

结 构 力 学

(下册)

周竞欧 朱伯钦 许哲明 主编

同济大学出版社

前 言

本教材是根据国家教委批准试行的《高等工业学校结构力学教学基本要求》和根据当前课程教学实践的需要及同济大学结构工程学院关于教材系列的规划而编写的,可作为工业与民用建筑、土建结构、桥梁与隧道、水工、地下建筑、铁道及公路工程等专业的结构力学教材,也可供土建类其他各专业及有关工程技术人员参考使用。

本书分上、下两册出版。上册包括绪论、平面体系的几何组成分析、静定结构的内力分析及位移计算、静定结构的影响线、力法解超静定结构等。下册包括位移法、矩阵位移法、结构静力分析的 FORTRAN 电算程序、渐近法、超静定结构的影响线、结构动力学、结构的弹性稳定、结构的极限荷载等。其中冠有 * 号的内容可供选学。不同的专业可根据专业的需要各自取舍。每章后附有较丰富的习题及部分习题答案。

此教材从 1988 年至 1992 年曾在同济大学工业与民用建筑、土建结构、桥梁工程、地下建筑工程等专业使用过三轮,在此基础上,这次又作了全面的修订。在编写过程中,编者力图使本教材能体现同济大学结构力学教研室历年来在各种专业教学实践中积累的基本经验,注意加强基本概念及理论知识的阐述,体现学科上的科学性、系统性和内容上的先进性,恰当掌握内容的深、广度,注意培养学生的解题能力和便于教学等。

本教材由朱伯钦、周竞欧、许哲明、郑有珍、王子姮、沈勤斋编写,由朱伯钦、周竞欧、许哲明主编。李明昭教授为部分初稿做了不少工作。在编写过程中,郑有珍教授和同济大学结构力学教研室全体教师对全书的编写提出了很多宝贵的意见,并提供了不少资料,给予了大力的支持。

本书由上海城市建设学院金成棣教授和同济大学力学系张相庭教授审阅,并提出了不少宝贵的意见,在此深表感谢。

由于编者水平有限,书中难免存在不足之处,恳请使用本书的教师及读者多加指正。

编 者

1992年 4 月于同济大学

(沪)新登字204号

责任编辑 方 芳

封面设计 陈益平

结构力学(下册)

周竟欧 朱伯钦 许哲明 主编

同济大学出版社出版

(上海四平路1239号)

新华书店上海发行所发行

江苏启东市印刷三厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 29 字数: 740千字

1994年1月第1版 1994年1月第1次印刷

印数: 1—4000 定价: 13.80元

ISBN 7-5608-1282-1/TU·136

目 录

第九章 位移法	1
§ 9-1 位移法的基本概念	1
§ 9-2 等截面直杆的物理方程	3
§ 9-3 位移法基本未知量数目的确定	8
§ 9-4 位移法典型方程和算例	11
§ 9-5 用位移法分析具有剪力静定杆的刚架	26
§ 9-6 对称性的利用	30
§ 9-7 直接按平衡条件建立位移法方程	33
§ 9-8 用位移法计算结构由于支座位移和温度变化引起的内力	36
§ 9-9 混合法	40
* § 9-10 用位移法分析变截面结构	42
* § 9-11 势能原理与位移法	50
习题	57
部分习题答案	67
第十章 矩阵位移法	70
§ 10-1 概述	70
§ 10-2 单元坐标系中的单元刚度方程和单元刚度矩阵	74
§ 10-3 结构坐标系中的单元刚度方程和单元刚度矩阵	77
§ 10-4 单元刚度矩阵的性质与分块	83
§ 10-5 先处理法	85
§ 10-6 非结点荷载处理	98
§ 10-7 后处理法	104
* § 10-8 用虚功原理推导杆件的刚度矩阵	117
习题	122
部分习题答案	125
第十一章 逐次渐近法和剪力分配法	126
§ 11-1 弯矩分配法的基本概念	126
§ 11-2 用弯矩分配法计算多结点结构	132
§ 11-3 叠代法的基本概念	142
§ 11-4 用叠代法计算简式多层刚架	143
* § 11-5 用叠代法计算复式多层刚架	150
§ 11-6 剪力分配法的基本原理	156
§ 11-7 用剪力分配法计算受水平荷载作用的排架和刚架	160
§ 11-8 考虑结点转动的剪力分配法——D值法	168
习题	173
部分习题答案	179
第十二章 超静定结构的影响线	180
§ 12-1 连续梁的影响线	180

§ 12-2 连续梁的内力包络图.....	191
* § 12-3 平面刚架、交叉梁系的影响线.....	191
§ 12-4 超静定拱的影响线.....	199
§ 12-5 超静定桁架的影响线.....	209
习题.....	213
部分习题答案.....	216
第十三章 结构动力学.....	217
§ 13-1 概述.....	217
§ 13-2 动力自由度.....	218
§ 13-3 单自由度体系的振动方程.....	220
§ 13-4 单自由度体系的自由振动.....	223
§ 13-5 单自由度体系的强迫振动.....	231
* § 13-6 隔振概念.....	244
§ 13-7 多自由度体系的自由振动.....	247
§ 13-8 主振型的正交性.....	267
§ 13-9 多自由度体系的强迫振动.....	269
§ 13-10 频率和振型的近似算法.....	279
* § 13-11 有限元法.....	288
习题.....	293
部分习题答案.....	300
第十四章 结构的弹性稳定.....	304
§ 14-1 结构稳定问题概述.....	304
§ 14-2 有限自由度体系的稳定计算.....	308
§ 14-3 静力法确定弹性压杆的临界荷载.....	315
§ 14-4 能量法确定弹性压杆的临界荷载.....	325
§ 14-5 压杆的刚度方程.....	336
§ 14-6 刚架在平面内的稳定计算.....	346
* § 14-7 弹性支座连续梁及弹性地基梁的受压稳定计算.....	360
* § 14-8 拱和圆环的稳定.....	364
§ 14-9 剪切变形对压杆临界力的影响.....	369
习题.....	372
部分习题答案.....	380
第十五章 结构的极限荷载.....	381
§ 15-1 概述.....	381
§ 15-2 弹塑性弯曲.....	384
§ 15-3 梁的极限荷载.....	387
§ 15-4 比例加载时判定极限荷载的一般定理.....	395
§ 15-5 刚架的极限荷载.....	399
* § 15-6 确定梁和刚架极限荷载的增量变刚度法.....	404
习题.....	414
部分习题答案.....	420
附录 平面刚架静力分析程序.....	422
§ 附-1 概述.....	422

§ 附-2 流程图.....	422
§ 附-3 后处理法平面刚架程序输入、输出和标识符说明.....	422
§ 附-4 后处理法平面刚架静力分析源程序和使用说明.....	428
§ 附-5 平面刚架程序的扩充.....	434
习题.....	454

第九章 位 移 法

§ 9-1 位移法的基本概念

超静定结构分析的基本方法有两种，即力法和位移法。力法发展较早，19世纪末已用于分析连续梁。直到本世纪初，由于钢筋混凝土结构的出现，刚架的应用渐多，这时仍用力法计算工作量太大。于是提出位移法。

不管是力法还是位移法，都必须满足下列条件：

1. 力的平衡；
2. 位移的协调；
3. 力与位移的物理关系。

前一章已介绍了力法。该法的基本指导思想是先割断结构的某些多余约束，以多余约束力作为基本未知量，取静定结构作为基本结构进行计算。计算时，先利用平衡条件算出基本结构的内力，从而算出多余未知力作用点上的位移，这些位移都表示成多余未知力的函数（力与位移的物理关系）。然后利用位移协调条件建立方程，确定出多余未知力。由此，求出整个结构的内力和位移。

