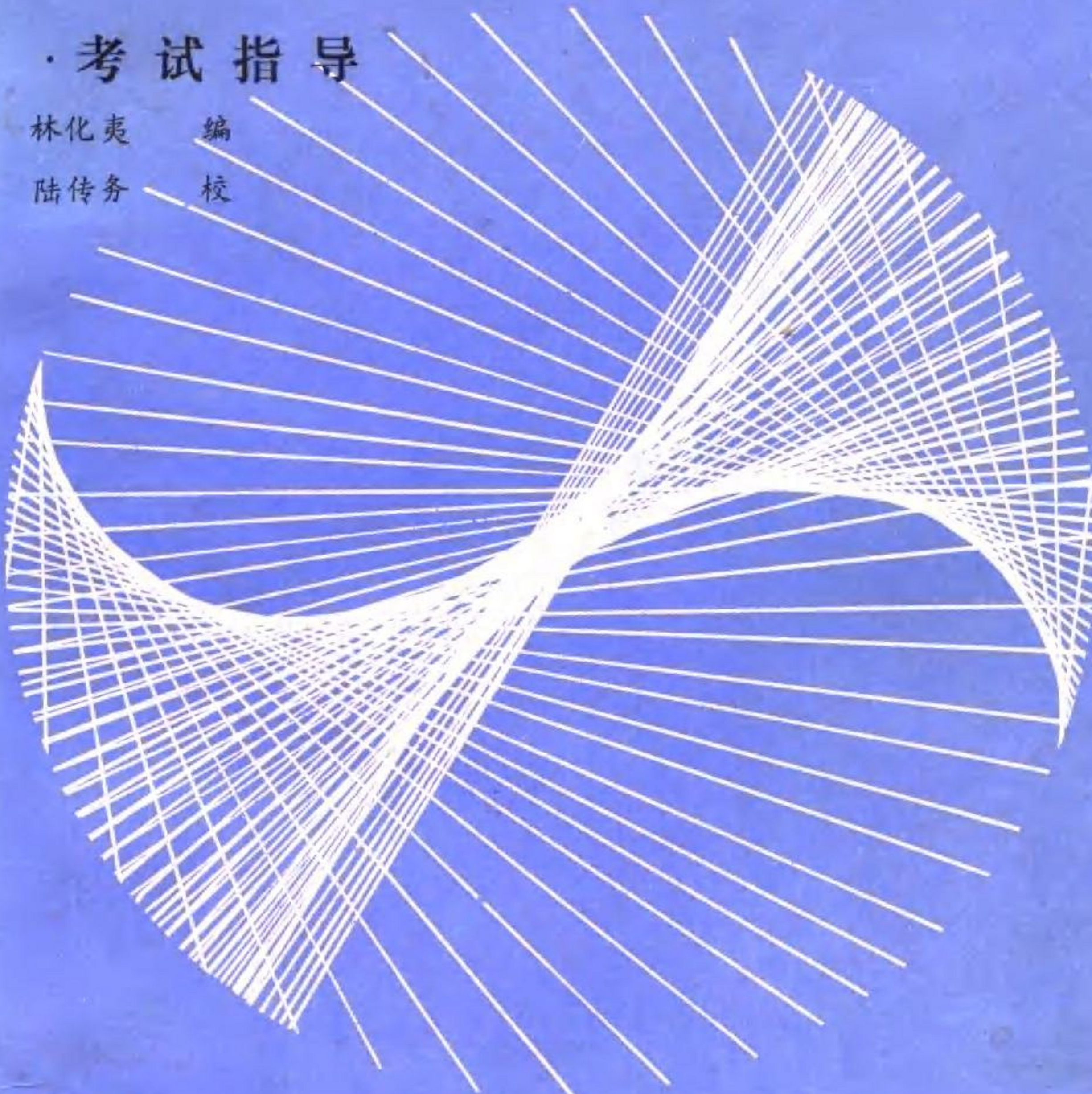
工程数学概要

·考试指导

林化夷　编
陆传务　校



華中工學院出版社

内 容 提 要

本书是根据全国工科院校工程数学现行大纲的要求编写而成的，是工科院校各专业复习工程数学的一本指导书，对于职业大学、函授大学、电大工科各专业的学生也可参考．

全书共分六章：第一章场的数学理论；第二章复变函数论；第三章数学物理方程与积分变换；第四章特殊函数；第五章线性代数；第六章概率论与数理统计．每章的基本概念、基本理论与基本方法均有提要，并且在每章都选取了大量的典型例题与习题．这些例题与习题除了满足各章的内容的基本要求外，还在理论、运算与综合应用上有所加深加宽，因此本书对于准备报考硕士研究生的读者来说也是很有益的．

