高等数学题型解析与训练

夏大峰　符美芬　朱凤琴　冯秀红　朱杏华　陈纪波

高等教育出版社

南京信息工程大学教材基金资助项目

高等数学题型解析与训练

Gaodeng Shuxue Tixing Jiexi yu Xunlian

夏大峰　符美芬　朱凤琴
冯秀红　朱杏华　陈纪波

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是高等数学的配套辅导书，既可作为课程教学内容的复习与训练，巩固所学内容，又可拓宽高等数学知识。本书与课堂教学内容同步，便于自学，可帮助读者加深对知识的理解和应用。例题既兼顾每章内容的复习与巩固，又涉及多个知识点的学习与综合，每个例题都对涉及的知识点、解题思路与题型归类等进行分析。每章后面都配有训练与参考答案。

本书内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微分法及其应用，重积分，曲线积分与曲面积分，无穷级数。

本书可供非数学类专业的学生及准备报考硕士研究生的人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学题型解析与训练 / 夏大峰等编. --北京：高等教育出版社,2014.9

ISBN 978-7-04-040846-1

Ⅰ.①高… Ⅱ.①夏… Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 175748 号

策划编辑 李 蕊　　责任编辑 李 蕊　　特约编辑 张 卫　　封面设计 于文燕
版式设计 童 丹　　插图绘制 宗小梅　　责任校对 刘 莉　　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	三河市吉祥印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	32.75	版　　次	2014年 9 月第 1 版
字　　数	600 千字	印　　次	2014年 9 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	44.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 40846-00

前言

高等数学是高等学校非数学类专业普遍开设的公共基础课。本书获得南京信息工程大学数学教材立项，是结合南京信息工程大学数学素质拓展课程的教学内容，针对高等数学教学内容和人才培养要求，同时借鉴其他高校高等数学教学改革的成果和经验编写而成。由于高等数学具有知识结构的完整性，以及数学的基本概念和基本理论的抽象性，分析问题和解决问题的技巧性，编写本书的目的是既可以作为高等数学配套教辅、拓展课程的教材使用，又可以作为考研的辅导书使用，所以，编写过程中我们重点在以下几个方面做了工作：

1. 全面覆盖了高等数学的教学内容和知识点，以及全国硕士研究生入学考试数学考试大纲中高等数学的知识点，并对重要概念、公式、定理等知识点进行剖析，增强学生对这些内容的理解和应用，以便达到全面复习和巩固高等数学知识和内容的目的。

2. 本书内容安排与其他同类高等数学辅导教材有所不同，是以章为一个整体内容进行安排。这种安排既不影响教学过程中每节教学内容的复习与辅导，又有利于保持前后知识点的一致性与关联性，使得高等数学教学内容保持整体性。考虑到考研辅导都是以章为教学内容安排的，所以本书可作为考研辅导书。

3. 在高等数学教学过程中，一般情况下是每章教学内容结束后都要安排一定学时进行复习与巩固、上习题课。针对这种教学模式，每一章由三部分内容组成：内容概述，例题分析，训练与参考答案。这样有利于每章教学内容结束后进行复习与巩固。

4. 在例题选择方面，既兼顾每章内容的复习与巩固，又涉及多个知识点的学习与综合。例题都对涉及的知识点、解题思路、题型归类、问题处理方法等进行了分析。通过例题分析使学生从不同的角度考虑问题，拓宽知识面，达到素质拓展的要求，从而提高学生分析问题、解决问题的能力。每章后面安排了一定量的训练题，既有知识点复习的训练题，又有多个知识点相结合的综合题，难易结合，适合各类读者自主选择；训练题后附有参考答案。由于例题与训练题题型多样，且有一定的难度，所以本书还可以作为高等数学竞赛辅导书。

5. 本书与高等数学教材配合使用，不仅便于学生课后复习、巩固所学知识，还可以缓解教学学时不足带来的教学压力，使得课堂教学时间更充裕，达到提高教学效果的目的。

6. 许多教材将定积分的应用单独作为一章，但由于定积分的引入与教学内

容和例题有许多是定积分应用的问题，所以本书将定积分的应用归纳到定积分一章。

此外，编写组成员对本书的结构框架，章节安排以及题型与训练的总体要求进行了认真研讨，统一了编写要求。全书最后由夏大峰统稿。在编写过程中，南京信息工程大学数学与统计学院大学数学部的老师提出了许多宝贵的意见，教务处以及学院领导给予了大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，难免存在一些缺点和不足，敬请各位专家、同行和广大读者批评指正。

编 者

2013 年 12 月于南京信息工程大学

目　录

第一章　函数　极限　连续

事物的发展与变化可以归结为变量之间的依赖关系,函数就是变量之间的依存关系.极限是研究变量的基础,极限方法也是研究变量的基本方法.作为微积分的准备,本章主要掌握的内容有函数及相关概念;数列与函数的极限及相关概念,极限的运算性质;无穷小量和无穷大量;函数的连续性及有关性质,函数的间断点等.

