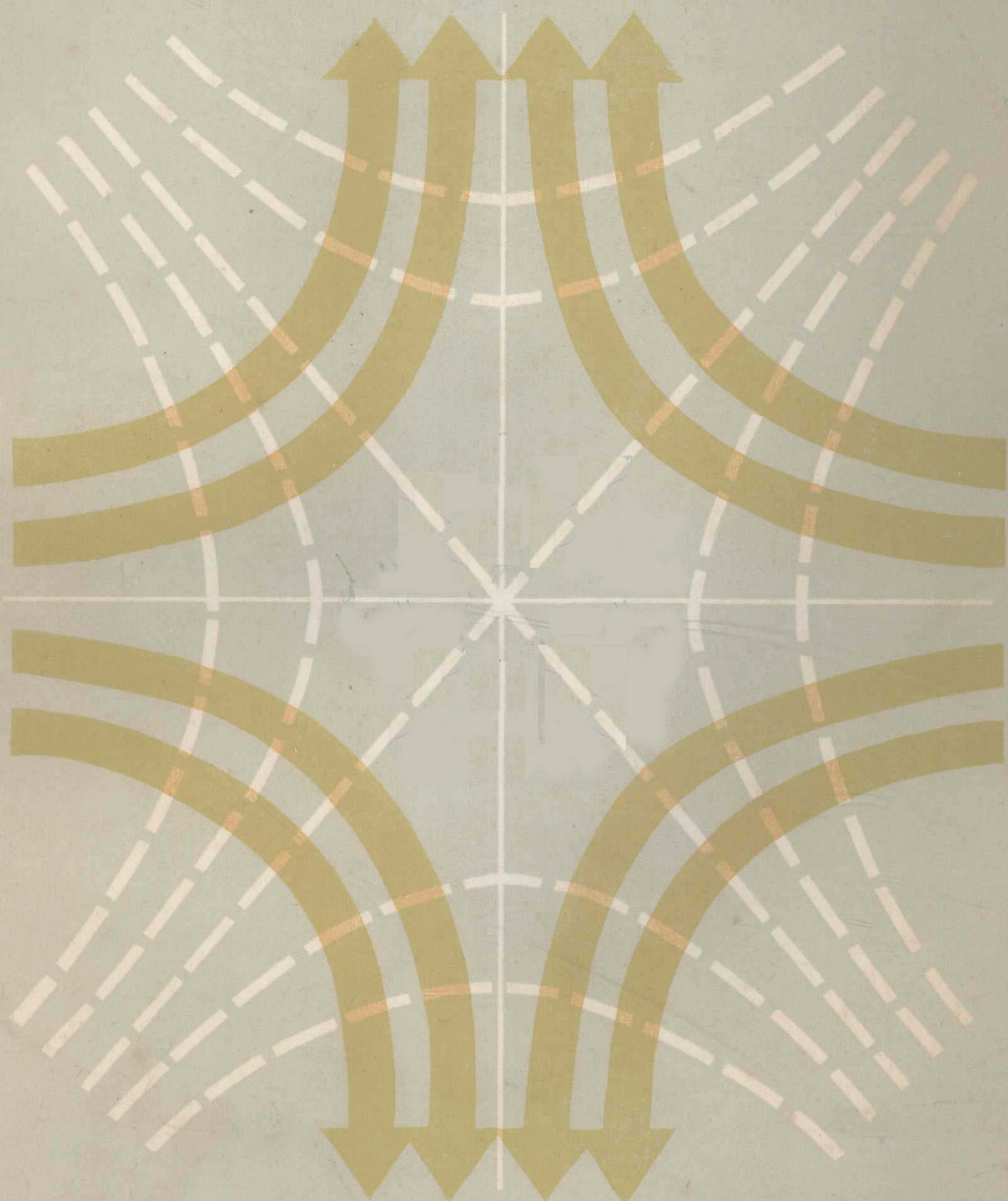


弹性动力学

TANXING DONGLIXUE 杨桂通 张善元 编著



中国铁道出版社

内 容 简 介

本书在系统介绍弹性动力学基本理论的基础上，着重讨论弹性波的传播过程中的重要规律和弹性体振动的主要特征，用弹性动力学的统一观点阐明波动和振动两种现象的本质，沟通其内在联系，并结合典型应用问题，提供处理弹性动力学问题的一些数学方法。