工 程 数 学 概 要

林化夷　编　陆传务　校

责任编辑　李立鹏

*

华中工学院出版社出版

（武昌喻家山）

新华书店湖北发行所发行

华中工学院出版社沔阳印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/16　印张：22.25　字数：596，000

1986年2月第1版　　1986年2月第1次印刷

印数：1—5，000

统一书号：13255—037　定价：4.55元

前　言

工程数学的内容涉及许多数学分支，它究竟包含哪些内容？迄至今天，尚无明确回答，随着工农业生产和科学试验的蓬勃发展，特别是计算机学科与应用科学的发展，工程数学的内容正在日益增多和加深。按理说，运筹学、计算方法、泛函拓扑等，都应纳入工程数学教学大纲之中。可是，由于工科各专业教学学时的限制，而未能列入现行工程数学教学大纲之内，编者为了帮助读者复习工程数学教学大纲中涉及的内容，拟订出版这本书。

本书以简洁的形式系统地概述了工程数学课程的全部内容，并且在理论上以及综合运用上有所加深和加宽．因而本书对于将要报考硕士研究生的读者来说也是适用的。为了便于自学，对于内容的难点，力求陈述明了易懂，同时，又保持着严谨与正确的可接受的标准。

全书共有六章，可将这六章分成四块：第一章场的数学理论和复变函数论为第一块；第三章数学物理方程与积分变换和第四章特殊函数为第二块；第五章线性代数为第三块；第六章概率论与数理统计为第四块。这四块虽然有某些联系，但是也有相对的独立性，如若读者为了专业的需要，可以单独的阅读某一块或某些块，而不至产生很大困难。

每一章各节的“内容提要”是为了使读者明确该章中的基本概念、基本理论和基本方法．随后的范例是为了进一步阐明这些基本内容，和灵活运用这些基本内容而选取的．这些范例还有一个很重要的作用是扩大知识面，提高分析问题与解决问题的能力．为了加深和巩固所学到的知识，在本书的每一节后面，均附有习题，又在每一章后面附有“习题提示与答案”，目的是为了帮助读者克服在解题过程中的困难，而不是为了某某读者好逸之需。

由于编者水平有限，加之本书编写时间较紧，因此，书中考虑不周，乃至鱼鲁之误，自属难免，敬请读者惠予指正。

编　者

一九八五年元月于武汉

目　录

第一章　场的数学理论

第二章　复变函数论

第三章 数学物理方程与积分变换

第四章 特殊函数

第五章 线性代数

第六章 概率论与数理统计

第一章　场的数学理论

在物理学中知道：发生物理现象的全部空间或部分空间叫做场，例如引力场、静电场、温度场等．本章是从量的方面来研究场的数学理论。

在数学中，场是用定义在某区域上的数值函数与矢值函数来描述的。场的基本概念可分为三组：三个由微分运算决定的量，即**梯度**、**散度**、**旋度**，它们刻划了**数量场**与**矢量场**的局部性质；两个由积分运算决定的量，即**环量**与**流量**，它们刻划了矢量场在较大范围内的性态；两个基本公式，即Gauss公式与Stokes公式，则沟通了上述两组概念，揭示了这两组概念之间的内在联系。

§1　数量场与矢量场

1.1.1　场的概念

如果在全部空间或部分空间中的每一点，都对应着某个物理量一个确定的值，就说在这空间里确定了该物理量的场．如果这物理量是数量，就称这个场为**数量场**；如果是矢量，就称这个场为**矢量场**，如果场中的物理量在各点的对应值不随时间而变化，就说该场是**稳定场**；否则，叫做不稳定场。