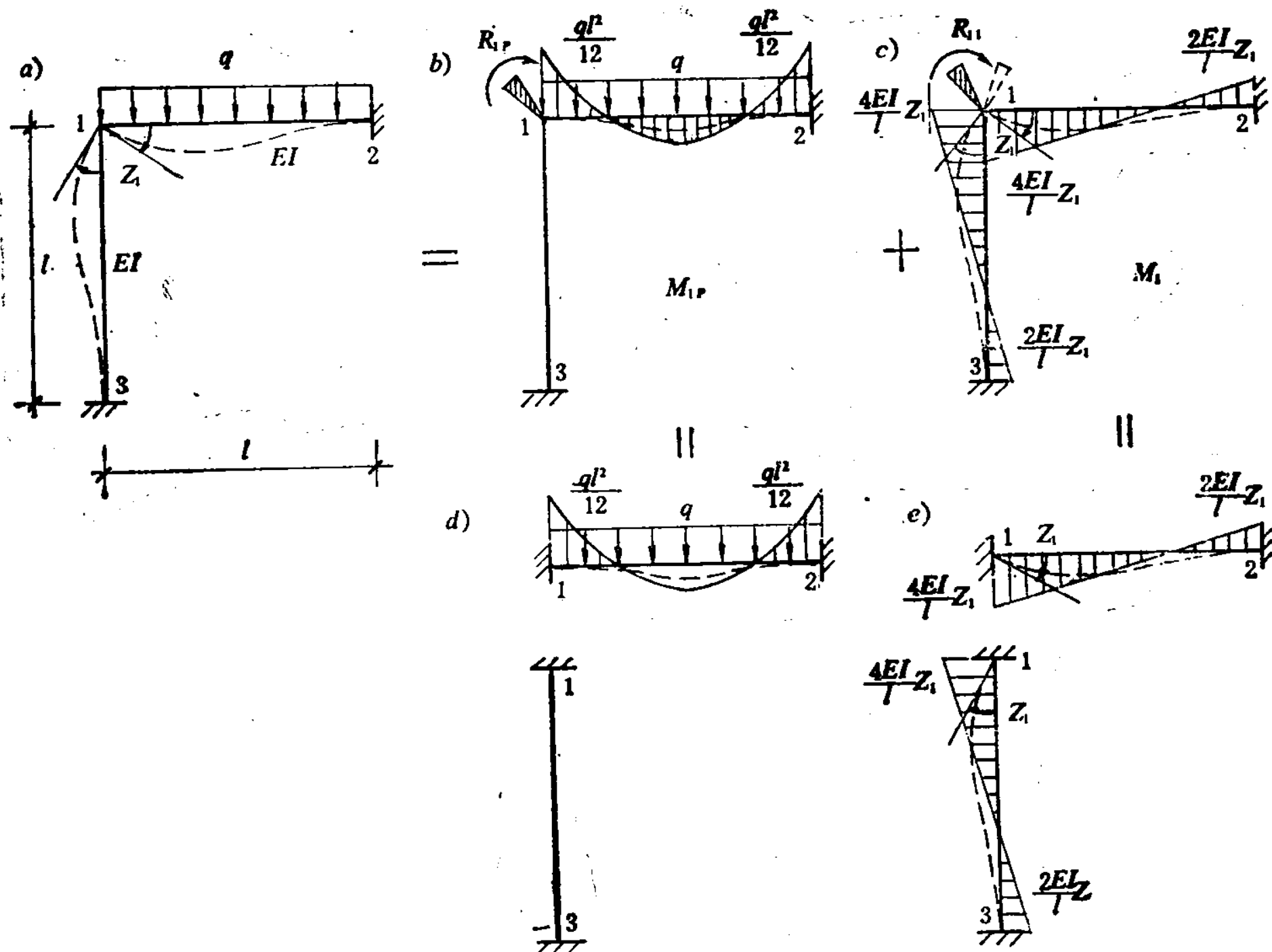


图 9-1

位移法的基本指导思想与力法相反，它是以结构的结点位移(角位移和线位移)作为基本未知量，取单个杆件作为计算的基本结构。先设法确定出单个杆件的杆端内力用杆端位移来表示(即将杆端力表达成杆端位移的函数)，这些杆端位移应与其所在结点的其他杆端位移相协调。而后利用力的平衡条件建立方程，确定出未知位移。由此，求出整个结构的内力。

总之，结构在一定的外因作用下，其内力与位移之间具有一定的函数关系，确定的内力与确定的位移相对应。因此，可以先求内力再求位移，亦可先求位移再求内力。但不论哪一种方法，都是采用“先修改后复原”的方法。即先对给定结构作一些修改，使它变得可以分析，然后设法恢复到原先给定的结构，从而求出内力和位移。

现以一简单例子具体说明位移法的基本原理和计算方法。

图 9-1 a 所示刚架，在荷载作用下产生的变形如图中虚线所示，设结点 1 的转角为 Z_1 ，根据变形协调条件可知，汇交于结点 1 的两杆杆端也应有同样的转角 Z_1 。为了使问题简化，在受弯杆件中，略去杆件的轴向变形和剪切变形的影响，并认为弯曲变形是很小的，因而假定受弯杆两端之间的距离保持不变。由此可知，结点 1 只有转角 Z_1 ，而无线位移，整个刚架的变形只要用未知转角 Z_1 来描述即可。如果能设法求得转角 Z_1 ，即可求出刚架的内力。

为了求出 Z_1 值，可先对原结构 9-1 a 作些修改，设想在结点 1 处装上一个阻止转动的装置“■”，称它为附加刚臂约束，如图 9-1 b 所示。结点 1 装上附加约束后就不能转动了，于是原结构被隔离成如图 9-1 d 所示的两根彼此独立的单跨超静定梁，称它为位移法的基本结构。在荷载作用下，由于附加约束阻止了结点转动，因而在附加约束内必将产生一个约束力矩 R_{1P} 。然后考虑到原结构结点 1 实际上是转动了一个未知的转角 Z_1 ，为了恢复原状，可在图 9-1 c 所示的结点 1 的附加约束上人为地加上一个外力矩 R_{11} ，迫使结点 1 正好转动了一个转角 Z_1 ，于是变形复原到原先给定的结构。

将上述“先固定后复原”两个步骤的结果相叠加(图 9-1 b 和图 9-1 c 的结果相叠加)，即等于原结构(图 9-1 a)的结果。应注意到原结构的结点 1 上并没有附加约束，因而不存在约束力矩(即原结构上的约束力矩应等于零)。于是得到

$$R_{1P} + R_{11} = 0 \quad (a)$$

为了确定上式中的 R_{1P} 和 R_{11} ，可先用力法分别求出单跨超静定梁(即基本结构)在外荷载作用下以及梁端 1 处转动 Z_1 时产生的弯矩图，分别示于图 9-1 d 和图 9-1 e 中。将图 9-1 d 和 9-1 e 所示的单跨梁弯矩图通过结点 1 拼起来即分别成为 9-1 b 和 9-1 c 所示的弯矩图，并分别记作 M_{1P} 和 M_{11} 。现取图 9-2 a、b 所示的结点 1 隔离体，由力矩平衡方程 $\sum M = 0$ ，即可分别

$$Z_1 = \frac{ql^3}{96EI}$$

求出 $R_{1P} = -\frac{1}{12}ql^2$ ， $R_{11} = 8\frac{EI}{l}Z_1$ 。将这些结果代入方程(a)中，即得

$$\frac{8EI}{l}Z_1 - \frac{1}{12}ql^2 = 0 \quad (b)$$

上式称为位移法方程。其中 $\frac{8EI}{l}$ 称为刚度系数，它表示结点的转角 $Z_1 = 1$ 时附加约束上所需的力矩； $\frac{1}{12}ql^2$ 称为自由项，它表示当结点固定时荷载作用下在附加约束上所产生的力矩。