本书可作为高等院校应用力学专业的大学生和研究生的教学参考用书，并可供力学工作者和有关专业的工程技术人员参考。

弹 性 动 力 学

杨桂通 张善元 编著

中国铁道出版社出版

新华书店总店科技发行所发行

各地新华书店经售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：787×1092毫米 1/16 印张：22.75 字数：568千

1988年5月 第1版 第1次印刷

印数：(平)0001—3,000册 定价：(平)5.40元

(精)0001—1,000册 (精)7.30元

序 言

弹性动力学是固体力学的一个重要分支。它是研究弹性体在动荷载作用下的变形和运动规律的学科。弹性动力学所涉及的问题十分广泛，在工程技术的许多领域有着重要的应用。本书试图从应用的观点出发，着重提供弹性动力学中的基本概念和主要数学方法，以此作为进一步研究与处理各类弹性动力学问题的导引。

实际上，弹性动力学的重要内容可以分为两大部分：弹性体的振动和弹性波的传播。关于这两类问题的研究已有不少专著和教科书，而关于这些问题的文献则更是浩如烟海。在这些著作中大都是分别讨论弹性振动或弹性波的理论和应用问题。然而，这两类问题之间所存在的质的联系以及作为一个动力学过程的各个阶段的特性却很少见到用统一的观点给出详细的论述。作者认为，弹性体振动和弹性波可以用弹性动力学统一的观点进行研究。实际上，出现振动与波动这两种不同物理现象的原因，只是由于受扰动弹性体的构形、约束条件和荷载条件的不同所引起的不同后果。还可以认为弹性体受扰动后的基本物理现象是扰动的传播，而人们所观察到的振动现象只是扰动传播在特定条件下所呈现的特殊情况，是整个动力学过程中的一部分。我们将通过简单实例说明弹性动力学的物理本质，并由此引出解决实际问题的手段。本书旨在弥补振动与波动之间的空隙，用弹性动力学的统一观点阐明问题的本质，沟通问题的内在联系。从而使读者对弹性动力学有一个完整的、准确的概念和解决问题的手段。

由于我国社会主义现代化建设的迅速发展，在各个工程技术和科学研究领域所提出的弹性动力学问题越来越多，目前还缺少一本能使读者对弹性动力学过程有一个完整的统一认识，且可用最少的时间掌握弹性动力学基本原理，包括弹性振动与弹性波本质的联系及其理论与方法为特点的弹性动力学专著，本书即是为此目的而编写的。为此书中除重点介绍基本理论外，讨论了振动与波动的联系，并注意该理论在工程技术上的应用以及现代计算方法等。

本书是在作者为太原工业大学应用力学专业本科生和研究生开设的弹性动力学课程编写的讲义基础上整理而成的。全书共分十一章，第一章简述了弹性动力学的研究内容及其发展概况；第二章阐述波动与振动的一般概念；第三章介绍弹性动力学的基本理论；第四章讨论无限均匀弹性介质中的体波；第五章讨论弹性波在两种介质交界面处的反射和折射；第六章讨论弹性波导的几何弥散效应；第七章讨论几种瞬态波动问题的求解；第八章讨论细杆及薄板动力问题的初等理论；第九章简单地介绍粘弹性介质的本构关系及其波动特征；第十章讨论弹性动力学问题的有限元法；第十一章扼要地介绍非线性弹性波的传播特征。

书末附录 I 中简述了一般曲线坐标系中张量分析基础，以供学习某些章节时参考。

本书主要的工作是张善元完成的。在编写过程中曾得到太原工业大学应用力学教研室老师们的关心和帮助，清华大学裘宗瀛教授审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，在此一并致以衷心的感谢。

