动分析与稳定性分析。所谓运动分析就是探讨解的存在性或解的数学表达式。一旦求出解的数学表达式，便就确定了各变量变化规律。所谓系统稳定性分析就是探讨各变量变化趋势。一般地说，如果某个变量无休止上下起伏变化，则称之为不稳定，如果该变量的变化逐渐趋于平衡，则称之为渐近稳定。

例如，在上述模型中，如果参数值为：$\sigma(t)=0.4$，$A=1$，$a=0.4$，$b=0.3$，$L=1$，$\delta_1=\delta_2=0.1$，$d=0.7$，那么模型可记为：

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3} \\
K_1(t+1) &= 0.9K_1(t)+I_1(t) \\
K_2(t+1) &= 0.9K_2(t)+I_2(t) \\
I_1(t)+I_2(t) &= 0.7Y(t) \\
I_1(t) &= 0.4\times 0.7\times Y(t) \\
y(t) &= Y(t)
\end{aligned}
$$

现在要分析在资金分配策略 $\sigma(t)=0.4$ 情况下，系统运动过程，或各变量变化规律。

从上述方程可得出：

$$
\begin{cases}
K_1(t+1)=0.9K_1(t)+0.28Y(t) \\
K_2(t+1)=0.9K_2(t)+0.42Y(t)
\end{cases}
$$

或：

$$
\begin{cases}
K_1(t+1)=0.9K_1(t)+0.28\,K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3} \\
K_2(t+1)=0.9K_2(t)+0.42\,K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3}
\end{cases}
$$

以上我们得到了二阶离散时间非线性动态系统。它的求解是较为困难的，现在我们来分析变量 $K_1(t)$ 与 $K_2(t)$ 的运动过程。

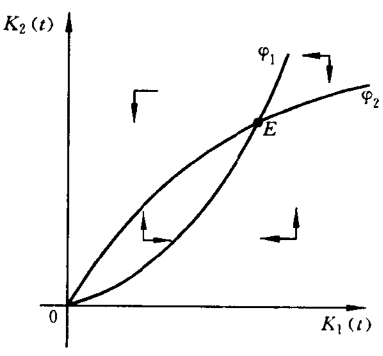


图 0.1　系统运动分析与稳定性分析

考虑图 0.1，先考虑曲线 φ_1：

φ_1:
$$K_1(t) = 0.9K_1(t) + 0.28K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3}$$
或:
$$0.1K_1^{0.6} = 0.28K_2^{0.3}$$
或:
$$0.03232K_1^2 = K_2$$

显然,曲线 φ_1 在 $K_1(t)-K_2(t)$状态平面上为向上弯曲的曲线。在 φ_1 右边的点应成立:
$$K_1(t) > 0.9K_1(t) + 0.28\,K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3}$$

上式右边即为 $K_1(t+1)$,因此当系统状态$[K_1(t),K_2(t)]$处于 φ_1 右边时,成立:
$$K_1(t) > K_1(t+1)$$
即 $K_1(t)$有下降的趋势。我们用箭头表示出这种运动趋势。类似地,可以看出当系统状态处于 φ_1 左边时,$K_1(t)$有上升之趋势。

再考虑图 0.1 中曲线 φ_2:

φ_2:
$$K_2(t) = 0.9K_2(t) + 0.42\,K_1(t)^{0.4}K_2(t)^{0.3}$$
或:
$$0.1K_2(t)^{0.7} = 0.42\,K_1(t)^{0.4}$$
显然,φ_2 是向下弯曲的曲线。当系统状态处于 φ_2 上方时,成立:
$$K_2(t) > 0.9\,K_2(t) + 0.42\,K_1(t)^{0.4}\,K_2(t)^{0.3} = K_2(t+1)$$
因而 $K_2(t)$有变小之趋势。