解方程(b)，得

最后，根据叠加原理 $M = M_P + M_1$ ，即可求出最后弯矩图，如图 9-3 所示。

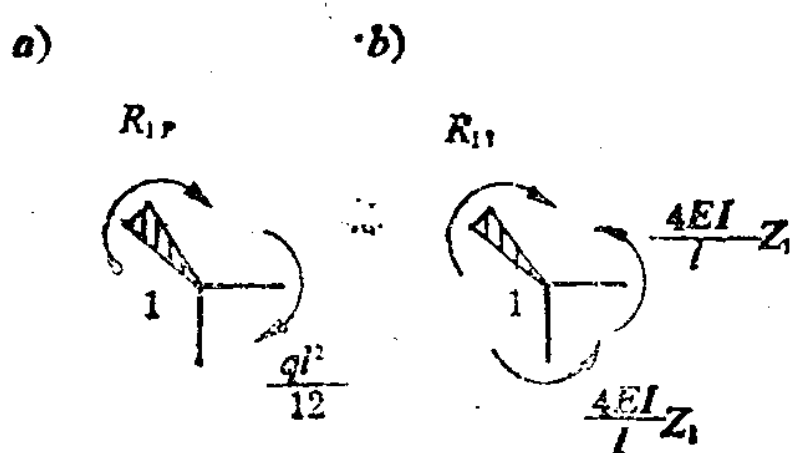


图9-2

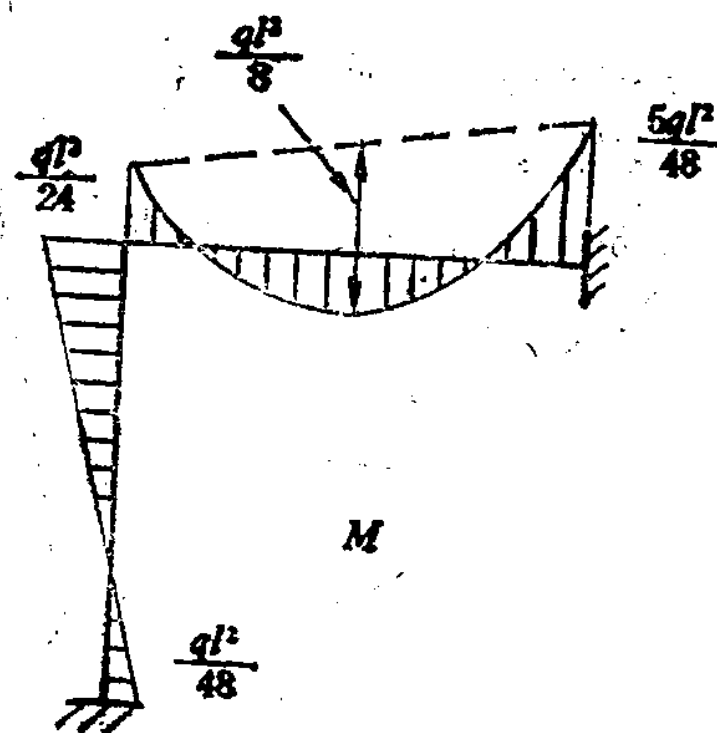


图9-3

综上所述，位移法的基本思路是“先固定后复原”。“先固定”是指在原结构产生位移的结点上设置附加约束，使结点固定，从而得到基本结构，然后加上原有的外荷载；“后复原”是指人为地迫使原先被“固定”的结点恢复到结构原有的位移。通过上述两个步骤，使基本结构与原结构的受力和变形完全相同，从而可以通过基本结构来计算原结构的内力和变形。

通过上例可以看出，用上述方法计算结构内力，应分别解决以下几个问题：

1. 预先算出各类超静定单杆在杆端位移以及荷载作用下的内力，并制成表格便于查用。
2. 以结构的哪些结点位移作为基本未知量，从而在欲求结点位移处设置附加约束，以形成基本结构。

3. 如何建立位移法方程，从而求出基本未知量。

下面依次介绍这些问题。

§9-2 等截面直杆的物理方程

在上一节讨论中，可知位移法是以单个超静定杆作为计算基础的。为此，本节将介绍四种等截面直杆的杆端内力和杆端位移之间的物理关系。

一、两端固定(或刚接)等截面直杆的物理方程

图 9-4 为等截面直杆 AB ，其两端固定(或刚接)，杆长 l 。 $A'B'$ 表示杆件 AB 的杆端发生变形后的位置。其中 θ_A 和 θ_B 分别表示 A 端和 B 端的转角，其转向以顺时针向为正。 Δ_A 和 Δ_B 分别表示 A 、 B 两端沿杆轴垂直方向的线位移，其方向以绕另一端顺时针向转动为正；

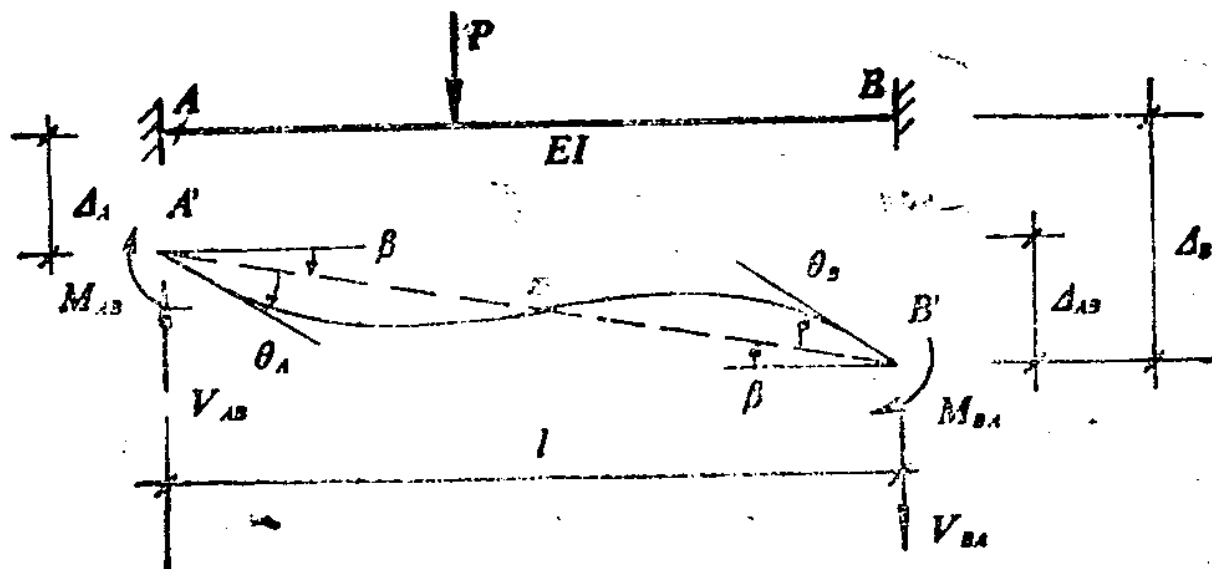


图9-4

Δ_{AB} 表示 A, B 两端的相对线位移, $\beta = \frac{\Delta_{AB}}{l}$ 表示直线 $A'B'$ 与 AB 的平行线的交角, 称它为弦转角, 并规定以顺时针向转动为正。杆端弯矩以顺时针向转动为正; 杆端剪力的符号规定和以前的相同。