由于水平所限，不妥与错谬之处，敬请读者批评指正。

杨桂通 张善元

1985年元月20日于太原工业大学

目 录

| | |
|---------------------------|----|
| 第一章 弹性动力学概述 | 1 |
| § 1.1 动力学问题的特征 | 1 |
| § 1.2 波动解与振动解 | 2 |
| § 1.3 弹性动力学的发展 | 3 |
| 第二章 波动与振动 | 6 |
| § 2.1 波动及其分类 | 6 |
| § 2.2 波动方程的建立 | 8 |
| § 2.3 振子耦合与弹性体的振动 | 11 |
| § 2.4 一维波动方程的D'Alembert解 | 15 |
| § 2.5 有界弦的波动解 | 20 |
| § 2.6 有界弦的振动解 | 24 |
| § 2.7 一维波动问题的特征线理论 | 29 |
| 第三章 弹性动力学的基本理论 | 38 |
| § 3.1 笛卡儿张量 | 38 |
| § 3.2 运动和变形的描述 | 44 |
| § 3.3 应变张量 | 47 |
| § 3.4 质量守恒定律 | 51 |
| § 3.5 动量定理及应力张量 | 53 |
| § 3.6 能量守恒定律 | 57 |
| § 3.7 间断条件 | 58 |
| § 3.8 场方程的线性化 | 60 |
| § 3.9 本构方程 | 62 |
| § 3.10 位移表示的运动方程 | 64 |
| § 3.11 初值-边值问题的分类及其解的唯一性 | 65 |
| § 3.12 弹性动力学的Hamilton变分原理 | 67 |
| § 3.13 弹性动力学的互易定理 | 69 |
| 第四章 无限均匀弹性介质中的波 | 72 |
| § 4.1 矢量场的Helmholtz分解 | 72 |
| § 4.2 波动方程的Lamè分解 | 73 |
| § 4.3 一维平面波 | 75 |
| § 4.4 三维平面波 | 80 |
| § 4.5 球对称波与轴对称波 | 83 |
| § 4.6 时间简谐波 Helmholtz方程 | 85 |
| § 4.7 特征曲面与射线 | 87 |

| | | |
|------------|---------------------------------|------------|
| § 4.8 | Dirac广义函数 | 92 |
| § 4.9 | 波动方程解的积分表示 | 93 |
| § 4.10 | 推迟势 弹性动力学的基本奇异解 | 98 |
| § 4.11 | 依赖区域、决定区域和影响区域 | 101 |
| § 4.12 | 二维波动问题 | 104 |
| 第五章 | 平面简谐波在交界面处的反射与折射 | 109 |
| § 5.1 | 概 述 | 109 |
| § 5.2 | P 波和 SV 波从弹性半空间表面的反射 | 110 |
| § 5.3 | 自由表面反射的几种特殊情形 | 117 |
| § 5.4 | Rayleigh面波 | 123 |
| § 5.5 | SH 波从弹性半空间表面的反射 | 128 |
| § 5.6 | P 波和 SV 波在两个弹性半空间交界面处的反射和折射 | 131 |
| § 5.7 | Stoneley波 | 136 |
| § 5.8 | SH 波在交界面处的反射和折射 | 138 |
| § 5.9 | Love波 | 140 |
| § 5.10 | 地震波的传播特征 | 147 |
| § 5.11 | SH 波在圆柱形空腔上的散射 | 148 |
| 第六章 | 弹性波导的几何弥散效应 | 153 |
| § 6.1 | 概 述 | 153 |
| § 6.2 | 波群与群速度 | 153 |
| § 6.3 | 无限平板中平面应变波 | 161 |
| § 6.4 | 无限平板中的 SH 波 | 168 |
| § 6.5 | 无限长圆柱体中的波 | 169 |
| § 6.6 | 轴对称扭转波的初值问题 | 178 |
| 第七章 | 积分变换、渐近展开及其在瞬态波动问题中的应用 | 184 |
| § 7.1 | 积分变换法 | 184 |
| § 7.2 | 渐近展开 | 190 |
| § 7.3 | 经受均匀压力的球形空腔 | 196 |
| § 7.4 | 经受均匀压力的圆柱形空腔 | 199 |
| § 7.5 | 表面垂直线源的Lamb问题 | 203 |
| § 7.6 | 垂直点源的Lamb问题 | 213 |
| 第八章 | 细杆及薄板的初等理论 | 219 |
| § 8.1 | 杆中纵波的支配方程 | 219 |
| § 8.2 | 初值-边值问题 | 221 |
| § 8.3 | 在杆性质突变处的反射与透射 | 225 |
| § 8.4 | 打桩过程中的应力波 | 227 |
| § 8.5 | 层裂与痂片 | 230 |
| § 8.6 | 两杆共轴撞击及弹性波的相互作用 | 232 |
| § 8.7 | 刚体质量对杆的撞击 | 235 |
| § 8.8 | 有限长杆的纵向振动 | 237 |