当系统状态处于 φ_2 下方时,成立:
$$K_2(t) < 0.9\,K_2(t) + 0.42\,K_1(t)^{0.4}\,K_2(t)^{0.3} = K_2(t+1)$$
因而 $K_2(t)$有变大之趋势。

图 0.1 给出了系统状态 $K_1(t)$与 $K_2(t)$运动之趋势。从图中不难看出:
$$\lim_{t\to\infty}[K_1(t),K_2(t)]\ \text{到达}\ E\ \text{点}$$
图中 E 点称为系统平衡点,在 E 处 $K_1(t)$与 $K_2(t)$值由下式计算:
$$\begin{cases} K_1(t) = 0.9\,K_1(t) + 0.28\,K_1(t)^{0.4}\,K_2(t)^{0.3} \\ K_2(t) = 0.9\,K_2(t) + 0.42\,K_1(t)^{0.4}\,K_2(t)^{0.3} \end{cases}$$
由上式求出:
$$\begin{cases} K_1(t) = 46.410689 \\ K_2(t) = 69.616033 \end{cases}$$

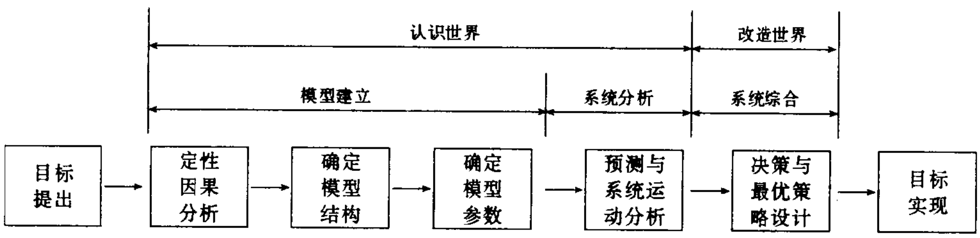
从以上计算表明:当策略变量 $\sigma(t)=0.4$ 时,成立:
$$\lim_{t\to\infty}K_1(t) = 46.410689$$
$$\lim_{t\to\infty}K_2(t) = 69.616033$$
$$\lim_{t\to\infty}y(t) = Y(t) = K_1^{0.4}K_2^{0.3} = 16.575246$$

以上我们求出了时间 t 趋于无穷时,系统状态所到达的位置。但是我们并没有求出 $K_1(t)$与 $K_2(t)$变化全过程。我们只是求出了系统运动的总趋势,并认为系统是渐近稳定的。

第 4 个基本问题:系统的综合与优化决策。

所谓系统的综合就是要寻找最优策略值使系统运动符合人的目标。就上例而言，当$\sigma(t)=0.4$时，在$t\to\infty$时，$y(t)=16.575246$。这意味着对应每一个策略值$\sigma(t)$($\sigma(t)$为常数的情况)，便有一个稳态时的人均国民生产总值$y(t)$与之相对应。那么$\sigma=$？时可对应最大的$y(t)$呢？有兴趣的读者不难依据以上给出的方法去求解，可以证明当$\sigma=0.5714285$时，对应的$y(t)$稳态值最大。但应注意到这仅是对应最优稳态值的最优策略。要求出从非稳态到达稳态的最优轨道，要用到庞得里亚金极大值原理等基本理论知识。

以上我们通过一个例子阐述了从目标提出到目标优化的全过程。可以把上述过程总结如下：



我们知道人们的实践活动主要有两个方面，一是认识世界，二是改造世界。模型的建立和系统分析属于认识世界的活动，而系统综合或优化策略设计属于改造世界的活动。

关于经济控制论与数理经济学、微观经济学、宏观经济学、国际贸易经济学、福利经济学、计量经济学各门课程之间关系，这个问题的简要说明可参见本书作者撰写的另一本教材：《数理经济学——理论与应用》中导论的有关部分。这里不再赘述，一般地说，不同知识背景的人对这种问题的见解会很不同。只要深入掌握各门课程知识之后，其间关系便也就清楚了。

