



国外经典教材

PEARSON
Prentice
Hall

微波晶体管放大器 分析与设计

(第2版)

▼
Microwave Transistor Amplifiers
Analysis and Design
Second Edition

[美] Guillermo Gonzalez 著
白晓东 译



清华大学出版社

国外经典教材

微波晶体管放大器 分析与设计

(第2版)

[美] Guillermo Gonzalez 著
白晓东 译

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书从介绍二端口网络的各种常规矩阵参数入手,引出了用于射频到微波频段(10MHz-20GHz)最有效的散射参数系统(S 参数),并以散射参数形式描述有源器件的主要交流性能,例如:增益、稳定性、单向性、活度以及驻波比等。本书第4章专题讨论了噪声的处理以及有关高频大功率器件的应用问题。每章结尾提供相当数量的习题,有利于进一步了解设计的原理和方法,加深对概念的理解。书中还列举了许多国外著名厂商典型器件的设计过程。

本书可以作为微波通信、高频电子技术专业本科生及研究生的教材和参考书,对于从事射频及微波电路设计的工程技术人员而言,也是一本不可多得的实用参考书。

EISBN: 0-13-254335-4

Microwave Transistor Amplifiers Analysis and Design, Second Edition

Guillermo Gonzalez

Copyright © 1997, 1984 by Prentice Hall, Inc.

Original English language edition published by Prentice Hall, Inc.

All right reserved.

For sale and distribution in the People's Republic of China exclusively (except Taiwan, Hong Kong SAR and Macau SAR). 仅限于中华人民共和国境内(不包括中国香港、澳门特别行政区和中国台湾地区)销售发行。

本书封面贴有 Pearson Education (培生教育出版集团) 激光防伪标签,无标签者不得销售。

北京市版权局著作权合同登记号: 图字 01-2002-5757 号

图书在版编目(CIP)数据

微波晶体管放大器分析与设计: 第2版/ (美) 冈萨雷斯著; 白晓东译.

—北京: 清华大学出版社, 2003

书名原文: Microwave Transistor Amplifiers Analysis and Design (Second Edition)

(国外经典教材)

ISBN 7-302-06525-X

I. 微... II. ①冈... ②白... III. 微波管放大器—晶体管放大器—教材... IV. TN722.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 025955 号

出 版 者: 清华大学出版社(北京清华大学学研大厦, 邮编 100084)

[http:// www. tup. com. cn](http://www.tup.com.cn)

[http:// www. tup. tsinghua. edu. cn](http://www.tup.tsinghua.edu.cn)

责任编辑: 文开棋 周兴华

印 刷 者: 国防工业出版社印刷厂

发 行 者: 新华书店总店北京发行所

开 本: 787×1092 1/16 **印张:** 28 **字数:** 684 千字

版 次: 2003 年 6 月第 1 版 2003 年 6 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 7-302-06525-X/TN·141

印 数: 0001~4000

定 价: 59.00 元

前 言

本书在第 1 版的基础上又丰富了相当多的内容。新的内容贯穿全书，详细讲述了散射参数技术。另外还包括放大器和振荡器的设计流程。根据广大读者的建议，对于第 1 版习题中出现的一些关系式，都做了详细的推导。书中无论修订之处还是添加的新内容，都尽可能做到衔接自然，行文流畅。本书还增加了许多新的例题和习题。

本书的主要宗旨仍是充分体现运用散射参数技术，分析和设计微波晶体管放大器的处理方法。微波频率这一术语，是指那些波长只有厘米（1~10cm）数量级的频率。然而，本书中所阐述的设计流程以及分析方法，决不仅限于微波频段。实际上，只要能了解晶体管在该频段内的散射参数，这些方法可应用于任何频段。

这本书可作为微波晶体管放大器和振荡器专业的高年级学生和研究生教材，也可作为微波领域工程师的参考书。本书假定读者已完成大学网络理论、电子学和电磁场理论课程，或同类课程的学习。在本书中，传输线理论贯穿全书始终，尤其是将 Smith 圆图作为设计工具。

用于微波放大器和振荡器的主要晶体管是硅双极晶体管（BJT）和砷化镓金属氧化物半导体场效应管（GaAs MESFET）。高电子迁移率的晶体管（HEMT）也在讨论之列。BJT 的性能良好，频率可高达 4GHz。在这一频段中，BJT 性能可靠、价格低廉、增益高，且噪声系数低。GaAs MESFET 在 4GHz 以上频率中性能优于 BJT，在低于 4GHz 也同样有很低的噪声系数。