上述等截面杆在支座转角 θ_A, θ_B 、相对线位移 Δ_{AB} 和荷载的共同作用下, 其杆端内力(或反力)可根据力法求得:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 4i\theta_A + 2i\theta_B - 6i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= 2i\theta_A + 4i\theta_B - 6i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{BA}^F \\ V_{AB} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + V_{AB}^F \\ V_{BA} &= -\frac{6i}{l}\theta_A - \frac{6i}{l}\theta_B + \frac{12i}{l}\cdot\frac{\Delta_{AB}}{l} + V_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (9-1)$$

式中 $i = \frac{EI}{l}$ 称为线刚度。 M_{AB}^F, M_{BA}^F 表示杆端固定无任何位移时由于荷载作用下所产生的杆端弯矩, 通常称它为固端弯矩, 其方向以顺时针向转动为正; V_{AB}^F 和 V_{BA}^F 表示相应的杆端剪力, 称它为固端剪力, 其正负的规定和以前相同。

二、一端固定一端铰支承等截面直杆的物理方程

图 9-5 为一端固定一端铰接的等截面直杆, 在支座转角 θ_A 、相对线位移 Δ_{AB} 和荷载的共同作用下, 其杆端内力可根据力法求得:

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= 3i\theta_A - 3i\frac{\Delta_{AB}}{l} + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= M_{BA}^F \\ V_{AB} &= -\frac{3i}{l}\theta_A + \frac{3i}{l}\frac{\Delta_{AB}}{l} + V_{AB}^F \\ V_{BA} &= -\frac{3i}{l}\theta_A + \frac{3i}{l}\frac{\Delta_{AB}}{l} + V_{BA}^F \end{aligned} \right\} \quad (9-2)$$

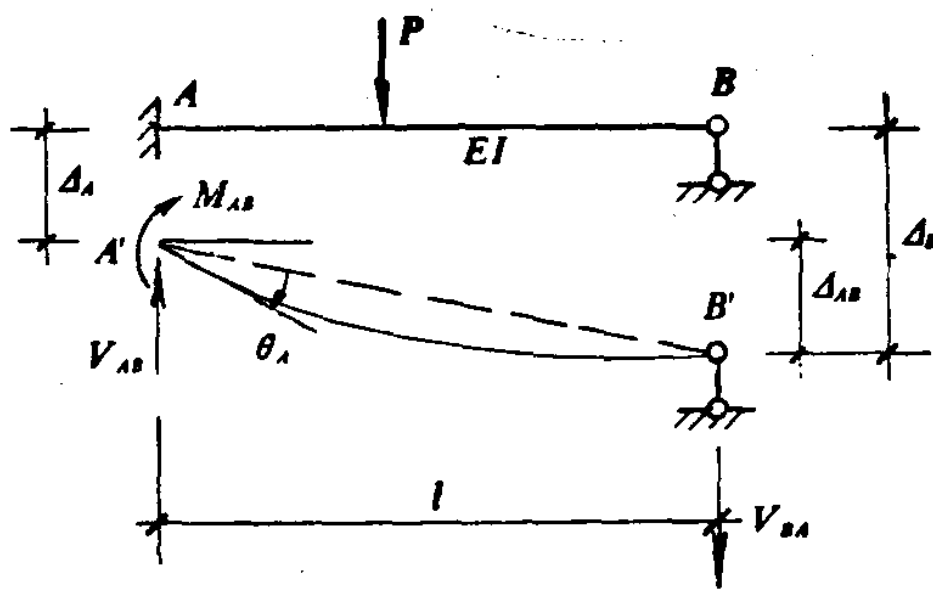


图 9-5

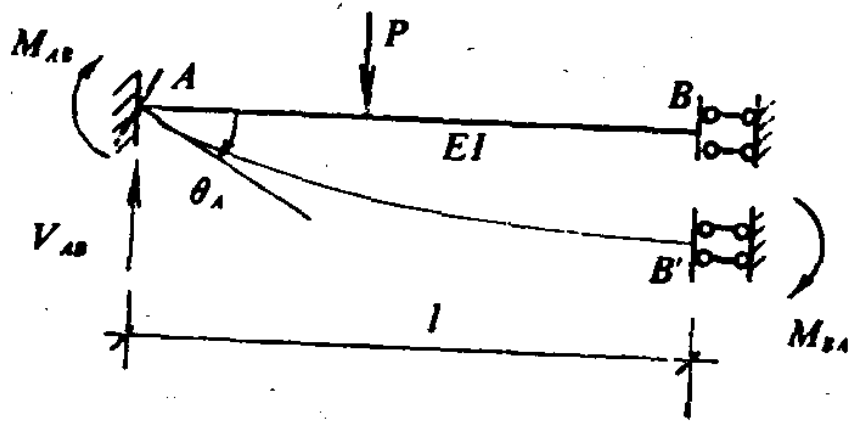


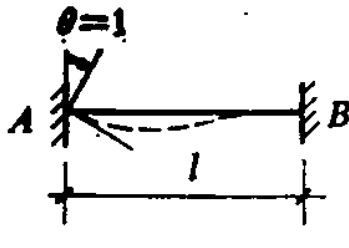
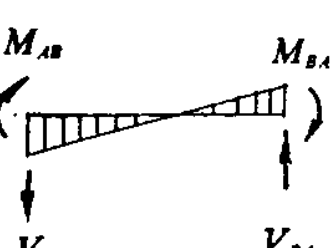
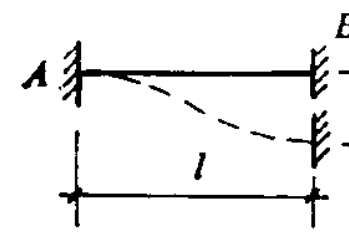
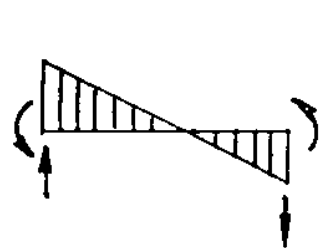
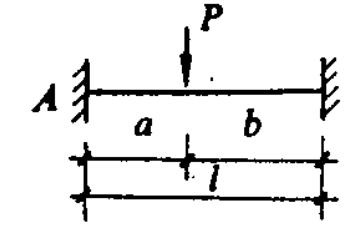
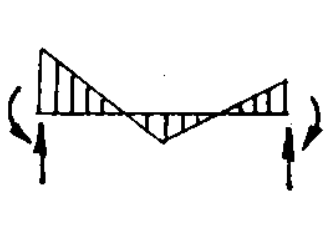
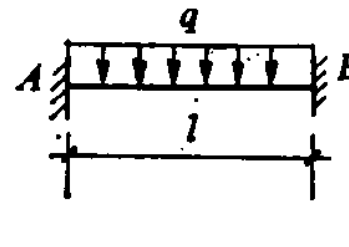
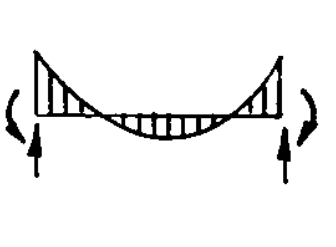
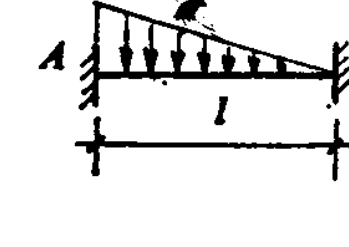
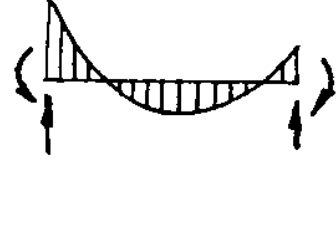
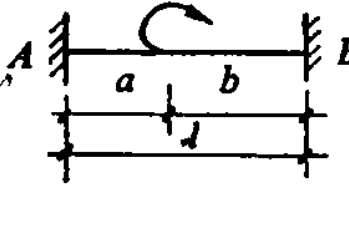
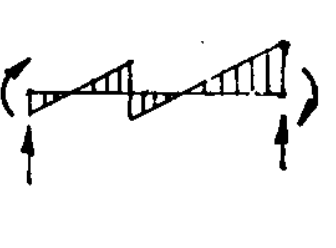
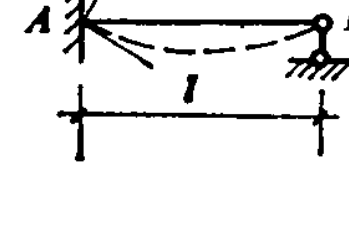
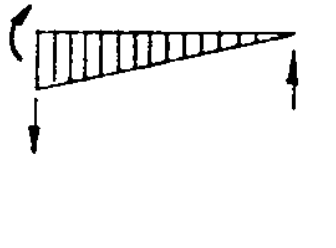
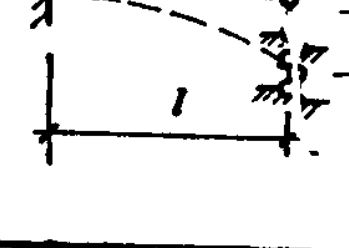
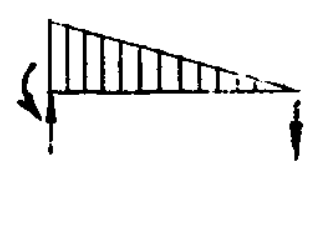
图 9-6