内容概述

一、函数及其性质

函数概念　设 D 是一个给定的数集,如果对每一 $x\in D$,按照一定的法则总存在唯一确定的值 y 与之对应,则称 y 是 x 的函数,记为 $y=f(x)$,数集 D 称为该函数的定义域,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

函数定义有两个要素:定义域和对应法则.当两个函数的定义域和对应法则完全相同时,则这两个函数相同.

另外,函数的表示具有与字母的无关性,即 $y=f(x)$ 与 $s=f(t)$ 表示同一个函数.

复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U,函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D.如果函数 $u=\varphi(x)$ 值域是 U 的子集,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 是定义在 D 上的复合函数,其中 u 称为中间变量.

若 $u=\varphi(x)$ 值域不含在 $y=f(u)$ 的定义域内,则 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 不能复合.

反函数　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.如果对每一 $y\in W$,都存在唯一的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,这样就得到了定义在 W 上,值域为 D 的函数,称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,习惯上记为 $y=f^{-1}(x)$.

初等函数　幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合构成的,且可用一个解析式子表示的函数,称为初等函数.

分段函数一般不是初等函数,但也存在分段函数是初等函数的情形,如函数

$$y=\begin{cases}-x, & x\leqslant 0,\\ x, & x>0\end{cases}$$

是初等函数,因为它可以用一个式子 $y=|x|=\sqrt{x^2}$ 表示.

函数特性 (1) 奇偶性:设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,若对任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;若对任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 周期性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $l\neq 0$,使得对任意的 $x\in D$,都有 $x+l\in D$,且 $f(l+x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,其中 l 是它的一个周期.

(3) 有界性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在 $M>0$,使得对任意的 $x\in D$,都有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 为 D 上的有界函数;否则称为无界函数.

(4) 单调性:设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上是单调增加函数,特别地,若 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上是严格单调增加函数;若对任意的 $x_1,x_2\in D$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上是单调减少函数,特别地,若 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 D 上是严格单调减少函数.

单调函数存在反函数.

二、极限

数列极限 设数列 $\{x_n\}$,若存在常数 a,使得 $\forall\varepsilon>0$,总存在自然数 N,当 $n>N$ 时,都有 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立,则称 a 为数列 $\{x_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则对 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$,都有 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

反过来,若存在 $\{x_n\}$ 的某子列其极限不存在,或存在 $\{x_n\}$ 的某两个子列其极限存在但不相等,那么数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在.

另外,数列 $\{x_n\}$ 的某几个子列的极限存在且相等,也不能断定数列 $\{x_n\}$ 的极限存在. 但有下列结论:

若 $x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,那么 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

函数极限 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义,若存在常数 a,使得 $\forall\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,x 对应的函数值 $f(x)$ 满足不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon,$$

则称 a 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$.

另外,还有函数 $f(x)$ 在 $x\to\infty$,$x\to+\infty$,$x\to-\infty$ 的极限定义

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=a,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=a,$$

以及函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0^-$,$x\to x_0^+$ 时的左、右极限定义

$$f(x_0^-)=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\ f(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+}f(x),$$

在此就不详细叙述了.

关于函数的单侧极限与极限的关系,有下列结论:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 的充要条件是 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=a$;

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$.

极限性质 以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$ 为例,具有如下性质:

(1) 唯一性:极限 a 是唯一的.

(2) 局部有界性:函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内是有界的,即存在 $\delta>0$ 和 $M>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,都有 $|f(x)|\leqslant M$.

(3) 局部保号性:若 $a>0$(或 $a<0$),则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$f(x)>0(\text{或 } f(x)<0).$$

另外,若存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),那么函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 时的极限 $a\geqslant0$(或 $a\leqslant0$).

(4) 极限的局部不等式:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,且 $a<b$,则存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)<g(x)$.

反过来,若存在 $\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=b$,则 $a\leqslant b$.