微波晶体管常常习惯于用二端口网络来表述，并以散射参数描述其性能。散射参数是公认的参数系列，因为它们容易用现代网络分析仪测量出来；在微波晶体管放大器的设计中概念简单；而且能提供十分有益于设计的信息。另外，流图定理也十分适用。

第 1~4 章阐述微波晶体管放大器分析与设计的基本原理和技术。这几章为设计一个良好的微波晶体管放大器奠定了基础。第 1 章首先全面回顾传输线的概念。1.3 节“传输线的概念”给出正弦激励下传输线理论的综合表述。新添的 1.6 节“散射参数的特性”描述了功率波和散射参数的概念，讨论了散射参数的测量问题。此外还修订和更新了有关微波晶体管性能量述的内容。

第 2 章从讨论 Smith 圆图开始。分析了用集总参数元件和传输线在 Smith 圆图上进行匹配网络设计的方法。详细研究了两元件和三元件的匹配网络。同时也包括了各种微带线匹配的架构。在说明功率关系的这一节中，直接由入射波和反射波来推导功率之间的关系，同时运用流向图得到功率增益的推导。这一章还给出由散射参数构成的功率增益表达式，得到驻波比 VSWR 和失配系数的计算。

第 3 章涉及到微波晶体管放大器的设计。详细论证稳定性的条件, 阐述设计过程。其中包括传输功率增益、工作功率增益和可用功率增益。导出单向器件和双向器件的增益圆。3.8 节“等驻波比 VSWR 圆”涉及驻波比 VSWR 与增益之间的相互协调。本章最后讨论直流偏置网络的选择和设计。

第 4 章探讨低噪声放大器的问题, 以及低噪声工作、增益和 VSWR 之间的关系。新增加了有关宽带放大器、平衡放大器、定向耦合器和反馈放大器的设计内容。在功率放大器这一节做了有意义的扩充。

第 5 章讨论振荡器。基本上是用一个放大器配以适当的反馈量构成振荡器, 产生振荡。细致研究了振荡器设计中引入负阻的方法。举出各种振荡器的设计实例。例如, 采用 BJT、GaAs FET、介质谐振腔 (DR) 以及变容二极管构成的振荡器等。

第 2 版还增补了一些新的附录。例如: 附录 A 讨论圆图方程、双线变换以及变换特征圆。附录 B 中提供了稳定条件的证明。附录 I 中阐述输入和输出的等 VSWR 圆。附录 K 讨论噪声的概念, 附录 L 则说明二端口网络噪声系数关系的推导。

习题的数量已大大增加。这些习题与书中的内容有机地结合成整体, 即使不去求解每一道习题, 也应该阅读一下。本书中的许多设计和计算往往可以利用简单的计算机辅助设计 (CAD) 程序或者可编程计算器来完成。针对本书第 1 版中给出 UM-MAAD (University of Miami Microwave Amplifiers Analysis and Design, 迈阿密大学微波放大器分析与设计) 的程序清单, 作者还提供了最新的 UM-MAAD 程序版本, 可寄给你, 只要按照后面列出的地址寄来一个 3.5" 的软盘、邮票和注明自己地址的信封即可。该 CAD 程序是用 FORTRAN-77 编写的, 应用十分方便。

为力求全书的完整性, 有些设计实例采用了大规模 CAD 程序计算, 该程序在附录 N “计算机辅助设计” 给出。这些实例显示大规模 CAD 程序可以完成一些仿真和优化。在解决这些问题的过程中, 能充分领会采用大规模 CAD 技术的重要意义。否则, 一般人总难免出现计算错误, 或者计算效率低, 大大增加了设计成本。附录 N “计算机辅助设计” 所采用的大规模 CAD 程序是惠普公司 (Hewlett-Packard) 的 HP85150B 微波和射频 (RF) 设计系统, 称为 HP_MDS 程序。惠普公司 1990 年将该程序的拷贝捐赠给迈阿密大学, 用于教学和研究。

我的许多学生和第 1 版的读者为本书提供了大量的资料。我衷心感谢我以前的所有学生, 他们给予我许多有益的建议, 尤其是 Branko Avanic, William Sanfiel, Deniz Ergenenr, Ching Y. Kung, Clandio J. Traslavina, Levent Y. Erborra, Augusto E. Rodriguez, Edgar Duque, Sergio Bustanmante 等人无价的建议和建设性的批评。