由上可知，稳定的数量场在数学上可用一个数量点函数$u=u(M)$表示，而稳定的矢量场则可用矢量点函数$\mathbf{A}=\mathbf{A}(M)$表示．函数$u(M)$或$\mathbf{A}(M)$表示场中物理量u或$\mathbf{A}$在空间的分布状况．如果选取直角坐标，那么$u(M)$，$\mathbf{A}(M)$都是x,y,z的三元函数。

1.1.2　场的几何表示

1.数量场的等值面

在数量场中，为了直观地研究物理量u在场中的分布状况，常常需要考察$u(x,y,z)$有相同数值的各点：

$$u(x,y,z)=c \qquad (c\text{为常数}) \tag{$\cdot$}$$

这个方程，一般在几何上表示一张曲面。称这张曲面为数量场的**等值面**。

2.矢量场的矢量线

在矢量场中，为了直观地表示物理量$\mathbf{A}$在场中的分布状况，引入了矢量线的概念。所谓**矢量线**，乃是这样的曲线，在它上面每一点处的切矢量与矢量场在该点的矢量$\mathbf{A}$平行。

设$M(x,y,z)$为矢量线上任一点，其矢径为

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

则微分

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$$

是矢量线在点M处的切矢量，按矢量线的定义可知，它必定与矢量场在点M的矢量

$$\mathbf{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

平行。因此有

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R} \qquad (\cdot,\cdot)$$

这就是矢量线应满足的微分方程组。

【例　题】

例1 设点电荷q位于坐标原点，则在其周围空间任一点$M(x,y,z)$处所产生的电 位 与电场强度分别为：

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon r}, \qquad \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^2}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

其中ε为介电系数，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$为$M$的矢径.$r=|\boldsymbol{r}|$.求电位$u$的等位面以及电场强度$\boldsymbol{E}$的电力线。

解（1）先求u的等位面（即等值面）。由等值面的定义，有

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=c \qquad (c\text{为常数})$$

简化后，得

$$x^2+y^2+z^2=\rho^2\text{，这里}\rho=\frac{q}{4\pi\varepsilon c}.$$

这就是电位u的等位面方程。其图形是一族以坐标原点为球心的球面.它充满静电场所在的空间。

（2）其次求$\boldsymbol{E}$的电力线（即矢量线）。由矢量线的定义，可知电场强度

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$$

的矢量线应满足微分方程组$(\cdot,\cdot)$

$$\frac{dx}{\frac{qx}{4\pi\varepsilon r^3}}=\frac{dy}{\frac{qy}{4\pi\varepsilon r^3}}=\frac{dz}{\frac{qz}{4\pi\varepsilon r^3}},$$

从而有

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y},\quad \frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

解之得 $\begin{cases} y=c_1x; \\ z=c_2y, \end{cases}$ $\quad (c_1,c_2$是任意常数)。

这就是电场强度$\boldsymbol{E}$的电力线方程。其图形是一族由坐标原点出发的射线。

例2 求流体速度场$\boldsymbol{v}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}$经过点$M(1,2,3)$的流线方程。

解 流线的微分方程组为

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{2z}.$$

解之得

$$\begin{cases} y=c_1x; \\ z=c_2x^2. \end{cases}$$

由于流线过点$M(1,2,3)$.因此 $c_1=2$, $c_2=3$. 故有

$$\begin{cases} y=2x; \\ z=3x^2. \end{cases}$$

这就是所要求的流线方程。

例3 求温度场$u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$的等温面。

解 等温面的方程(*)应为

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=c, \quad \text{其中}(x,y)\neq(0,0).$$

即

$$z^2=(x^2+y^2)\sin c \quad (c\text{为任一常数}).$$

它是顶点在坐标原点的一族圆锥面（但不包括原点）.

【习　题】

1.试绘下列各等值面$u(x,y,z)=c$的草图:

(1) $u(x,y,z)=2x-4y+z$; $c=-1$.　　(2) $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$; $c=2$.

(3) $u(x,y,z)=4x^2+4y^2+z^2$; $c=1$.　　(4) $u(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$; $c=0$.

(5) $u(x,y,z)=z-1-x^2-y^2$; $c=2$.

2.求温度场

$$u(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+(z+8)^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z-8)^2}$$

通过点$M(9,12,28)$的等温面.

3.画出平面场$u(x,y)=\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)$中$u=0,\dfrac{1}{2},1,\dfrac{3}{2},2$的等值线.