三、一端固定一端为定向支承的等截面直杆的物理方程

图 9-6 为一端固定一端为定向支承的等截面直杆，在支座转角 θ_A 和荷载共同作用下，其杆端内力可由力法求得：

等截面单跨超静定梁的杆端弯矩和剪力

表 9-1

编 号	梁的简图	弯矩图	杆端弯矩值		杆端剪力值	
			M_{AB}	M_{BA}	V_{AB}	V_{BA}
1			$\frac{4EI}{l} = 4i$	$\frac{2EI}{l} = 2i$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$
2			$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$-\frac{6EI}{l^2} = -6\frac{i}{l}$	$12\frac{EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$	$12\frac{EI}{l^3} = 12\frac{i}{l^2}$
3			$-\frac{Pab^2}{l^2}$ $-\frac{Pl}{8} (a=b=\frac{l}{2})$	$\frac{Pa^2b}{l^2}$ $-\frac{Pl}{8}$	$\frac{pb^2(l+2a)}{l^2}$ $\frac{p}{2}$	$-\frac{pa^2(l+2b)}{l^2}$ $-\frac{p}{2}$
4			$-\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{12}ql^2$	$\frac{1}{2}ql$	$-\frac{1}{2}ql$
5			$-\frac{1}{20}ql^2$	$\frac{1}{30}ql^2$	$\frac{7}{20}ql$	$-\frac{3}{20}ql$
6			$\frac{b(3a-l)}{l^2}M$	$\frac{a(3b-l)}{l^2}M$	$-\frac{6ab}{l^2}M$	$-\frac{6ab}{l^2}M$
7			$\frac{3EI}{l} = 3i$	0	$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$	$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$
8			$-\frac{3EI}{l^2} = -3\frac{i}{l}$	0	$\frac{3EI}{l^2} = 3\frac{i}{l^2}$	$\frac{3EI}{l^2} = 3\frac{i}{l^2}$

续上表 2-1

自 号	梁的简图	弯矩图	杆端弯矩值		杆端剪力值	
			M_{AB}	M_{BA}	V_{AS}	V_{BS}
9			$-\frac{Pb(l+b)}{2l^2}$ $-\frac{3}{16}P\left(a=b=\frac{l}{2}\right)$	0	$\frac{P(l^2-b^2)}{2l^2}$ $-\frac{11}{16}P$	$-\frac{Pb(l+b)}{2l^2}$ $-\frac{5}{16}P$
10			$-\frac{1}{8}ql^2$	0	$\frac{5}{8}ql$	$-\frac{3}{8}ql$
11			$-\frac{1}{15}ql^2$	0	$\frac{4}{10}ql$	$-\frac{1}{10}ql$
12			$-\frac{7}{120}ql^2$	0	$\frac{9}{40}ql$	$-\frac{11}{40}ql$
13			$\frac{P-3b^2}{2l^2}M$	0	$-\frac{3(P-b^2)}{2l^2}M$	$-\frac{3(P-b^2)}{2l^2}M$
14			$\frac{EI}{l}=i$	$-\frac{EI}{l}=-i$	0	0

续上表 9-1

编 号	梁的简图	弯矩图	杆端弯矩值		杆端剪力值	
			M_{AB}	M_{BA}	V_{AB}	V_{BA}
15			$-\frac{Pl^2(l+b)}{2l}$ $-\frac{3Pl}{4}$	$-\frac{Pl^2}{2l}$ $-\frac{Pl}{6}$	P	0
16			$-\frac{Pl}{2}$	$-\frac{Pl}{2}$	P	P
17			$-\frac{1}{3}ql^2$	$-\frac{1}{6}ql^2$	ql	0
18			$N_{AB} = -\frac{EA}{l}$	$N_{BA} = -\frac{EA}{l}$		

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= i\theta_A + M_{AB}^F \\ M_{BA} &= -i\theta_A + M_{BA}^F \\ V_{AB} &= V_{AB}^F \\ V_{BA} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9-3)$$

四、两端铰支承的等截面直杆的物理方程

图 9-7 为两端铰支承的等截面直杆，在支座两端沿轴向产生相对位移 Δ_{AB} 时，其杆端轴力

为

$$\left. \begin{aligned} N_{AB} &= -\frac{EA}{l} \Delta_{AB} \\ N_{BA} &= \frac{EA}{l} \Delta_{AB} \end{aligned} \right\} \quad (9-4)$$

式中 A 为杆件的截面面积。

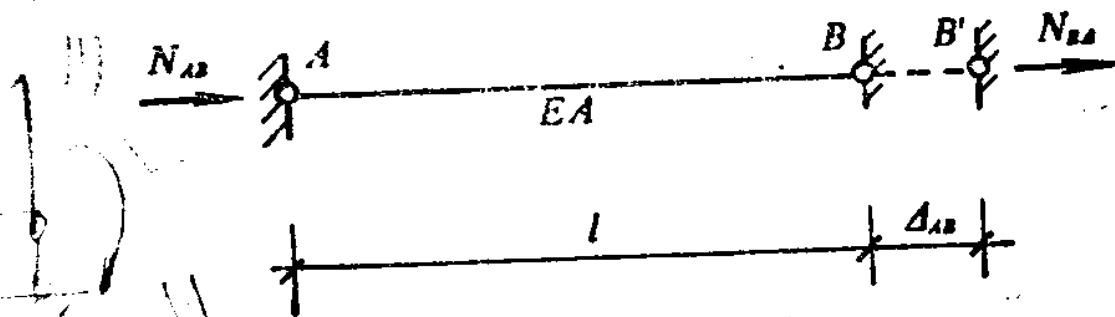


图 9-7

现将以上四种等截面直杆在外荷载、支座转动 $\theta_A = 1$ 和相对线位移 $\Delta_{AB} = 1$ 单独作用下的杆端内力列于表 9-1 中，以备查用。