第 2 版的书稿, 由 Orlando Sosa, Ramon Ponce 和 Mahes M. Ekanayake 仔细校阅。Branko Avanic 博士提供了大量的资料, 并为习题的求解做出非常有意义的贡献。我的朋友和同事, Kamal Premaratne 博士对第 1 版和第 2 版都提出过意见和建议, 尤其是第 5 章。

这几年来, 我还受到许多同事的支持和鼓励, 他们是 Tzay Young 教授、Reuven Lask 教授、Kamal Yacoub 教授、Manuel A. Huerta 教授和 Tames C. Nearing 教授。

我还想对 Les Besser 博士表达特殊的感谢。1970 年，他首次向我介绍了用于微波晶体管放大器设计的 CAD 的方法。这些年来，他一直在激发我的灵感，并引导我沿着 CAD 的途径去解决电路设计问题。Besser 博士在微波电子领域还做了大量促进教学的工作。他讲授了多种精彩的课程（Besser Associates, 4600EI Camino Real #210, Los Altos, CA 94022），这些课程在微波工业界已是颇受欢迎，并且评价很高。

最后，我深深地感激我的妻子 Pat，我的孩子 Donna 和 Alex，以及过世的父母 Ricardo 和 Raquel，感谢他们的爱、鼓励和关怀。

Guillermo Gonzalez Ph.D
University of Miami Engineering
Department of Electrical and Computer
Coral Gables, Florida 33124

目 录

第 1 章 二端口网络的表述	1
1.1 引言	1
1.2 阻抗矩阵、导纳矩阵、混合矩阵和 $ABCD$ 矩阵	1
1.3 传输线的概念	4
1.4 散射矩阵和链散射矩阵	19
1.5 位移参考平面	24
1.6 散射参数的特性	25
1.7 功率波和归一化散射参数	42
1.8 二端口网络的参数转换	56
1.9 散射参数的测量	58
1.10 晶体管的散射系数	61
1.11 微波晶体管的特性	64
1.11.1 双极晶体管	64
1.11.2 场效应晶体管	73
参考文献	81
第 2 章 匹配网络和信号流图	82
2.1 引言	82
2.2 Smith 圆图	82
2.3 归一化阻抗和导纳的 Smith 圆图	94
2.4 阻抗匹配网络	99
2.5 微带线匹配网络	123
2.6 信号流图及其应用	153
2.7 功率增益表达式: 另一种推导过程	160
2.8 驻波比的计算	169
参考文献	183
第 3 章 微波晶体管放大器设计	184
3.1 引言	184
3.2 功率增益方程	184
3.3 稳定性的设计	188
3.4 等增益圆族 —— 单向情况	199
3.4.1 绝对稳定情况, $ S_{ii} < 1$	201
3.4.2 潜在不稳的情况, $ S_{ii} < 1$	205
3.5 单向优值	208

3.6	同时共轭匹配:双向情况	209
3.7	工作功率增益圆和可用功率增益圆	216
3.7.1	工作功率增益圆	216
3.7.2	可用功率增益圆	227
3.8	等驻波比 VSWR 圆	228
3.9	直流偏置网络	240
3.9.1	BJT 偏置网络	240
3.9.2	GaAs FET 的偏置网络	246
	参考文献	258
第 4 章	噪声、带宽以及大功率设计方法	259
4.1	引言	259
4.2	二端口网络的噪声	259
4.3	等噪声系数圆	263
4.4	宽带放大器设计	284
4.5	放大器的调谐	307
4.6	带宽分析	307
4.7	大功率放大器设计	311
4.7.1	甲类工作	311
4.7.2	乙类和丙类工作模式	316
4.7.3	互调失真	318
4.7.4	功率合成器	320
4.8	两级放大器的设计	328
	参考文献	336
第 5 章	微波晶体管振荡器设计	338
5.1	引言	338
5.2	振荡条件	338
5.2.1	反馈振荡器	338
5.2.2	单端口负阻振荡器	341
5.3	二端口负阻振荡器	350
5.4	采用大信号测量的振荡器设计	356
5.5	振荡器的结构	361
5.5.1	电介质谐振腔振荡器	364
5.5.2	YIG 振荡器	371
5.5.3	变容二极管调谐振荡器	373
	参考文献	380
附录 A	关于圆方程	381
A.1	圆方程:双线性变换	381
A.2	输入和输出稳定圆的导出[式(3.3.5)和(3.3.6)]	383