其他类型的极限具有相同的性质,在此略述.

极限四则运算 设 $\lim f(x)=a$, $\lim g(x)=b$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=a\cdot b$;

(3) 当 $\lim g(x)=b\neq0$ 时, $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

上述极限四则运算法则中 lim 是指 $x\to x_0$, $x\to x_0^-$, $x\to x_0^+$ 以及 $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$ 时的极限. 对于数列也有相同的极限四则运算性质.

设 $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq0)$, $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m(b_0\neq0)$ 为多项式,则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n}{Q_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m,\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

复合函数极限 设函数 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$,若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,在 x_0 的某去心邻域内 $\varphi(x)\neq u_0$,且 $\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$,则

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f(u_0) = f[\lim_{x\to x_0} \varphi(x)].$$

极限存在准则 (1)单调有界准则:单调有界数列一定有极限.

类似地也有:单调有界函数必有极限.

(2)夹逼准则:若在 x_0 点的某去心邻域内有

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x), \text{且} \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = a,$$

则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$.

同样地,还有 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$,以及 $x\to x_0^{\pm}$ 时的夹逼准则,在此就不一一给出了.对于数列的情形,有下列的夹逼准则.

若存在某自然数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

归结原理 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ 的充要条件是对任意趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n \neq x_0)$,都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

同样地,还有 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$,以及 $x\to x_0^{\pm}$ 时的归结原理,在此也不一一给出了.归结原理主要用于讨论函数极限不存在的情况.

两个重要极限

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \text{ 或者 } \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}.$$

三、无穷小与无穷大

无穷小 把极限为零的变量称为无穷小.

由无穷小的概念,如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,那么称 $f(x)$ 是在 $x\to x_0$ 时的无穷小.无穷小不是指很小的数,而是变量.值得注意的是:0 是唯一可以作为无穷小的数.

极限与无穷小的关系 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha = 0$,即 α 是在 $x\to x_0$ 时的无穷小.

类似地,还有 $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$, $x\to x_0^{\pm}$ 时的无穷小,以及极限与无穷小之间的关系.

无穷大 绝对值无限增大的变量称为无穷大.

由无穷大的概念,函数 $f(x)$ 的自变量 x 在某种趋向下(如 $x\to x_0$, $x\to x_0^{\pm}$, $x\to\infty$, $x\to\pm\infty$)对应的函数的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,所以无穷大是变量,且无穷大一定是无界的,但无界不一定是无穷大,无穷大通常记为 $\lim f(x) = \infty$.特别地,若 $\lim f(x) = +\infty$,则称函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某种趋向下为正无穷大;若

$\lim f(x)=-\infty$,则称函数 $f(x)$ 在自变量 x 的某种趋向下为负无穷大.

数列作为变量也有无穷小与无穷大,以及数列极限与无穷小之间的关系.

无穷小与无穷大有如下关系:

如果 $f(x)$ 是无穷大,那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小;如果 $f(x)$ 是无穷小,且 $f(x)\neq 0$,那么 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

根据无穷小与无穷大的关系,我们重点是考虑无穷小及其性质与应用.

无穷小的比较 设变量 α,β 均是无穷小.

(1) 高阶无穷小:若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,或称 α 是比 β 低阶的无穷小,并记为 $\beta=o(\alpha)$.

(2) 同阶无穷小:若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C$($C$ 是不为零的常数),则称 β 与 α 是同阶无穷小.

(3) 等价无穷小:若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记为 $\alpha\sim\beta$.

(4) k 阶无穷小:若存在某 $k>0$,使得 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C$($C$ 是不为零的常数),则称 β 为 α 的 k 阶无穷小.

根据无穷小的比较,若 α 是无穷小,且极限 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在,或 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=C\neq 0$,那么 β 也是无穷小.

另外,若 α 是无穷大,且极限 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 存在且不等于零,或 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}$ 存在,那么 β 也是无穷大.

无穷小的性质 (1)有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

(2) 有界函数与无穷小的积为无穷小.

等价无穷小的替换定理 设变量 α,β 均是无穷小,且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$,如果 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在,则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

常见的几类等价无穷小 当 $x\to 0$ 时,

$\sin x\sim x$;$\tan x\sim x$;$\arcsin x\sim x$;$\arctan x\sim x$;$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$;$\ln(1+x)\sim x$;$e^x-1\sim x$;由 $a^x=e^{x\ln a}$,$a^x-1\sim x\ln a$($a>0$ 且 $a\neq 1$);$(1+x)^m-1\sim mx$.