4.求下列各矢量场的矢量线方程:

(1) $\boldsymbol{A}=(z-y)^2\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$;　　(2) $\boldsymbol{A}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}-(x^2+y^2)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A}=(z-y)\boldsymbol{i}+(x-z)\boldsymbol{j}+(y-x)\boldsymbol{k}$;　　(4) $\boldsymbol{A}=xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$;

(5) $\boldsymbol{A}=x(y^2-z^2)\boldsymbol{i}+y(z^2-x^2)\boldsymbol{j}-z(x^2-y^2)\boldsymbol{k}$.

5.设有无穷长导线与oz轴一致，通有电流$I\boldsymbol{k}$后，在导线周围便产生磁场，在点$M(x,y,z)$处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),$$

其中$r=\sqrt{x^2+y^2}$,求磁力线方程.

§2　场的微分性质

要了解场中某一物理现象，不仅要知道表征这一物理现象的各种物理量在空间的分布情况，更为重要的是研究它们的局部性态、变化规律以及相互关系。梯度、散度与旋度刻划了数量场与矢量场的局部性态以及它们之间的相互关系。

1.2.1　梯度及其性质

1. 定义　若$u=u(x,y,z)$在点$M(x,y,z)$处是连续可微分的数量场，则称矢量

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

为数量场$u=u(x,y,z)$在点M的梯度，简记为

$$\mathrm{grad}u=\nabla u,$$

其中

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

在某方向$\boldsymbol{l}\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$上场$u$的导数：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}u\cdot\boldsymbol{l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

在已知点(x,y,z)处，沿梯度∇u的方向，u的方向导数取最大值

$$|\nabla u|=|\mathrm{grad}u|=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

2.性质

1° $\nabla(cu)=c\nabla u$，其中c为常数。

2° $\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$.

3° $\nabla(uv)=v\nabla u+u\nabla v$.

4° $\nabla\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{1}{v^2}(v\nabla u-u\nabla v)$.

5° $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$，其中$u=u(x,y,z)$.

$$\nabla f(u,v,w)=\frac{\partial f}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial f}{\partial v}\nabla v+\frac{\partial f}{\partial w}\nabla w.$$

这里 $u=u(x,y,z),v=v(x,y,z),w=w(x,y,z)$.

【例 题】

例1 求场

$$u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

在 (1) $O(0,0,0)$；(2) $A(1,1,1)$；(3) $B(2,0,1)$各点梯度的大小和方向。在场的怎样点，梯度等于零？

解
$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}.$$

(1) $\mathrm{grad}u(O)=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$.

$$|\mathrm{grad}u(O)|=\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7;$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{7},\quad\cos\beta=\frac{-2}{7},\quad\cos\gamma=\frac{-6}{7}.$$

(2) $\mathrm{grad}u(A)=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$.

$$|\mathrm{grad}u(A)|=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma=0.$$

(3) $\operatorname{grad}u(B)=7\boldsymbol{i}$, $|\operatorname{grad}u(B)|=7$;

$$\cos\alpha=1,\quad \cos\beta=0,\quad \cos\gamma=0.$$

使 $\operatorname{grad}u=\mathbf{0}$,得

$$2x+y+3=0,\quad x+4y-2=0,\quad 6(z-1)=0.$$

解之得 $x=-2,\quad y=1,\quad z=1.$

因此，在点$M(-2,1,1)$处，$\operatorname{grad}u=\mathbf{0}$.

例2 在空间$Oxyz$的哪些点，场

$$u=x^3+y^3+z^3-3xyz$$

的梯度(1) 垂直于Oz轴；(2) 平行于Oz轴；(3) 等于零？

解 $\operatorname{grad}u=3(x^2-yz)\boldsymbol{i}+3(y^2-xz)\boldsymbol{j}+3(z^2-xy)\boldsymbol{k}$

(1) 当且仅当梯度在Oz轴上的投影等于零时，梯度垂直于Oz轴。故当$z^2=xy$时，$\operatorname{grad}u$垂直于Oz轴。

(2) 当且仅当梯度在Ox轴和Oy轴上的投影都等于零时，梯度平行于Oz轴.故当$x^2=yz$和$y^2=xz$同时成立时，即当$x=y=0$或$x=y=z$时，$\operatorname{grad}u$平行于Oz轴。

(3) 当$x^2=yz$, $y^2=xz$, $z^2=xy$ 同时成立时，即当$x=y=z$时，$\operatorname{grad}u=\mathbf{0}$.