附录 B 稳定条件	384
B.1 第一种推导过程	384
B.2 第二种推导过程	388
B.3 其他推导方法	391
参考文献	392
附录 C 绝对稳定条件: $K > 1$ 和 $B_1 > 0$	393
附录 D 单向管等增益圆的推导 [式 (3.4.10)]	394
附录 E 关于式 (3.6.5) 和式 (3.6.6)	395
E.1 对于 $ \Gamma_{Me} < 1$ 和 $ \Gamma_{ML} < 1$ 分析式 (3.6.5) 和式 (3.6.6)	395
E.2 同时共轭匹配的条件	396
附录 F 推导 $G_{T, \max}$ (式 (3.6.10))	398
附录 G 等工作功率增益圆的推导	402
附录 H Γ_{ML} 的表达式	403
附录 I 等驻波比 VSWR 圆	404
附录 J 在 Γ_s 和 Γ_L 平面上的映射	406
附录 K 噪声的概念	408
附录 L 放大器的噪声系数	412
附录 M 稳定振荡的条件	419
附录 N 计算机辅助设计	424
参考文献	438

第 1 章 二端口网络的表述

1.1 引言

为了描述一个二端口网络的工作特性，必须同时获得其传输和阻抗函数的测量数据。在低频情况下， z ， y ， h 或 $ABCD$ 参数就是用于描述二端口网络的网络函数实例。由于所需的短路和开路测试条件在微波宽频范围上难以实现，因此，这些参数在高频情况下不能准确测量。

在微波范围内很有用的一套参数是散射参数（ S 参数）。这些参数是根据传输波来定义的，它们完整描述了二端口网络的特性。

20 世纪 70 年代，由于新型网络分析仪的出现，可以很容易地测量 S 参数，所以 S 参数更加普及。 S 参数可简单地用于电路分析，也可直接应用于流图定理（flow graph theory）。虽然本书主要将 S 参数用于描述二端口网络的特性，实际上也可用来描述 n 端口网络的特性。

分析二端口网络的过程中，还要讨论功率波和归一化散射参数（ S_p 参数）的应用。

1.2 阻抗矩阵、导纳矩阵、混合矩阵和 $ABCD$ 矩阵

在低频情况下，图 1.2.1 中的二端口网络可以用几种方式来描述。

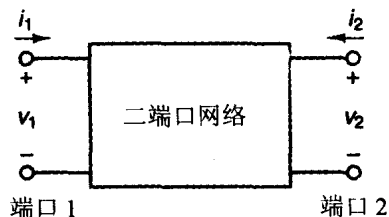


图 1.2.1 二端口网络的表述

最常见的表述方式是阻抗矩阵（ z 参数）、导纳矩阵（ y 参数）、混合矩阵（ h 参数）和链式或 $ABCD$ 矩阵（链式或 $ABCD$ 参数）。这些参数的定义如下：

z 参数：

$$v_1 = z_{11}i_1 + z_{12}i_2$$

$$v_2 = z_{21}i_1 + z_{22}i_2$$

或以矩阵方式表述

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

y 参数:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

h 参数:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$ABCD$ 参数:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{bmatrix}$$

以上二端口网络的表述在低频情况下非常有用,因为这些参数可以通过将二端口网络的端口进行短路和开路测试容易测得。例如

$$z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0}$$

就是将端口 2 设为交流开路测得的 (即 $i_2 = 0$) 所测得的。

z 参数、 y 参数和 $ABCD$ 参数在电路计算机辅助分析中也很有用。当二端口网络串联时 (如图 1.2.2 所示), 可以把各个独立的 z 参数相加, 从而导出总的 z 参数, 也就是

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^a + v_1^b \\ v_2^a + v_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11}^a + z_{11}^b & z_{12}^a + z_{12}^b \\ z_{21}^a + z_{21}^b & z_{22}^a + z_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