| | | |
|-------------|------------------------------|------------|
| § 8.9 | 横向惯性效应 | 240 |
| § 8.10 | 圆杆的扭转 | 244 |
| § 8.11 | Hopkinson-Korsky 杆实验技术 | 245 |
| § 8.12 | Bernoulli-Euler梁中的波 | 248 |
| § 8.13 | Timoshenko梁理论 | 252 |
| § 8.14 | 有限长梁的振动 | 254 |
| § 8.15 | 无限平板中的纵波 | 260 |
| § 8.16 | 薄板的横向振动 | 261 |
| 第九章 | 粘弹性介质中的波 | 270 |
| § 9.1 | 概述 | 270 |
| § 9.2 | 一维粘弹性介质的本构关系 | 270 |
| § 9.3 | 复模量和复柔量 能量的耗散 | 277 |
| § 9.4 | 三维粘弹性介质的本构关系 | 281 |
| § 9.5 | 初值-边值问题 | 283 |
| § 9.6 | 粘弹性细杆中的应力波 | 285 |
| § 9.7 | 特征线法解粘弹性杆中应力波的传播 | 290 |
| § 9.8 | 三维平面简谐波 | 293 |
| § 9.9 | 粘弹性 Rayleigh 面波 | 296 |
| 第十章 | 弹性动力学问题的有限元法 | 299 |
| § 10.1 | 弹性动力学方程的本征函数解 | 299 |
| § 10.2 | 弹性动力学问题的有限元法概述 | 302 |
| § 10.3 | 单元运动方程的建立 | 303 |
| § 10.4 | 总体运动方程的集合 | 307 |
| § 10.5 | 本征值问题 振型正交特性 | 308 |
| § 10.6 | Stodola法求解特征值问题 | 312 |
| § 10.7 | 求实对称矩阵特征值的Jacobi方法 | 315 |
| § 10.8 | 用子空间迭代法求解大型广义特征值问题 | 317 |
| § 10.9 | 阻尼特性矩阵 | 319 |
| § 10.10 | 振型迭加法求动力响应 | 322 |
| § 10.11 | 逐步积分法直接解运动方程组 | 324 |
| § 10.12 | 计算实例 | 327 |
| § 10.13 | 有限元法解波的传播问题 | 327 |
| 第十一章 | 一维杆中非线性弹性波 | 332 |
| § 11.1 | 概述 | 332 |
| § 11.2 | 非线性弹性细杆中的纵波 | 332 |
| § 11.3 | 激波 | 336 |
| § 11.4 | 粘性效应与Burgers 方程 | 339 |
| § 11.5 | 非线性弹性杆中的孤波 | 341 |
| 附录 I | 张量分析 | 344 |
| § I-1 | 曲线坐标系与活动标架场 | 344 |