第1章 离散时间动态经济系统运动分析

离散时间函数是经济管理实践中最常用的一类函数，在实际的科研与日常决策工作中，人们往往遇到用离散时间函数表示的差分方程或差分方程组。本章介绍由差分方程所描述的离散时间动态系统的运动分析与稳定性分析，并介绍它们在各方面的许多重要应用。

1.1 离散时间函数及Z变换

什么叫离散时间函数？下面举几个例子加以说明。

例1.1.1 人口离散时间函数。

设全国人口普查每年进行一次。每年7月1日凌晨零点的人口数代表该年的人口数。我们以 $t=0$ 表示1990年7月1日凌晨零点这个时刻，那么 $t=1,2,3,\cdots$ 分别表示1991年、1992年、1993年等各年度7月1日凌晨零点。各年度普查的实际人口数如表1.1.1所示(数据来自1998年度中国统计年鉴)

表1.1.1 中国实际人口数据(亿人)

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	$t=5$	$t=6$	$t=7$	…
时间	1990.7.1	1991.7.1	1992.7.1	1993.7.1	1994.7.1	1995.7.1	1996.7.1	1997.7.1	…
人口数	11.4333	11.5823	11.7171	11.8517	11.9850	12.1121	12.2389	12.3626	…

我们用 $x(t)$ 表示第 t 年中国人口数，从表1.1.1可知：$x(0)=11.4333$，$x(1)=11.5823$，$x(2)=11.7171$，…。由于 $x(t)$ 只在离散的时间点上取值，故称之为离散时间函数。

表1.1.1也可用相应的图1.1.1所示的离散时间函数图表示。

例1.1.2 国民生产总值离散时间函数。

从1998年中国统计年鉴可查到1952年直至1997年各年国民生产总值 GNP(gross national product)的数值。表1.1.2列出了从1993年至1997年各年数值。

表1.1.2 中国 *GNP* 年度数值(亿元)

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	$t=3$	$t=4$	…
时间	1993	1994	1995	1996	1997	…
GNP	34560.5	46670.0	57494.9	66850.5	73452.5	…

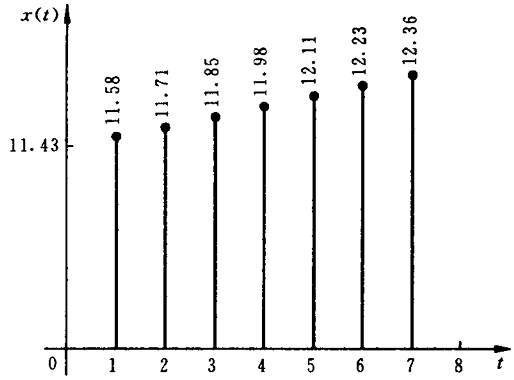


图 1.1.1 人口离散时间函数

类似地，表 1.1.2 可用相应的图 1.1.2 的离散时间函数图表示。

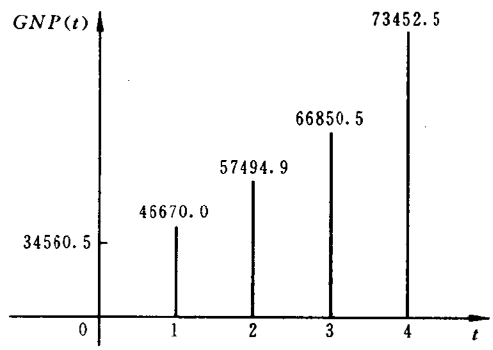


图 1.1.2 国民生产总值离散时间函数

图中，$GNP(t)$表示第 t 年 GNP 数值，由图可知，$GNP(0)=34560.5$，$GNP(1)=46670.0$，$GNP(2)=57494.9$，…。