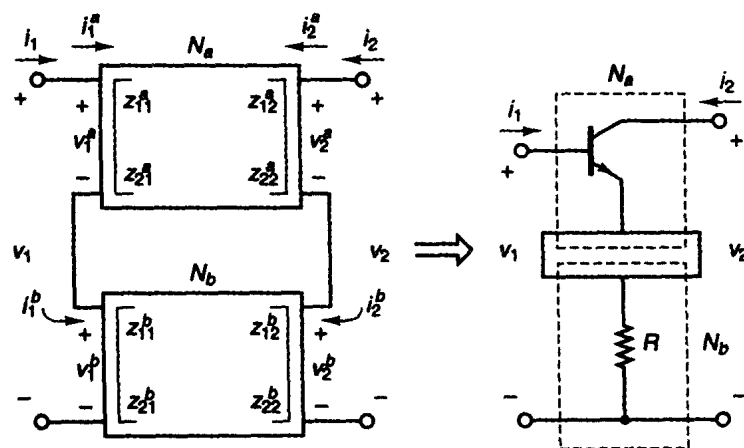


图 1.2.2 网络串联的 z 参数和典型应用

当二端口网络并联时,如图 1.2.3 所示,可以由各个独立的 y 参数相加就得出总的 y 参数,也就是

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1^a + i_1^b \\ i_2^a + i_2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11}^a + y_{11}^b & y_{12}^a + y_{12}^b \\ y_{21}^a + y_{21}^b & y_{22}^a + y_{22}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

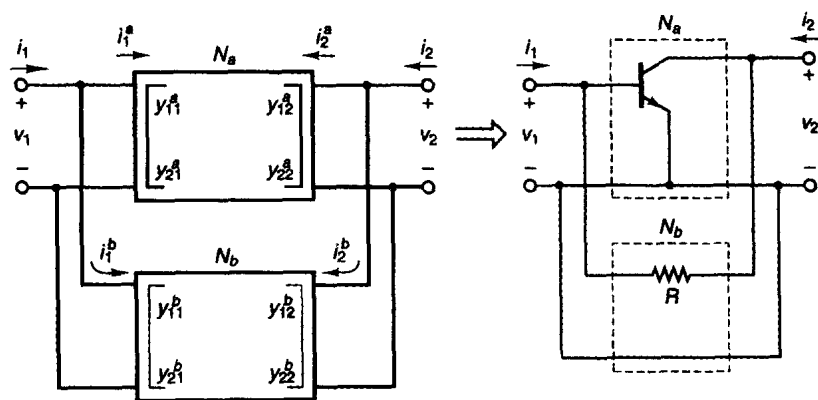


图 1.2.3 网络并联的 y 参数和典型应用

当二端口网络彼此级联时,链式或 $ABCD$ 矩阵可以如下应用(见图 1.2.4)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1^a \\ i_1^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^a \\ -i_2^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^a & B^a \\ C^a & D^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^b & B^b \\ C^b & D^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^b \\ -i_2^b \end{bmatrix} \quad (1.2.1)$$

因为 $v_2^a = v_1^b$ 及 $-i_2^a = i_1^b$ 。式(1.2.1)说明总的 $ABCD$ 矩阵等于各个独立的 $ABCD$ 矩阵的乘积(即矩阵乘积)。

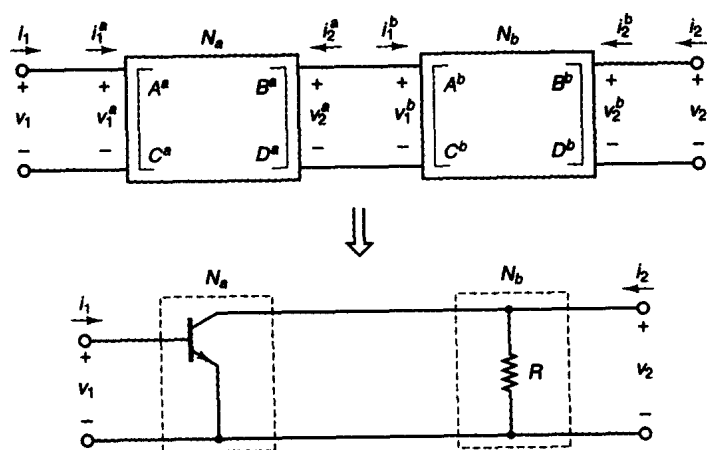


图 1.2.4 网络级联的 $ABCD$ 参数和典型应用

在微波频段, z 参数、 y 参数、 h 参数或者 $ABCD$ 参数的测量如果可能非常困难。其原因是对于交流信号的短路和开路很难在微波宽带范围内实现。另外,一个有源的二端口网络(例如微波晶体管)在短路或者开路状态下可能会产生振荡。因此,在微波频率下的

二端口网络需要一种新的描述方法。最恰当的表达方法称为散射矩阵，而散射参数是依据传输波的概念来定义的。

1.3 传输线的概念

传输线的种类很多。图 1.3.1 展示了 3 类常见的传输线：双线传输线、同轴传输线和微带传输线。微带传输线最适用于微波放大器结构。这些传输线的工作原理可用传输线的分布电路模型来解释。这样的模型可以得到传输线上的电压和电流的实际结果，而不必求解麦克斯韦方程组。