第一章 弹性动力学概述

§ 1.1 动力学问题的特征

运动是物质存在的形式，是物质的固有属性。机械运动是物质运动的最简单的形态，它是指物体的空间位置或物体的一部分相对于其它部分来说空间位置随时间变化的过程。而弹性动力学则是研究弹性物体在外界扰动（或称激励）下机械运动规律的学科。弹性动力学属于经典力学的范畴，它是研究运动速度远低于光速的宏观物体的运动，所以牛顿定律是建立弹性动力学支配方程的基础。

其它物体对于所考虑物体的作用称之为荷载。一个弹性物体在外部荷载作用下将会改变其原有的形状和原来的运动状态，同时物体内部各部分之间的相互作用力也随之发生变化。这些变化统称为弹性物体对于外部作用的响应。根据引起物体响应的不同，可将荷载分为静力荷载和动力荷载。所谓静力荷载是指加载过程是如此地缓慢，以致物体由此而产生的加速度很小，从而惯性效应可以略去不计，因而在此加载过程中可以认为物体的各部分随时都处于静力平衡状态。与此相反，若在加载过程中能使物体产生显著的加速度，且由加速度所引起的惯性力对物体的变形和运动有着明显地影响，这类荷载称为动力荷载。图 1.1 给出了几种典型的动力荷载随时间变化的规律。

同静力荷载情况相比，弹性物体对动力荷载的响应在性质上存在着很大的差异。在静力问题中，对于给定的荷载，响应具有单一的解答。也就是说求解静态的响应只需考虑加载前的参考状态和加载后的变形状态之间的差异。这是由于略去了惯性效应，使得物体当局部受到扰动后，整个物体所有各部分的响应立即完成，而不需要任何时间过程。然而在动力问题中，局部的扰动并不能立即引起离扰动源较远部分的响应，而且物体中每一点处的响应也将随时间而变化，所以必须建立相应于我们感兴趣的某一时间过程上的一系列的解答。显然动力分析要比静力分析困难得多。另外，我们以后将会看到，动力响应不仅与扰动源的性质有关，如荷载的强度，频谱成分，持续时间等，而且还与组成物体的介质本身的固有动力学特征密切相关。对于弹性物体来说，动力学特征主要是指介质的弹性性质和惯性性质，这两种性质能够使得系统的能量得以保持和传递，构成了波动和振动的机制。此外，一般的

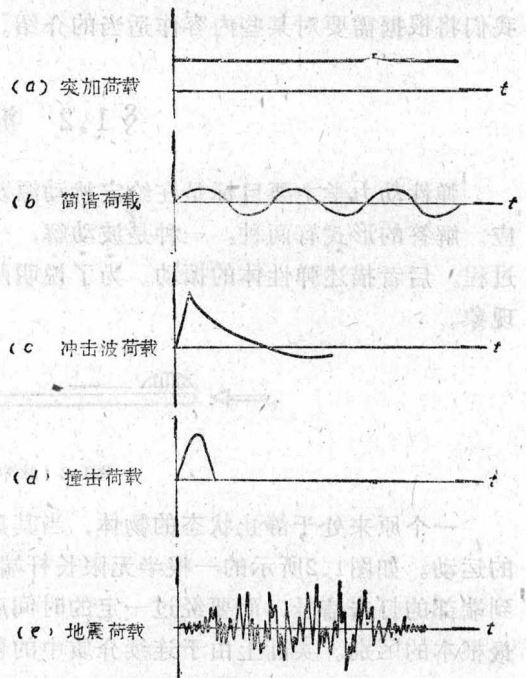


图1.1 几种典型的动力荷载

真实固体材料都呈现出一定程度的时间相关性，例如材料在恒定应力下的蠕变和恒定应变下力的松弛现象。这种同时间的相关性，通常称为材料的粘性性质。这种粘性效应，会引起能量的耗散和运动的衰减。除了介质的性质外，物体的几何特征，边界条件等对动力响应也有直接的影响。