例 1.1.3 企业月产量离散时间函数。

某电视机厂生产的电视机月统计数据如表 1.1.3 所示。

表 1.1.3 电视机工厂生产月报表（万台）

	$t=0$	$t=1$	$t=2$	…
时间	1 月份	2 月份	3 月份	…
产量 $Y(t)$	1.5	2	1.8	…

类似地，表 1.1.3 可用相应的图 1.1.3 的离散时间函数图表示。

从以上几个例子可以看出，在通常的经济管理实践中基本上采用的是离散时间函数来

表达各种变量的变化。

离散时间函数的 Z 变换在分析离散时间系统运动中起到极为重要的作用。我们知道，离散时间函数 $x(t)$是时间 t 的函数，如果令 $x(t)$与变量 z^{-t}相乘，得 $x(t)z^{-t}$，再把它们相加便得到一个关于 z 的函数 $x(z)$，我们把 $x(z)$叫做离散时间函数 $x(t)$的 Z 变换。

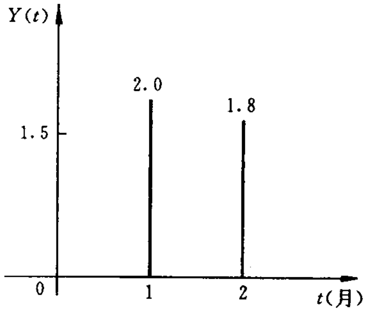


图 1.1.3 生产产量离散时间函数

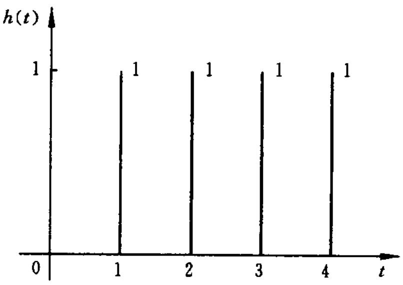


图 1.1.4 单位阶跃函数

下面给出离散时间函数 Z 变换的定义。

定义 1.1.1 对离散时间函数 $x(t)$，$t=0,1,2,\cdots$（$t<0$ 时不予考虑，或认为 $x(t)=0$）；它的 Z 变换为：

$$
\begin{aligned}
x(z) &= \sum_{t=0}^{\infty} x(t)z^{-t} \\
&= x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots
\end{aligned}
\tag{1.1.1}
$$

下面讨论一些常用离散时间函数的 Z 变换。

单位阶跃函数 $h(t)$如图 1.1.4 所示。

无论 t 取何值（$t\geqslant 0$），$h(t)$都为常数 1。依定义 1.1.1，它的 Z 变换 $h(z)$为：

$$h(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots \tag{1.1.2}$$

上式两边同乘以 z，得：

$$zh(z) = z + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

注意到式(1.1.2)，上式又可记为：

$$zh(z) = z + h(z)$$

从而求出：

$$h(z) = \frac{z}{z-1} \tag{1.1.3}$$

式(1.1.2)与(1.1.3)中的 $h(z)$都是 $h(t)$的 Z 变换，但式(1.1.3)具有更简洁的形式。

另外应注意到重要的一点，$h(t)$与 $h(z)$虽然都采用 $h(\cdot)$的形式，但其表达式不一样，比如式(1.1.3)中 $h(z)=z/(z-1)$，这并不意味着 $h(t)=t/(t-1)$。我们之所以都采用$h(\cdot)$的形式，只是为了表示其对应关系。

离散时间指数函数 $x(t)=a^t$，$(t\geqslant 0)$如图 1.1.5 所示。

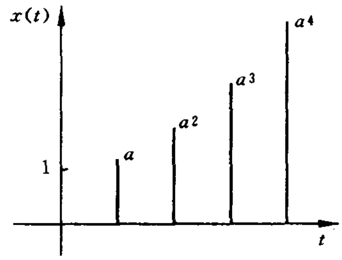


图 1.1.5 离散时间指数函数

依定义 1.1.1，它的 Z 变换 $x(z)$为：

$$x(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots \quad (1.1.4)$$

上式两边同乘以 z，得：

$$\begin{aligned} zx(z) &= z + a + a^2z^{-1} + a^3z^{-2} + \cdots \\ &= z + a(1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots) \\ &= z + ax(z) \end{aligned}$$