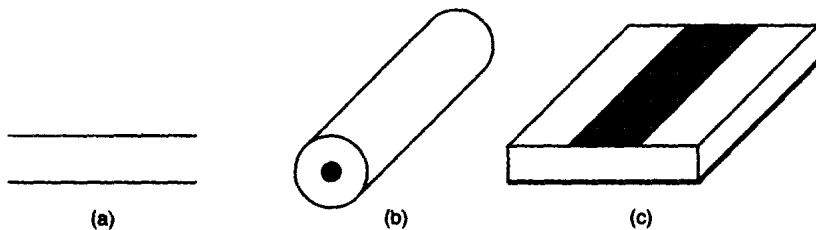


图 1.3.1 (a) 双线传输线；(b) 同轴传输线；(c) 微带传输线

传输线的电气模型如图 1.3.2 (a)所示。以二端口网络来看，传输线在输入端（源端）接收来自信号源的功率，并输送功率给输出端（负载端）的负载。将长度为 l 的传输线分为许多相同的线元 Δx 。每个线元 Δx 都具有单位长度电阻 R (Ω/m)、单位长度电感 L (H/m)、单位长度电容 C (F/m) 和单位长度电导 G (S/m)。并且假定这些参数在传输线上是常量（即传输线是均匀的）。

图 1.3.2 (b)说明了传输线的线元 Δx 和线元 Δx 的输入端和输出端的电压和电流。显然，传输线各处的电压和电流是位置和时间的函数。在线元 Δx 段的输入端，电压、电流是 $v(x,t)$ 和 $i(x,t)$ ，输出端的电压和电流则表示为 $v(x+\Delta x,t)$ 和 $i(x+\Delta x,t)$ 。

对图 1.3.2 (b)中的模型应用基尔霍夫电压定律，得到

$$v(x,t) - v(x+\Delta x,t) = R\Delta x i(x,t) + L\Delta x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

两边同除以 Δx 可以写为

$$\frac{v(x+\Delta x,t) - v(x,t)}{\Delta x} = -Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t}$$

当 Δx 趋向于零时，左侧就为 $v(x,t)$ 对 x 的偏导数。因此，取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限，可以得到

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -Ri(x,t) - L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

类似地，对图 1.3.2(b)中的模型应用基尔霍夫电流定律，可以得到

$$i(x,t) - i(x+\Delta x,t) = G\Delta x v(x+\Delta x,t) + C\Delta x \frac{\partial v(x+\Delta x,t)}{\partial t}$$

两边同除以 Δx , 并取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 结果为

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -Gv(x, t) - C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (1.3.2)$$

偏微分方程(1.3.1)和(1.3.2)描述了传输线各处的电压和电流。微波电子学中特别注重的是无损耗传输线——就是说, 传输线的 R 和 G 可以忽略, 或者直接令 $R = G = 0$ 。无损耗传输线中的线元 Δx 如图 1.3.2 (c)所示。