弹性动力学是在经典的弹性力学基础上发展起来的，属于连续介质力学的一个组成部分，即认为物体是运动着的质点（或粒子）的连续集合，所以连续性假设仍然是弹性动力学的分析基础。连续介质力学的质量守恒，线动量守恒，角动量守恒以及能量守恒等基本定律正是我们导出弹性动力学基本方程的出发点。由此建立的方程一般来说是非线性的，为了减少数学上的困难，使讨论变得方便些，本书将着重讨论无限小应变的情况，且除第十一章外，均认为介质材料是线性弹性的。基于这两个假定，使得基本方程线性化，从而可以利用迭加原理，大大简化了分析方法。然而在这些近似假定下，所给出的分析结果对多数工程材料在相当广泛的受载条件下与许多实际的观察取得了很好的一致性。

弹性动力学的主要任务就是从连续介质最基本的定律出发，建立描述物体运动的支配方程，并由此求解物体的动力响应。显然在弹性动力学问题中，各类场量（位移场、应力场、速度场等）不仅是空间位置的函数，而且是时间的函数。如位移场量可用 $u(x, y, z, t) = u(x, t)$ 来描述，象这样的一些函数，常称为波函数。可见求解动力响应是处理可变场的问题，通常归结为双曲型或双曲-扩散型方程的初值或初值-边值问题。处理这类问题需要较多的数学工具，如矢量分析与场论，数学物理方法，解析函数理论以及张量分析等。以后，我们将根据需要对某些内容作适当的介绍。

§ 1.2 波动解与振动解

弹性动力学主要目标是在给定扰动源及边界条件、初始条件下求解弹性物体的动力响应。解答的形式有两种：一种是波动解，一种是振动解。前者描述行波在弹性介质中的传播过程，后者描述弹性体的振动。为了说明两者的联系与差异，首先考察波动与振动两个物理现象。



图1.2 脉冲在半无限长杆中传播

一个原来处于静止状态的物体，当其局部受到突然的扰动，并不能立即引起物体各部分的运动。如图1.2所示的一根半无限长杆端部受到打击时，远离杆端的区域并不能立即感受到端部的打击信号，而要经过一定的时间后才能接受到这个信号。这是动力问题和静力问题最根本的区别。实际上由于连续介质中的各个质点由某种约束力而彼此联系起来，在未受到扰动之前，质点之间的相互作用力处于平衡状态。当某一个质点受到扰动以后，它就要偏离原来的平衡位置而进入运动状态。由于质点间相对位置的变化，使得受扰动质点同其周围质点之间增加了附加的弹性力，从而与受扰动质点相邻的质点也必然受到影响而进入运动状态。这种作用依次传递下去，便形成一个由扰动源开始的波动现象。这种扰动借质点间的弹性力而逐渐传播的过程，称为弹性波。如果介质是无限的，扰动将会随时间的发展一直传播出去。然而一个实际的物体总是有边界的，当扰动到达边界时，将要和边界发生相互作用而产生