利用等价无穷小替换求极限,一般仅在对无穷小做乘、除法运算时使用;加、减法运算一般不能使用.

若 $\lim\beta=\infty$,且 $\lim\alpha\beta=a$,那么 $\lim\alpha=0$,即 α 是无穷小;反过来,若 $\lim\alpha=0$,且 $\lim\alpha\beta=a\neq0$,那么 $\lim\beta=\infty$,即 β 是无穷大.

注　以上讨论的结果也适应数列,在此就不再重复叙述了.

无界与无穷大的关系　无穷大一定是无界的,但无界不一定是无穷大,并有下列结果:

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的任意邻域内是无界的,当且仅当存在趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大.

(2) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的任意邻域内是无界的但不是无穷大,当且仅当存在趋于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大,$\{f(y_n)\}$ 为有界.

(3) 函数 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时是无界的,当且仅当存在趋于无穷的数列 $\{x_n\}$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大.

(4) 函数 $f(x)$ 在 x 趋于无穷时是无界的但不是无穷大,当且仅当存在趋于无穷的数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 为无穷大,$\{f(y_n)\}$ 为有界.

对于数列,我们也有相同的结果:

(5) 数列 $\{x_n\}$ 是无界的,当且仅当存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 是无穷大.

(6) 数列 $\{x_n\}$ 是无界的但不是无穷大,当且仅当存在 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_{k_1}}\}$ 和 $\{x_{n_{k_2}}\}$,使得 $\{x_{n_{k_1}}\}$ 是无穷大,而 $\{x_{n_{k_2}}\}$ 为有界.

四、函数的连续性

连续性概念　设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义,如果

$$\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0,\text{或}\ \lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在 x_0 点连续.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 点左连续;如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$ 在 x_0 点右连续.

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是 $f(x)$ 在 x_0 点左连续且右连续. 对于分段函数,通常要讨论函数在分界点的左连续和右连续,以便确定函数在分界点的连续性.

根据极限与无穷小的关系,我们有下列结论:

函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充要条件是 $f(x)=f(x_0)+\alpha$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha=0$.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上的每一点都连续,则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续;若区间 I 含有左(右)端点,是指 $f(x)$ 在左(右)端点为右(左)连续.

间断点及其分类　函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续有三个要素:$f(x_0)$ 有定义,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 如果函数 $f(x)$ 在 x_0 点的三个要素有一个不满

足,则 $f(x)$ 在 x_0 点不连续,当 x_0 不是区间端点,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

第一类间断点:x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点,如果 $f(x)$ 在 x_0 点的左右极限都存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

(1) 可去型间断点:极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $f(x_0)$ 无定义,或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去型间断点.

(2) 跳跃型间断点:$f(x)$ 在 x_0 点的左右极限存在,但不相等,则称 x_0 为 $f(x)$ 的跳跃型间断点.

第二类间断点:x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点,如果 $f(x)$ 在 x_0 点的左右极限至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(1) 无穷型间断点:若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$,或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$,则称 x_0 为 $f(x)$ 的无穷型间断点.

(2) 振荡型间断点:若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 至少有一个不存在,则称 x_0 为 $f(x)$ 的振荡型间断点.

函数 $f(x)$ 的间断点一般位于分母为零的点或分段函数的分界点.对分段函数的分界点是否为间断点,一般是利用分界点的左右连续性来确定.

连续函数的性质 (1) 四则运算性质:若函数 $f(x)$,$g(x)$ 在 x_0 点均连续,那么 $f(x)\pm g(x)$,$f(x)g(x)$ 都在 x_0 点连续,即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=f(x_0)\pm g(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=f(x_0)g(x_0).$$

若 $g(x_0)\neq 0$,那么 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 也在 x_0 点连续,即

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

(2) 复合函数的连续性:若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续,且 $u_0=\varphi(x_0)$,$f(u)$ 在 u_0 点连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续,即

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\varphi(x_0)].$$

(3) 初等函数在其定义域内连续.

闭区间上连续函数的性质 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则有下列结论:

(1) **有界性定理与最值定理**:$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有界,并一定取得最大值和最小值.

(2) **介值定理**:若 $f(a)\neq f(b)$,则对任意介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的数 μ,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu$.

一般地,对于任意介于 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值之间的数

μ,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=\mu$.