在无损耗传输线中, $R = G = 0$, 因此(1.3.1)和(1.3.2)可以简化为

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (1.3.3)$$

和

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (1.3.4)$$

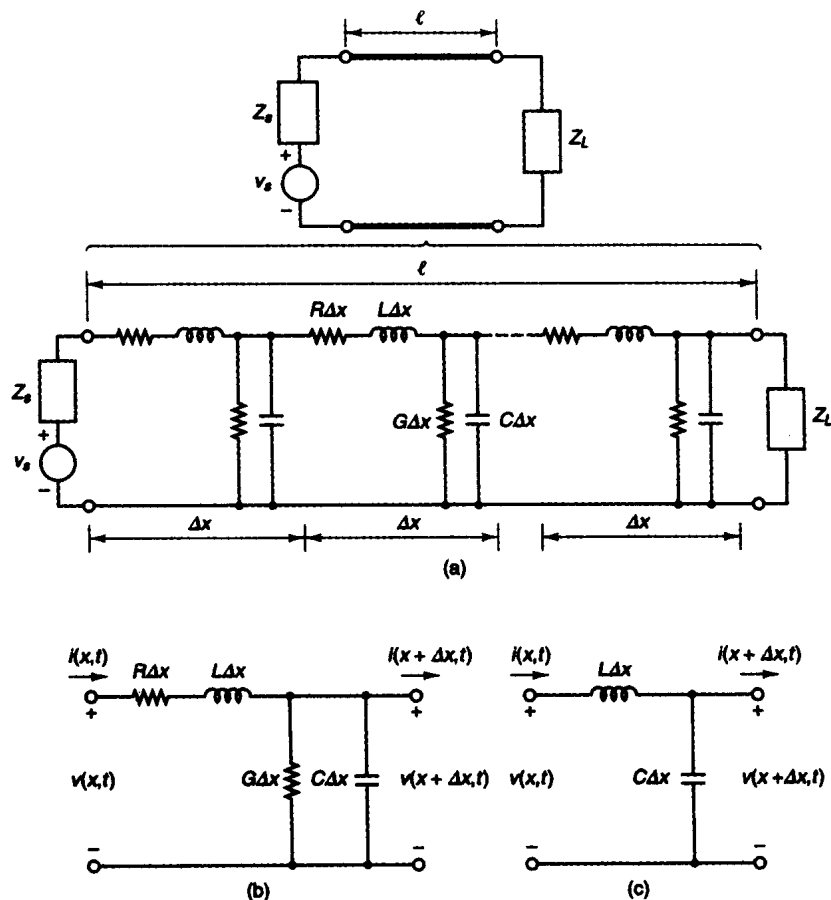


图 1.3.2 (a) 传输线的分布电路模型; (b) 传输线的线元 Δx ; (c) 无损耗传输线中的线元 Δx

我们所关心的是偏微分方程(1.3.3)和(1.3.4), 对于该传输线在正弦激励下的解。通过

相量分析可以得到 $v(x, t)$ 和 $i(x, t)$ 的稳态解。

对于正弦激励 (即 $v_s(t) = V_s \cos \omega t$)，传输线上的稳态电压和电流也是时间的正弦函数，它们是位置和时间的函数，一般形式可以表示为

$$v(x, t) = f(x) \cos (\omega t + \varphi(x)) \quad (1.3.5)$$

和

$$i(x, t) = g(x) \cos (\omega t + \eta(x)) \quad (1.3.6)$$

其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是位置的实函数，而 $\varphi(x)$ 和 $\eta(x)$ 表示与位置有关的相位。

利用欧拉公式，也就是

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

其中 $\cos \theta$ 是 $e^{j\theta}$ 的实部 (即 $\operatorname{Re}[e^{j\theta}] = \cos \theta$)，而 $\sin \theta$ 是 $e^{j\theta}$ 的虚部 (即 $\operatorname{Im}[e^{j\theta}] = \sin \theta$)，我们可以将(1.3.5)和(1.3.6)表示为

$$v(x, t) = f(x) \cos (\omega t + \varphi(x)) = f(x) \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \varphi(x))}] = \operatorname{Re}[f(x) e^{j\varphi(x)} e^{j\omega t}] \quad (1.3.7)$$

和

$$i(x, t) = g(x) \cos (\omega t + \eta(x)) = g(x) \operatorname{Re}[e^{j(\omega t + \eta(x))}] = \operatorname{Re}[g(x) e^{j\eta(x)} e^{j\omega t}] \quad (1.3.8)$$

从式(1.3.7)和(1.3.8)中，可以得到向量方程

$$V(x) = f(x) e^{j\varphi(x)}$$

和

$$I(x) = g(x) e^{j\eta(x)}$$

并可以将式(1.3.7)和(1.3.8)写为

$$v(x, t) = \operatorname{Re}[V(x) e^{j\omega t}] \quad (1.3.9)$$

和

$$i(x, t) = \operatorname{Re}[I(x) e^{j\omega t}] \quad (1.3.10)$$

相量 $V(x)$ 和 $I(x)$ 是位置的复函数，将变量电压和电流表示为传输线位置函数。

把式(1.3.9)和(1.3.10)代入式(1.3.3)得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Re}[V(x) e^{j\omega t}] = -L \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{Re}[I(x) e^{j\omega t}] \quad (1.3.11)$$

由于算符 Re 与算符 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可交换次序，所有我们可以把式(1.3.11)写为

$$\operatorname{Re}\left[\frac{\partial V(x)}{\partial x} e^{j\omega t}\right] = -L \operatorname{Re}\left[I(x) \frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t}\right] = -L \operatorname{Re}[I(x) j\omega e^{j\omega t}] \quad (1.3.12)$$