生反射。对一个有界的物体，由于扰动在其边界上来回反射，从而使得整个物体就会呈现出在其平衡位置附近的一种周期性的振荡现象，称之为弹性体的振动。弹性波和弹性体的振动之间存在着本质的内在联系。这两种现象的形成有着相同的机制，它们都是由介质的弹性和惯性两个基本性质所决定。弹性性质有使发生了位移的质点回复到原来平衡位置的作用，而运动质点的惯性有使当前的运动状态持续下去的作用，或者说弹性是贮存势能的要素，惯性是维持动能的表征。正由于这两种特性的存在，系统的能量才能得以保持和传递，外部的扰动才能激发起弹性波和弹性体的振动。弹性波的传播和弹性体的振动，实际上可以看作是同一物理问题的不同表现形式。扰动一开始总是以行波的方式将能量传播出去，而当物体有界时，由于行波的来回反射，最终使物体趋于定常的运动状态，则表现为振动现象。弹性体的振动是波动过程的一种特殊表现形式，并不意味着波动过程已经消失。在实际的弹性动力学问题中，有时需要考察波动过程，有时则对振动现象更感兴趣。相应于这两种情况，在数学上对动力响应的解答常分别采用波动解和振动解。波动解具有行波的形式，如在一维情况下其波函数形如 $F(x \pm ct)$ ，这种解能给波动过程以直观形象地描述，在每一时刻可以清晰地看到扰动传播的形状和所到达的位置。在振动解中，波函数被表达为 $\Phi(x)q(t)$ 的分离变量的形式。由数理方程理论可知，振动解一般为一无穷级数 $\sum \Phi_n(x)q_n(t)$ ，级数中的每一项代表了一个在空间具有固定模式并按一定频率振动的驻波。可以看出，振动解是用无穷多个驻波的迭加描述了行波的传播，而驻波是由相同频率的时间简谐行波的迭加而得到。这两种解答可由Fourier级数（或积分）联系起来，这正反映了波动与振动之间的本质联系。这两种解答也各有自己的特点，在波动解中，空间坐标为 x_1 和 x_2 的两点存在着相位差 $|x_2 - x_1|/c$ ，此处 c 是波传播的速度。而在振动解中，则是把整个物体看作是一个大的振子，各点作同步的运动，而不存在相位上的差别，各点振动的幅值在空间依函数 $\Phi(x)$ 确定的模式分布。

对某个特定的动力响应过程，解的形式选择，要视实际问题的需要来确定。这既取决于扰动源的性质，又取决于所考虑物体的相对尺寸，同时还与研究者所关心的问题等诸因素有关。一般说来，当荷载作用时间极为短促或变化极为迅速的情况下，如经受撞击，爆炸等荷载作用时，了解物体的瞬态变形和应力变化的规律是重要的，这时宜采用波动解。如用振动解，则由于其频带较宽，尽管级数中取很多项，往往也难给出满意的解答。又当物体尺寸很大时，弹性波通过物体所需的时间就显得非常重要而必须加以考虑，在此情况下局部的扰动主要激发起波动过程，而整个物体的振动则是比较微弱的，显然采用波动解是合适的。如研究地震作用下地球内部的应力场的变化就属于此列。当然若考察地震作用激发的地球本身的自由振荡则另当别论。在一般的机械振动和工程结构的动力反应问题中，由于所研究对象的几何尺寸相对来说比较小，则可不考虑波动过程，而直接作为振动问题来分析更为简单可行。然而如果我们的兴趣在于了解在动力荷载下物体的拐角或介质内部的孔洞，裂缝等部位的局部信息时，则应作为波动问题处理，通过分析波通过障碍物时的绕射或散射过程将能给出这些细部的应力和变形的变化以详尽地描述。一般地讲，波动解能从数学上给出动力学过程以完美的解答，但相对于振动解来说，其求解过程往往比较繁杂。