从上式求得：

$$x(z) = \frac{z}{z-a} \quad (1.1.5)$$

式(1.1.5)中，当 $a=1$ 时化为式(1.1.3)的形式。

下面来分析离散时间周期函数的 Z 变换。为此需要用到如下的欧拉公式：

$$e^{\beta j} = \cos\beta + j\sin\beta \quad (1.1.6)$$

其中，β 为实数，j 为虚数。

式(1.1.6)可以利用高等数学中指数函数的台劳展开式来证明(见习题的第 1 题及其答案)。

现在讨论离散时间正弦函数 $x(t)=\sin wt(t\geqslant 0)$的 Z 变换。

利用式(1.1.6)的欧拉公式，有：

$$\sin wt = \frac{e^{jwt} - e^{-jwt}}{2j} \quad (1.1.7)$$

令 $a=e^{jw}$，依式(1.1.5)可求出 e^{jwt}与 e^{-jwt}的 Z 变换。因此 $x(t)=\sin wt(t\geqslant 0)$的 Z 变换 $x(z)$为：

$$\begin{aligned} x(z) &= \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{jw}} - \frac{z}{z-e^{-jw}}\right) \\ &= \frac{z}{2j}\frac{z-e^{-jw}-z+e^{jw}}{(z-e^{jw})(z-e^{-jw})} \\ &= \frac{z}{2j}\frac{e^{jw}-e^{-jw}}{z^2-(e^{jw}+e^{-jw})z+e^{jw}e^{-jw}} \\ &= \frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1} \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

类似地，可求出 $x(t)=\cos wt(t\geqslant 0)$的 Z 变换 $x(z)$为：

$$x(z) = \frac{z(z-\cos w)}{z^2-2z\cos w+1} \quad (1.1.9)$$

以上我们讨论了几种常用的离散时间函数及其 Z 变换。对各种各样常见的离散时间函数都可以求出相应的 Z 变换。

表 1.1.4 列出了几种常见的离散时间函数及其 Z 变换的数学表达式。其中有几种以上

已给出它们的求解过程，其它的作为练习。例如，离散斜坡函数 $x(t)=t,(t\geqslant 0)$，及离散时间函数 $x(t)=ta^t(t\geqslant 0)$ 的 Z 变换见练习的第2,3题及其答案。

表 1.1.4 常用离散时间函数及其 Z 变换

离散时间函数 $x(t)$	Z 变换 $x(z)$
$h(t)$	$\frac{z}{z-1}$
a^t	$\frac{z}{z-a}$
$\sin wt$	$\frac{z\sin w}{z^2-2z\cos w+1}$
$\cos wt$	$\frac{z(z-\cos w)}{z^2-2z\cos w+1}$
t	$\frac{z}{(z-1)^2}$
t^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
t^n	$\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{z}{z-1}$
ta^t	$\frac{az}{(z-a)^2}$
t^na^t	$\left(-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^n\frac{z}{z-a}$
$a^t\cos\pi t$	$\frac{z}{z+a}$

下面讨论 Z 变换的几个基本性质。

性质 1 线性运算的 Z 变换。

若函数 $x_1(t)$ 与 $x_2(t)$ 的 Z 变换分别为 $x_1(z)$ 与 $x_2(z)$，则 $x_1(t)+x_2(t)$ 的 Z 变换是 $x_1(z)+x_2(z)$。

这个性质是显然的，可依定义 1.1.1 直接验证。

性质 2 $x(t+1)$ 的 Z 变换。

若 $x(t)$ 的 Z 变换为 $x(z)$，则 $x(t+1),t\geqslant 0$ 的 Z 变换为：$\varphi(z)=zx(z)-zx(0)$。