§ 9-3 位移法基本未知量数目的确定

从前面的分析,已经知道位移法是把结构的结点角位移和线位移作为基本未知量。因为这些基本未知量被确定之后,便可求出结构上的每一根杆件的杆端内力。如何确定角位移和线位移的数目,现在分述如下。

一、角位移数的确定

角位移的数目是比较容易确定的。角位移的数目等于刚性结点的数目。所谓刚性结点是指由两根或两根以上的杆件刚性连接起来的结点。如图 9-8a 所示结构,结点 D 、 E 和 H 都是刚性结点,它们具有独立的角位移;结点 B 为铰结点, BD 杆和 BA 杆的 B 端虽然也有各自不同的角位移,但按公式(9-2)计算含有铰结端的杆端内力时,并不包含铰结点的角位移。因此,铰结点的角位移可不作为未知数。于是,图 9-8a 所示的结构具有三个独立的角位移数。

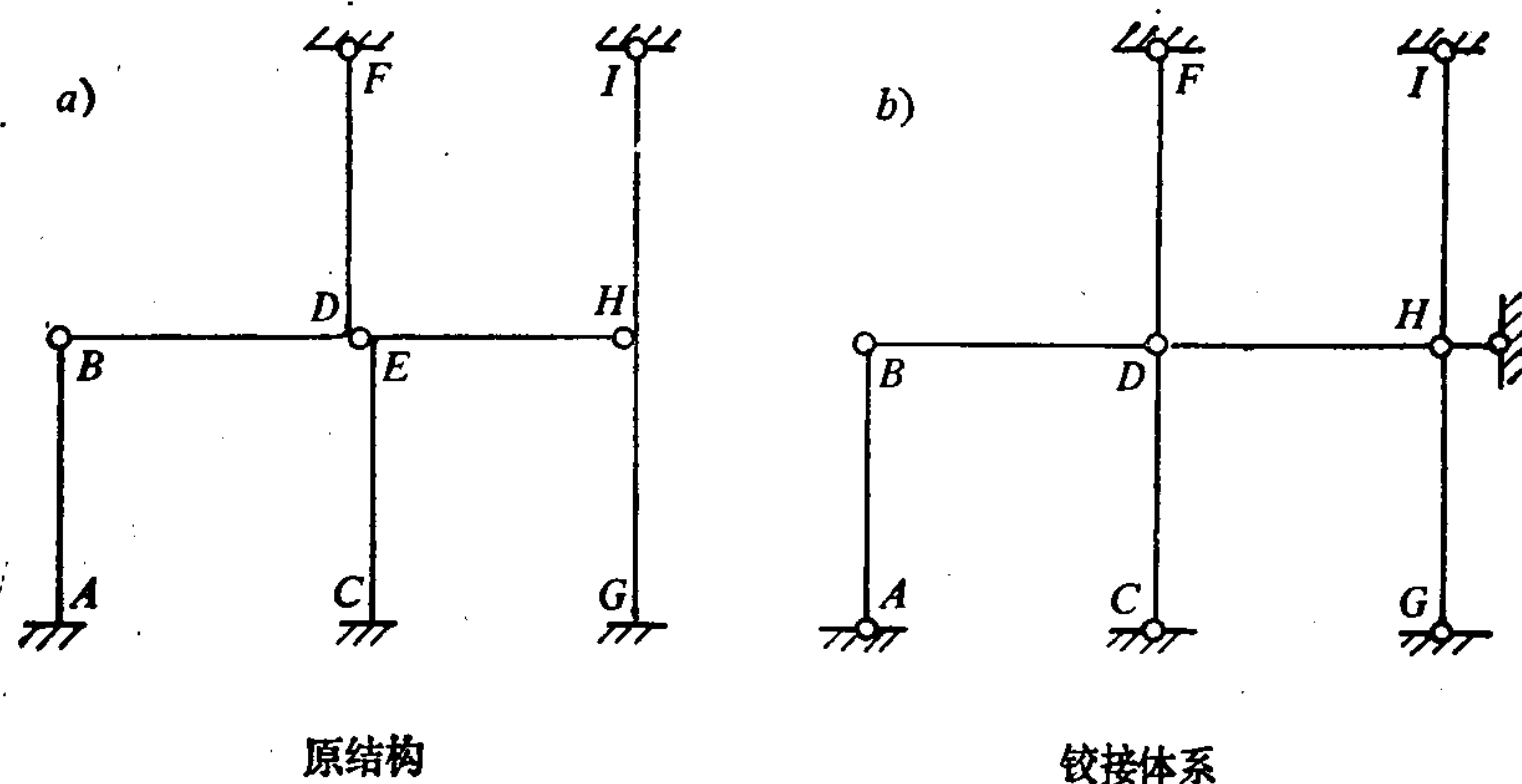


图9-8

二、线位移数的确定

为了简化计算,在确定结点线位移的数目时,略去受弯直杆的轴向变形,并且假设弯曲变形是微小的,以致认为直杆在受弯前与受弯后,其投影长度保持不变。由此,图 9-8a 所示的结构,四个结点(结点 B 、 D 、 E 和 H)只有水平线位移,而且是相等的。因而,只有一个独立的线位移。

由于在确定结点线位移数目的过程中,不计及杆件的轴向变形和弯曲变形,因此在计算结点线位移的数目时,可以先把所有的刚性结点和固定支座全部改成铰接,使结构变成一个铰接体系。然后分析该铰接体系的几何组成,如果它是几何不变的,说明结构无结点线位移;相反,如果铰接体系是几何可变的,再看最少需要增设几根附加支杆才能确保体系成为几何不变。(或者说使铰接体系上每个结点成为不动点),所增设附加支杆的数目即为结构独立的结点线位移数。如图 9-8a 所示的结构,把其所有的刚性结点和固定支座改成铰接后,则变为如图 9-8b 所示的铰接体系。由几何组成分析可知,该体系是几何可变的,至少需要在铰结点 H 处加一水平支杆,才能使体系成为几何不变,由此判定原结构只有一个独立的结点线位移。

结构基本未知量的总数等于结点的角位移数和线位移数之和。如图 9-8a 所示结构有三个结点角位移和一个结点线位移,总共有四个位移基本未知量。

图9-9a所示的刚架有 B 、 C 、 D 和 G 四个刚性结点，即有四个角位移。图 9-9 b 为原刚架相应的铰接体系，按几何组成分析，至少要在结点 B 和 G 处加上两根水平支杆后，方可使该体系成为几何不变。所以，原结构有两个线位移。总共有六个位移基本未知量。