例3 求场$u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$在已知点$M(x,y,z)$沿此点的径向$\boldsymbol{r}$的方向导数。又在怎样的情况下，此方向导数等于梯度的大小？

解 设径向的方向余弦为$\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

则 $$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\beta=\frac{y}{r},\ \cos\gamma=\frac{z}{r}.$$

由此得

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{2x}{a^2}\cdot\frac{x}{r}+\frac{2y}{b^2}\cdot\frac{y}{r}+\frac{2z}{c^2}\cdot\frac{z}{r}=\frac{2u}{r}.$$

$$\operatorname{grad}u=2\left(\frac{x}{a^2}\boldsymbol{i}+\frac{y}{b^2}\boldsymbol{j}+\frac{z}{c^2}\boldsymbol{k}\right).$$

当径向$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$的方向与梯度$\operatorname{grad}u$的方向一致时，沿此点的径向$\boldsymbol{r}$的方向导数等于梯度的大小。由此必有

$$\frac{x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{z}{\frac{z}{c^2}},$$

即 $|a|=|b|=|c|$时，方向导数等于梯度的大小。

例4 设点电荷q放在坐标原点，于是在其周围空间的任一点$M(x,y,z)$处所产生的电位与电场强度分别为

$$u=\frac{q}{4\pi\varepsilon r},\qquad \boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}.$$

其中ε为介电系数，$\boldsymbol{r}$为点M的向径，$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.证明 $\boldsymbol{E}=-\operatorname{grad}u$.

证 $\mathrm{grad}u=\mathrm{grad}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon}\mathrm{grad}\dfrac{1}{r}=\dfrac{-q}{4\pi\varepsilon r^2}\mathrm{grad}r=-\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r^3}\boldsymbol{r}=-\boldsymbol{E}.$

例5 证明公式

$$\nabla^2(uv)=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v,$$

其中 $\nabla^2=\nabla\nabla=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ 叫做拉普拉斯算符记作$\triangle$.

证

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(uv)=u\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(uv)=u\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(uv)=u\frac{\partial^2v}{\partial z^2}+v\frac{\partial^2u}{\partial z^2}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}.$$

三式相加，得

$$\nabla^2(uv)=u\left(\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v}{\partial z^2}\right)+v\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=u\nabla^2v+v\nabla^2u+2\nabla u\nabla v.$$

即

$$\triangle(uv)=u\triangle v+v\triangle u+2\nabla u\nabla v$$

例6 设 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$及$u=\mathrm{arctg}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$

计算 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\mathrm{grad}u$.

解

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+\dfrac{z^2}{x^2+y^2}}\cdot\frac{-xz}{(x^2+y^2)^{3/2}}=-\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)},$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

故有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\times\mathrm{grad}u=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\\dfrac{\partial u}{\partial x}&\dfrac{\partial u}{\partial y}&\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&1\\-xz&-yz&x^2+y^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{(x^2+y^2+yz)\boldsymbol{i}-(x^2+y^2+xz)\boldsymbol{j}+(x-y)z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2}\quad(x^2+y^2+z^2)}.$$

例7 求$\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$,其中$\boldsymbol{c}$为常矢，$\boldsymbol{r}$为从坐标原点起的向径。

解 设$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$,又因$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$

故

$$\mathrm{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})=\mathrm{grad}(c_1x+c_2y+c_3z)$$
$$=\mathrm{grad}(c_1x)+\mathrm{grad}(c_2y)+\mathrm{grad}(c_3z)$$
$$=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}.$$

例8 求$\mathrm{grad}(|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2)$($\boldsymbol{c}$为常矢).

解 由拉格朗日恒等式

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2,$$

故得 $\operatorname{grad}(|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2)=\operatorname{grad}\{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})^2\}$

$$=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})\operatorname{grad}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-\operatorname{grad}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})^2.$$

再由性质5°,得

$$\operatorname{grad}(|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{r}|^2)=2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{r}-2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{c}.$$

1.2.2 散度及其性质

1. 定义 若$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$是连续可微的矢量场，则称数量

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

为这个场的**散度**。它表征矢量场$\boldsymbol{A}$各点处的发散强度。

2. 性质

1° $\operatorname{div}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\operatorname{div}\boldsymbol{b}$

2° $\operatorname{div}(k\boldsymbol{a})=k\operatorname{div}\boldsymbol{a}$,($k$为常数).