证明：依定义 1.1.1，$x(t)$ 的 Z 变换为：

$$x(z)=x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-2}+\cdots$$

$x(t+1)$ 的 Z 变换 $\varphi(z)$ 为：

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=x(1)+x(2)z^{-1}+x(3)z^{-2}+\cdots+x(t+1)z^{-t}+\cdots\\&=z(-x(0)+x(0)+x(1)z^{-1}+x(2)z^{-1}+\cdots+x(t+1)z^{-(t+1)}+\cdots)\\&=z(-x(0)+x(z))\\&=zx(z)-zx(0)\end{aligned}$$

证毕

类似可证，$x(t+m),t\geqslant 0$，的 Z 变换是：

$$z^m x(z) - z^m x(0) - z^{m-1} x(1) - \cdots - zx(m-1) \tag{1.1.10}$$

性质 3　初值定理。

离散时间函数 $x(t)$,$t \geqslant 0$,在 $t=0$ 时的值 $x(0)$ 可以从 $x(z)$ 求出：

$$x(0) = \lim_{z \to \infty} x(z) \tag{1.1.11}$$

证明：由 Z 变换定义有：

$$x(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + \cdots + x(t)z^{-t} + \cdots$$

当 $z \to \infty$ 时，立即得到式(1.1.11)。　　证毕。

性质 4　终值定理。

当 $t \to \infty$ 时，若 $x(t)$ 有极限存在，则有下式：

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{z \to 1} (z-1)x(z) \tag{1.1.12}$$

本性质由读者自行证明。

本节介绍了离散时间函数的一些基本性质。掌握这些性质一般情况下是足够的。但初学者接触到 Z 变换时往往产生如下两个问题。

第 1 个问题：Z 变换中的 z 它的实际意义是什么？

答：Z 变换中的 z 是个可以取复数值的变量，即它是复变量。有的书把它叫做运算符号，或“算子”，更确切地说，它是左移算子。考虑图 1.1.6 与图 1.1.7。让离散时间函数 $x(t)$ 左移一个时间周期得到图 1.1.7 的函数图。在图 1.1.7 中把 $zx(0)$ 去掉便是 $x(t+1)$,$t \geqslant 0$。因此，如果 $x(t)$ 的 Z 变换为 $x(z)$，那么 $zx(z)$ 为 $x(t)$ 左移一个时间周期，再减去 $zx(0)$，即 $zx(z) - zx(0)$ 是 $x(t+1)$ 的 Z 变换。因此 Z 变换中的 z 又称为“移位算子”。

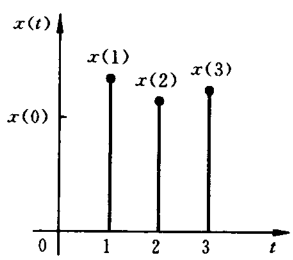


图 1.1.6　离散时间函数 $x(t)$

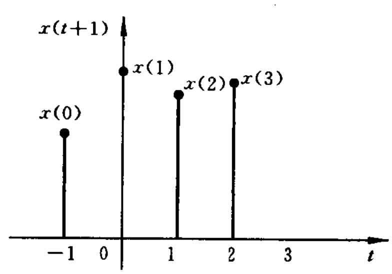


图 1.1.7　$x(t)$左移一个时间周期

第 2 个问题：Z 变换是怎么发明出来的？

简要地说，首先由牛顿、莱布尼兹等人发明了微积分，其后发明了常系数线性微分方程及方程组。人们在求解常系数线性微分方程中总结了方程解的大量规律，发现用符号 s 来表示微分运算 $s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$(例如：$s \cdot f(t) = \mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t$)可大大简化连续时间常系数线性微分方程的求解过程。因此称 $s = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ 为“微分算子”。再其后，数学家拉普拉斯将人们实践总结出来的经验上升到理论，发明了拉普拉斯变换（见第 2 章），即连续时间函数 $f(t)$ 的拉氏变换为：