(3) **零点存在定理**:若 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,或 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值异号,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

把闭区间换为其他区间零点定理不一定成立,但我们有以下情形的结果:

设函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$(包括 $A=\pm\infty$),$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$(包括 $B=\mp\infty$),若 A 与 B 异号(当 $A=+\infty$ 时,$B<0$ 或 $B=-\infty$;当 $A=-\infty$ 时,$B>0$ 或 $B=+\infty$),则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

设函数 $f(x)$ 在半开半闭区间 $(a,b]$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$(包括 $A=\pm\infty$),若 A 与 $f(b)$ 异号(当 $A=+\infty$ 时,$f(b)<0$;当 $A=-\infty$ 时,$f(b)>0$),则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

设函数 $f(x)$ 在半开半闭区间 $[a,b)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=B$(包括 $B=\pm\infty$),若 $f(a)$ 与 B 异号(当 $B=+\infty$ 时,$f(a)<0$;当 $B=-\infty$ 时,$f(a)>0$),则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

题型解析

例 1　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\lg(3-x)}+\sqrt{49-x^2}$ 的定义域及 $f[f(-7)]$.

解　要使 $f(x)$ 有意义,则应有

$$\begin{cases}3-x>0,\\3-x\neq1,\\49-x^2\geqslant0,\end{cases}$$

解得 $-7\leqslant x<2,2<x<3$,即 $f(x)$ 的定义域为 $[-7,2)\cup(2,3)$.

又因为 $f(-7)=1$,所以 $f[f(-7)]=f(1)=\dfrac{1}{\lg 2}+4\sqrt{3}$.

例 2　设 $f(x)=\ln\dfrac{2+x}{2-x}$,求 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域.

解　要使 $f(x)$ 有意义,则应有

$$\begin{cases}\dfrac{2+x}{2-x}>0,\\2-x\neq0.\end{cases}$$

解得 $-2<x<2$,即 $f(x)$ 的定义域为 $(-2,2)$;再由 $-2<\dfrac{2}{x}<2$,得 $|x|>1$. 于是 $f(x)+f\left(\dfrac{2}{x}\right)$ 的定义域为 $(-2,-1)\cup(1,2)$.

分析 例1与例2涉及的知识点是定义域. 由例1、例2可知,求多个函数和的定义域,先求出每个函数的定义域,这些函数定义域的交即为原函数的定义域.

例3 已知$f(x)=\ln(2+\sin x)$,$g(x)=e^x$,求$f[g(x)]$.

解 函数$f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,函数$g(x)$的值域为$(0,+\infty)$,满足两个函数复合的条件,于是

$$f[g(x)]=\ln(2+\sin e^x).$$

分析 例3涉及的知识点是复合函数. 由例3可知,求已知两个函数的复合函数,首先判别两个函数是否满足复合条件,然后根据中间变量的取值范围求出复合函数.

例4 已知$f(x^{-3})=\ln(1+x^2)-x^{-1}$,求函数$f(x)$.

解 令$u=x^{-3}$,则$x=u^{-\frac{1}{3}}$,代入已知函数的关系式

$$f(u)=\ln(1+u^{-\frac{2}{3}})-u^{\frac{1}{3}},$$

则所求函数为

$$f(x)=\ln(1+x^{-\frac{2}{3}})-x^{\frac{1}{3}}.$$

分析 例4涉及的知识点是复合函数. 由例4可知,已知复合函数,适当选取中间变量,解出自变量为中间变量的关系式,然后代入已知复合函数关系式,使之为中间变量的函数,再把中间变量换回自变量即得所求函数.

例5 设函数$f(x)$满足方程$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{a}{x}$,$a$为常数,证明:$f(x)$是奇函数.

证 用$\frac{1}{x}$代换原方程中的x得

$$2f\left(\frac{1}{x}\right)+f(x)=ax,$$

与原方程联立方程组,解得

$$f(x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right).$$

因为

$$f(-x)=\frac{a}{3}\left(\frac{2}{-x}+x\right)=-\frac{a}{3}\left(\frac{2}{x}-x\right)=-f(x),$$

所以$f(x)$是奇函数.

分析 例5涉及的知识点是函数的奇偶性. 由例5的解答过程可知,先根据函数满足的关系式,求出所要讨论的函数$f(x)$,然后验证函数$f(x)$的奇偶性问题,一般是验证$f(-x)$是否为$f(x)$或$-f(x)$,确定函数为偶函数或奇函数.