显然, $V(x)$ 只是一个位置函数, 所以

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \frac{dV(x)}{dx}$$

而且式(1.3.12)可以写为

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) \right) e^{j\omega t} \right] = 0 \quad (1.3.13)$$

方程(1.3.13)必须满足所有的时间 t 。因此, 圆括号中的部分必须为 0, 即

$$\frac{dV(x)}{dx} = -j\omega LI(x) \quad (1.3.14)$$

实际上, 最后一步对读者来说也许不易理解。可以证明, 当 $\omega t = 0$, $e^{j0} = 1$ 时, 式(1.3.13)给出

$$\operatorname{Re} \left[\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) \right] = 0 \quad (1.3.15)$$

而当 $\omega t = \pi/2$, $e^{j\pi/2} = j$ 时, 式(1.3.13)给出

$$\operatorname{Re} \left[\left(\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) \right) j \right] = 0$$

上式等价于

$$\operatorname{Im} \left[\frac{dV(x)}{dx} + j\omega LI(x) \right] = 0 \quad (1.3.16)$$

方程(1.3.15)和(1.3.16)表示 $(dV(x)/dx) + j\omega LI(x)$ 的实部和虚部都必须为 0。因此, 式(1.3.14)得以证明。

将式(1.3.3)与(1.3.14)中相应的相量方程比较, 可以看出, 只要把式(1.3.3)中的算符 $\partial/\partial t$ 替换为 $j\omega$, 而且把 $v(x,t)$ 和 $i(x,t)$ 分别替换为相量 $V(x)$ 和 $I(x)$, 就得到式(1.3.14)。相量的应用可以把偏微分方程(1.3.3), 可变为全微分方程式(1.3.14)。

类似地, 把式(1.3.9)和式(1.3.10)代入式(1.3.4), 可得到下面的相量方程

$$\frac{dI(x)}{dx} = -j\omega CV(x) \quad (1.3.17)$$

方程(1.3.14)和(1.3.17)是无损耗传输线中 $V(x)$ 和 $I(x)$ 满足的微分方程。这些方程可以求得 $V(x)$ 和 $I(x)$ 的如下解。对式(1.3.14)再次对 x 求微分, 得到

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -j\omega L \frac{dI(x)}{dx} \quad (1.3.18)$$

把式(1.3.17)代入式(1.3.18), 得到

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -j\omega L(-j\omega C)V(x) = -\omega^2 LC V(x)$$

或者

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} + \beta^2 V(x) = 0 \quad (1.3.19)$$

其中

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (1.3.20)$$

参数 β (弧度 / m) 是传输常量。

二阶微分方程式(1.3.19)的通解为

$$V(x) = Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x} \quad (1.3.21)$$

其中的常数 A 和 B 通常是复常量。它们可以通过传输线在输入端和输出端的边界条件计算得到。

$I(x)$ 的通解可从式(1.3.14)和式(1.3.21)得到, 即

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{-1}{j\omega L} \frac{dV(x)}{dx} = \frac{-1}{j\omega L} \frac{d}{dx} [Ae^{-j\beta x} + Be^{j\beta x}] \\ &= \frac{\beta}{\omega L} [Ae^{-j\beta x} - Be^{j\beta x}] \end{aligned} \quad (1.3.22)$$

如果传输线的特征阻抗定义为

$$Z_o = \frac{\omega L}{\beta} = \frac{\omega L}{\omega\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.3.23)$$

则式(1.3.22)还可以表示为

$$I(x) = \frac{A}{Z_o} e^{-j\beta x} - \frac{B}{Z_o} e^{j\beta x} \quad (1.3.24)$$

由式(1.3.23)可以看出, 在无损耗传输线中 Z_o 是实数。

传输线中电压和电流与时间有关的项可以由式(1.3.9)和(1.3.10)得出, 即

$$v(x, t) = \operatorname{Re}[V(x)e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}[Ae^{-j(\beta x - \omega t)} + Be^{j(\beta x + \omega t)}] \quad (1.3.25)$$

和

$$i(x, t) = \operatorname{Re}[I(x)e^{j\omega t}] = \operatorname{Re}\left[\frac{A}{Z_o} e^{-j(\beta x - \omega t)} - \frac{B}{Z_o} e^{j(\beta x + \omega t)}\right] \quad (1.3.26)$$

在 A 和 B 为实数的简单情况下, 式(1.3.25)和(1.3.26)可以表示为

$$v(x, t) = A \cos(\omega t - \beta x) + B \cos(\omega t + \beta x) \quad (1.3.27)$$

和