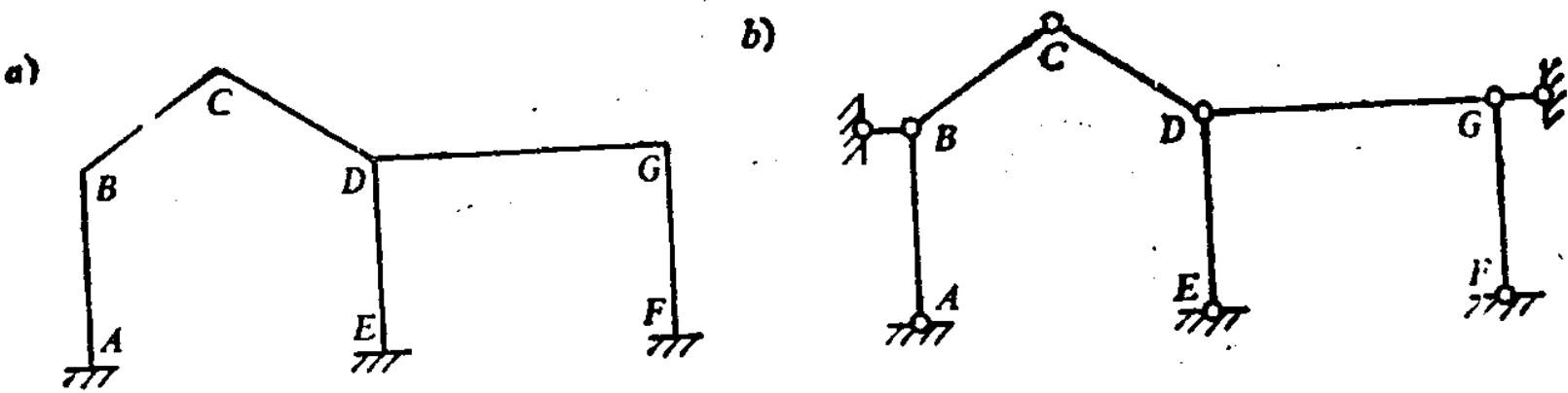


图9-9

图 9-10 a 所示刚架有两个角位移，其相应的铰接体系如图 9-10 b 所示，需要在结点 F 和 H 处增设两根支杆后，体系才成为几何不变，所以原刚架有两个线位移。

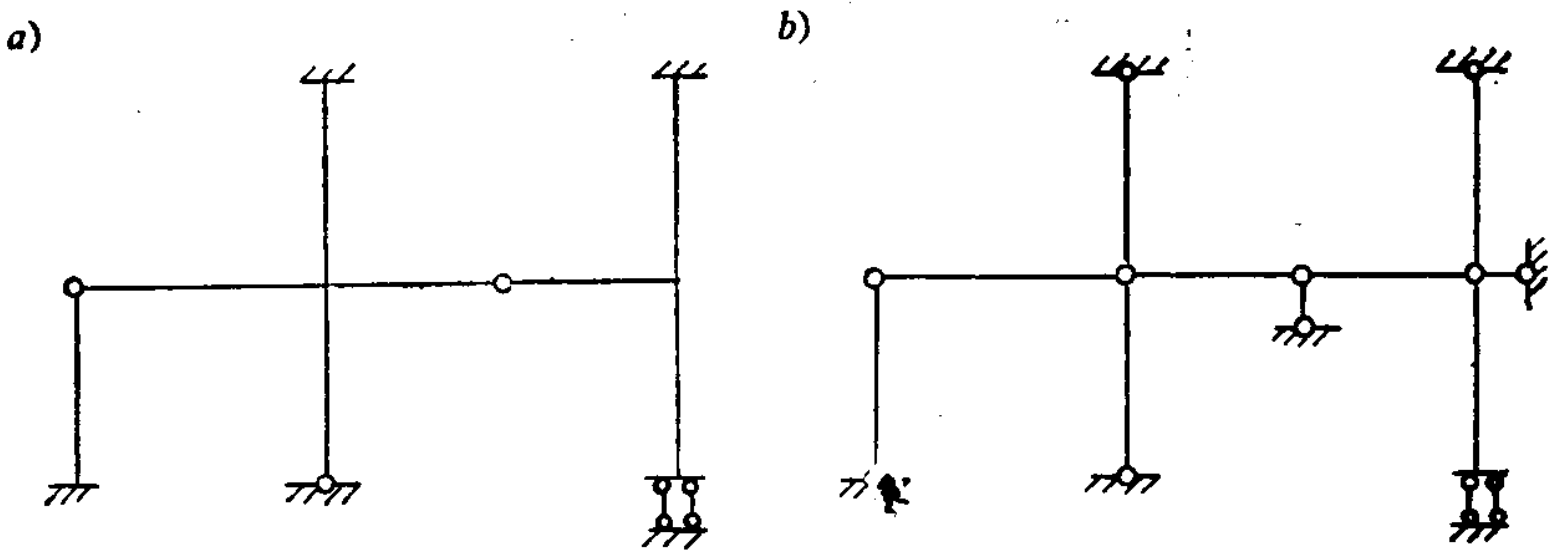


图9-10

图 9-11 a 所示刚架，横梁 EH 具有无限刚性，在外力作用下只能平移而无转动，所以结点 E 和 H 只作水平移动而转角为零。这样，刚架只有结点 D 和结点 G (因柱 FH 的上段和下段的刚度不同，因而把 G 视为结点) 两个未知角位移。刚架的铰接体系如图 9-11 b 所示，需要在结点 G 、 H 和 D 处各加上一水平支杆，即可成为几何不变体系。所以原刚架有三个线位移。

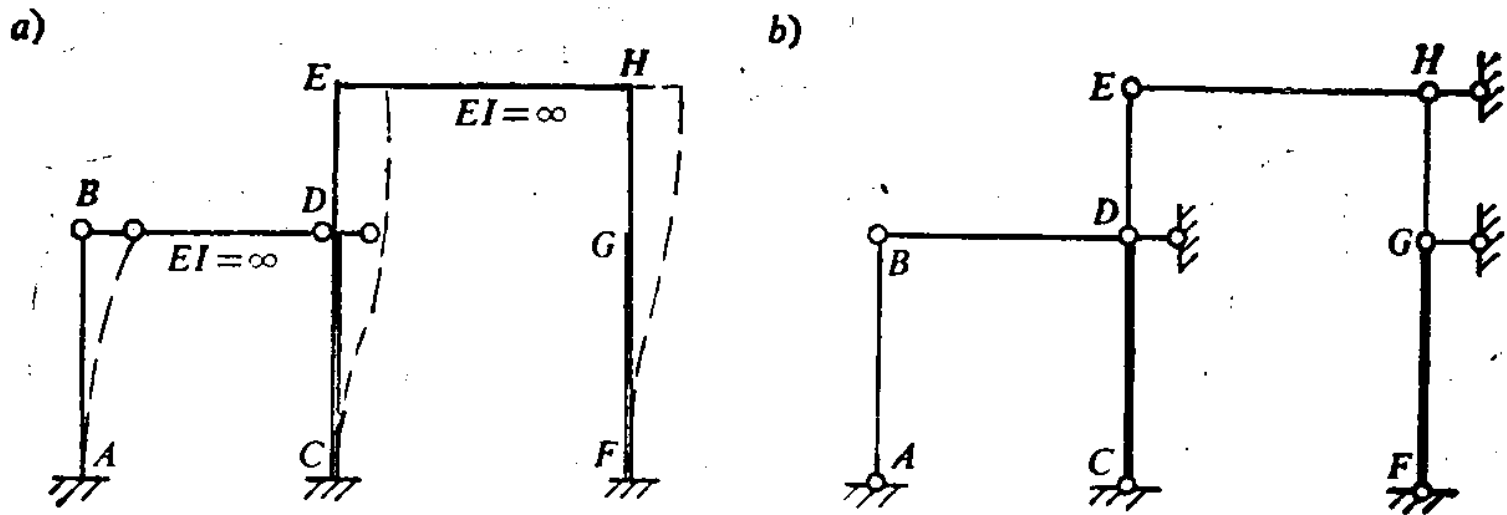


图9-11

图 9-12 a 所示刚架具有阴影部分的刚度为无限刚性，它只能平动而不能转动，故结点 E 、 F 和 H 的角位移均为零，于是刚架只有 B 、 C 两个刚结点的角位移。图 9-12 b 为刚架的铰接体系，只要在结点 B 处加上一支杆，体系即成为几何不变。所以原刚架只有一个线位移。