3° $\operatorname{div}(u\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot\operatorname{grad}u$,($\boldsymbol{c}$为常矢，$u$为数量 函数)。

4° $\operatorname{div}(u\boldsymbol{a})=u\operatorname{div}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}u$.

5° $\operatorname{div}(\operatorname{grad}u)=\triangle u$. （$\triangle$为拉普拉斯算子）.

【例 题】

例9 证明

$$\operatorname{div}\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\end{vmatrix}=0.$$

证 因为

$$\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ \omega_x&\omega_y&\omega_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial x}\right)\boldsymbol{k}$$

所以

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\omega_z}{\partial y}-\frac{\partial\omega_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\omega_x}{\partial z}-\frac{\partial\omega_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\omega_y}{\partial x}-\frac{\partial\omega_x}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\omega_z}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2\omega_y}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\omega_x}{\partial z\partial y}-\frac{\partial^2\omega_z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\omega_y}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\omega_x}{\partial y\partial z}=0.$$

例10 求$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]$，其中$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 在什么情 况 下，$\operatorname{div}[\operatorname{grad}f(r)]=0$？

解 由梯度的性质，得

$$\mathrm{grad}f(r)=f'(r)\mathrm{grad}r=f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}.$$

故 $$\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{x}{r}f'(r)]+\frac{\partial}{\partial y}[\frac{y}{r}f'(r)]+\frac{\partial}{\partial z}[\frac{z}{r}f'(r)]$$

$$=\frac{3f'(r)}{r}+f''(r)[\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}]+f'(r)[-\frac{x^2}{r^3}-\frac{y^2}{r^3}-\frac{z^2}{r^3}]$$

$$=\frac{2f'(r)}{r}+f''(r).$$

当 $\frac{2f'(r)}{r}+f''(r)=0$ 时，$\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(r)]=0$.

令 $f'(r)=u$，则 $\frac{2u}{r}+\frac{du}{dr}=0$.

即 $$\frac{du}{u}=-\frac{2dr}{r},$$

积分后，便有

$$\ln u=\ln\frac{c_1}{r^2},\ f'(r)=\frac{c_1}{r^2}$$

再积分，得

$$f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2\qquad(c_1,c_2\text{为任意常数}).$$

例11 求(1) $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}u)$；(2) $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}v)$.

解 (1)由散度的性质，有

$$\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}u)=u\,\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)+\mathrm{grad}u\cdot\mathrm{grad}u$$

$$=u\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)+(\mathrm{grad}u)^2$$

即 $\nabla\cdot(u\nabla u)=u\triangle u+(\nabla u)^2$

例12 在点电荷q产生的静电场中，求电位移矢量$\boldsymbol{D}$的散度。

解 取点电荷q所在点为坐标原点，此时，在其周围空间中任一点M的电位移矢量

$$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r},$$

其中r为原点与M点之间的距离，$\boldsymbol{r}$为M点的矢径。由散度的性质4°，有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\mathrm{div}\left(\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}\right)=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\mathrm{div}\boldsymbol{r}+\mathrm{grad}\frac{\boldsymbol{r}}{r_3}\right),$$

然而可直接计算：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{r}=3,\quad \mathrm{grad}\frac{1}{r^3}=-\frac{3}{r^4}\mathrm{grad}r=-\frac{3\boldsymbol{r}}{r^5}.$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^5}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\right)=\frac{q}{4\pi}\left(\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}\right)=0,$$

可见除点电荷q所在的点($r=0$)外，散度

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=0.$$

例13 物体以一定的角速度ω依反时针方向绕oz轴旋转，求速度矢量$\boldsymbol{v}$和加速度矢量$\boldsymbol{w}$在空间的点$M(x,y,z)$和在已知时刻的散度。

解 若将角速度用一个矢量$\boldsymbol{\omega}$来表示，则

$$\boldsymbol{\omega}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+\omega\boldsymbol{k}$$