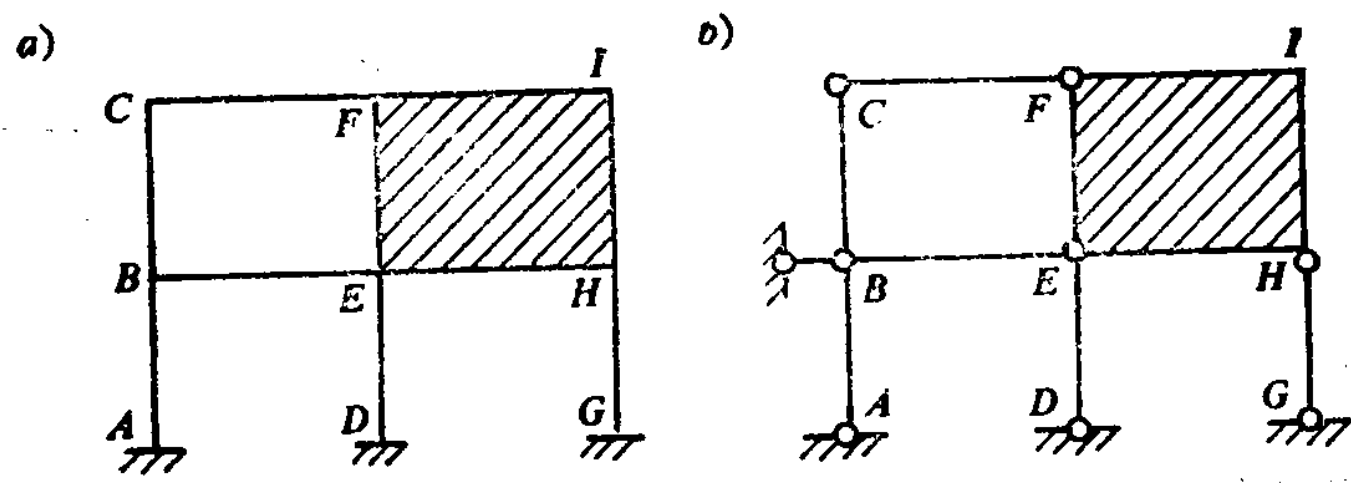


图9-12

应当指示，上述确定结点线位移数目的方法，是不考虑受弯直杆的轴向变形为前提的。对于两力杆(即链杆)必须考虑轴向变形。因此，当确定图 9-13 a 所示刚架的线位移数目时，在其相应的铰接体系(图 9-13 b)上， DF 和 GH 为两力杆，因而要加上三根支杆后，才能使每个结点成为不动点(即几何不变)。所以原刚架具有三个线位移。

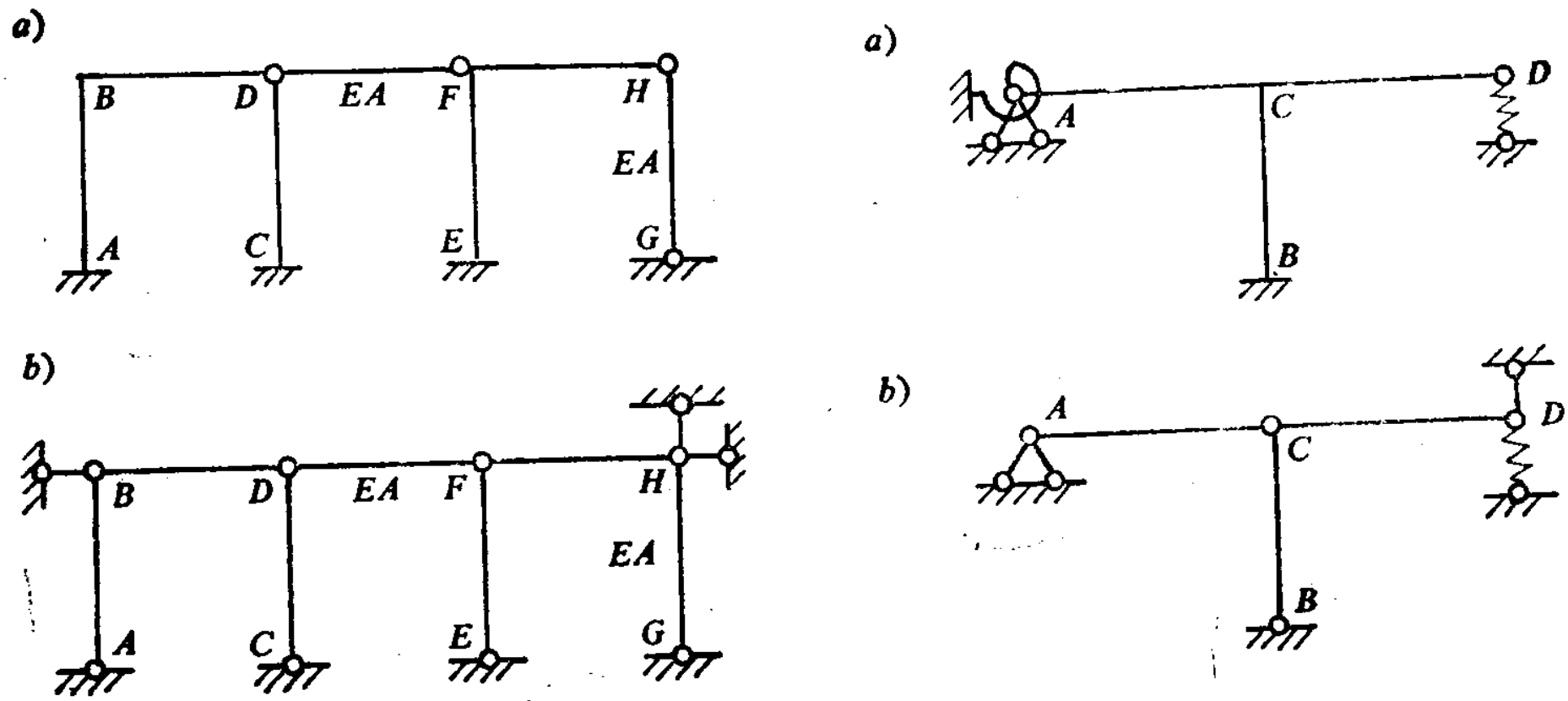


图9-13

在刚架中，如果具有弹簧支承，确定位移未知量数目时，须要计及弹簧支承的位移。如图 9-14 a 所示刚架，支座 A 为铰弹簧、支座 D 为线弹簧，在外力作用下，铰弹簧要发生转动，是一个未知的角位移。因此，原刚架共有两个角位移。图 9-14 b 为刚架的铰接体系，须要在 D 处加上一支杆，才能使每个结点成为不动点。所以刚架只有一个线位移。

对于桁架结构而言，每个结点具有两个线位移，每一支杆为一个约束，相当于减少一个位移。若以 j 表示桁架的结点数，以 S 表示支杆数，于是在考虑杆件轴向变形的情况下，桁架的结点位移总数为

$$n = 2j - S$$

如图 9-15 所示桁架， $j = 5$ ， $S = 4$ ，由此 $n = 2 \times 5 - 4 = 6$ 。该桁架共有六个位移未知量。