设$\boldsymbol{r}$表示由原点到点$M(x,y,z)$的向径，则

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

由于$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}$,故

$$\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 0 & \omega\\ x & y & z\end{vmatrix}=-\omega y\boldsymbol{i}+\omega x\boldsymbol{j}.$$

因而 $$v_x=\frac{dx}{dt}=-\omega y,v_y=\frac{dy}{dt}\omega x,\quad v_z=\frac{dz}{dt}=0.$$

又 $$\boldsymbol{w}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-\omega\frac{dy}{dt}\boldsymbol{i}+\omega\frac{dx}{dt}\boldsymbol{j}=-\omega^2x\boldsymbol{i}-\omega^2y\boldsymbol{j}$$

假定在已知时刻，点M属于物体，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial}{\partial x}(-\omega y)+\frac{\partial}{\partial y}(\omega x)=0;$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{w}=\frac{\partial}{\partial x}(-\omega^2x)+\frac{\partial}{\partial y}(-\omega^2y)=-2\omega^2.$$

例14 求由引力中心的有限系统所产生的动力场的散度。

解 设引力中心位于点$M(x,y,z)$,具有质量m,它吸引着坐标为$M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$的n个质量分别为m_i $(i=1,2,\cdots,n)$的质点。则引力场为：

$$\boldsymbol{F}=\sum_{i=1}^{n}k\frac{mm_i}{r_i}\boldsymbol{r}_i,$$

其中k是引力常数，$\boldsymbol{r}_i$是由点$M_i(x_i,y_i,z_i)$引向点M的矢量。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{F}&=km\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x_i}{r_i^3}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{y-y_i}{r_i^3}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{z-z_i}{r_i^3}\right)\\&=km\sum_{i=1}^{n}m_i\left[\frac{3}{r_i}-\frac{3(x-x_i)^3}{r_i^5}-\frac{3(y-y_i)^2}{r_i^5}-\frac{3(z-z_i)^2}{r_i^5}\right]\\&=0.\end{aligned}$$

1.2.3 旋度及其性质

1. 定义 若

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

是连续可微的矢量场，则称矢量

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

为这个场的旋度，它表征矢量场$\boldsymbol{A}$各点处的旋转强度。

2. 性质

1° $\mathrm{rot}(c\boldsymbol{A}) = c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

或 $\nabla\times(c\boldsymbol{A}) = c\nabla\times\boldsymbol{A}$，其中$c$为常数；

2° $\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}\pm\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$

或 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}) = \nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B}$；

3° $\mathrm{rot}(u\boldsymbol{A}) = u\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{grad}\,u\times\boldsymbol{A}$

或 $\nabla\times(u\boldsymbol{A}) = u\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla u\times\boldsymbol{A}$，其中$u$为数量函数；

4° $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$

或 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$；

5° $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}) = 0$ 或 $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0$；

6° $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u) = 0$ 或 $\nabla\times(\nabla u) = 0$；

【例　题】

例15 求 (1) $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r}$；(2) $\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$.

解 (1) 由$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，得

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0$$

(2) 由旋度的性质，得

$$\mathrm{rot}[f(r)\boldsymbol{r}] = f(r)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{r} + \mathrm{grad}\,f(r)\times\boldsymbol{r}$$

$$= 0 + \frac{f'(r)\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r} = 0$$

例16 证明 $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}$.

证 $\mathrm{div}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) = \left(\boldsymbol{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x)$$

$$= b_x\left(\frac{\partial}{\partial y}a_z - \frac{\partial}{\partial z}a_y\right) + b_y\left(\frac{\partial}{\partial z}a_x - \frac{\partial}{\partial x}a_z\right) + b_z\left(\frac{\partial}{\partial x}a_y - \frac{\partial}{\partial y}a_x\right)$$

$$- a_x\left(\frac{\partial}{\partial y}b_z - \frac{\partial}{\partial z}b_y\right) - a_y\left(\frac{\partial}{\partial z}b_x - \frac{\partial}{\partial x}b_z\right) - a_z\left(\frac{\partial}{\partial x}b_y - \frac{\partial}{\partial y}b_x\right)$$

$$= \begin{vmatrix} b_x & b_y & b_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{b}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{b}.$$

例17 设有无穷长导线与 oz 轴一致，通电流$I\boldsymbol{k}$后，在导线周围产生磁场，于点$M(x,$