§ 1.3 弹性动力学的发展

波动和振动现象的研究可以追溯到几百年以前，早期的研究常常关心的是音乐的音调或者是水波等类问题，而且多半是凭借于感性观察而未能进入定量的分析。十九世纪初，关于光

的波动性质被揭示后,有力地推动了弹性波传播理论的研究。由于地球物理学和地震学的需要,十九世纪到二十世纪初许多数学力学家致力于弹性固体中波动的研究。从数学上严格地建立弹性动力学的基本理论是从十九世纪二十年代开始的。1821年Navier首先导出了弹性体平衡和振动的一般方程,1822年Cauchy对包括动力学方程在内的经典弹性理论作了许多奠基性的贡献,从而为弹性动力学的发展奠定了基础。此后,弹性固体中波的传播成为一个广泛研究的课题,强烈地吸引着广大研究者的兴趣。在1829年,Poisson S. D. 首先指出了位移波动方程的解由两部分组成,一部分是一个标量势函数的梯度,另一部分代表了一个旋转场。这就揭示了在弹性介质内部扰动的传播由两类基本的位移波所组成,就是我们现在熟知的膨胀波和等容积波。在此基础上,Lamè于1852年明确地提出了标量势和矢量势的概念,他指出一般的弹性动力位移场可表示为一个标量势函数的梯度与一个矢量势函数的旋度之和,且这两个势函数满足两个非耦合的波动方程,分别具有膨胀波和等容积波的传播速度。位移场这种分解的引入,对于位移波动方程解提供了极为有用的知识。在这个时期,弹性波传播的研究取得了许多重大进展。如Cauchy(1830年)研究了晶体介质中平面波的传播,得到了波前传播的速度方程。一般情况下有三个波速值,在各向同性的情况下,有两个是重合的,它们与平面横波相对应。接着Poisson等(1831年)处理了初值问题,Stokes(1849年)研究了由于体积力引起的波动问题,并对于突加荷载导出了基本奇异解,后来Love对Stokes解进行了某些推广。Christoffel(1877年)讨论了间断面传播的有关问题。Kirchhoff(1882年)得到了由非齐次波动方程支配的势的积分表达式。这时对于各向同性的、均匀的、无限弹性介质中波的研究已相当完善。

1887年Rayleigh有个重大发现,这就是众所周知的Rayleigh面波,这种波以略小于等容积波速的速度沿界面传播,它在研究具有自由表面的弹性半空间的波动问题中起着极为重要的作用。Lamb(1904年)研究了表面源和埋入源产生的扰动传播问题,他指出对于面源的反应是由膨胀波前和跟在后面的等容积波与Rayleigh面波所组成,并指出随着距扰动源距离的增加,Rayleigh面波将不断增加它的优势。Lamb的讨论在地震学中有着重要的价值。

Knott在1899年首先研究了波在两个弹性半空间交接面处的反射和折射问题,后来还有许多人进行了这方面的研究工作。在均匀介质内部,由扰动激发的膨胀波和等容积波以不同速度独立地传播。然而,在介质性质不连续的交界面处,无论是反射波还是折射波都可能出现波型的转换,也就是说,在交界面处两种位移势通过边界条件以复杂的方式耦合起来。这是固体中弹性波的一个重要特征,正因为如此,增加了数学上求解的困难。在两个弹性半空间的交界面处,也可能存在一种与Rayleigh波相似的交界面波,这类面波称为Stonely波。在一个弹性半空间表面具有覆盖层时,则在层内除了有Rayleigh型的面波存在外,还可能存在另外一种称为Love波的面波,在这种波中,质点运动方向平行于介面。由于覆盖层的厚度这个特征尺寸引入到问题中来,使得Love波具有几何弥散效应。

关于杆、板、壳等结构的振动和波动问题的研究比较早。早期的研究大都属于初等理论的范畴,即沿用了材料力学的手法,引进一些近似假定来建立动力问题的支配方程。Euler(1744年)和Bernoulli(1751年)最早导出了梁的弯曲振动方程,并得到了各种边界条件下的正则振动模态和频率方程。Navier(1824年)导出了杆的纵向振动方程。1821年Germain建立了薄板振动的偏微分方程。初等理论的这些结果,当杆、板横向尺寸远比波长为小的情况下是适用的。Poisson(1829年)曾证明细杆的振动理论被包括在精确的线弹性体的

运动方程之中。如果从精确的弹性动力学理论出发，研究杆中弹性波的传播，问题将是十分困难的，除极简单情形外，至今尚未得到其精确解。问题的困难主要是由于横向特征尺寸的引入导致了复杂的几何弥散。1876年Pochhammer对无限长圆柱一般振动的精确理论分析是一个重大进展，至今它仍是研究弹性杆波导问题的基础。对于平板波导，Rayleigh和Lamb也作了类似的工作。Rayleigh (1894年)和Timoshenko (1921年)分别考虑了杆单元的转动效应和剪切变形的影响，对Bernoulli-Euler梁的弯曲波理论进行了修正，考虑了这两种效应的近似理论在近代的杆中弯曲波理论中起着重要的作用。

除以上经典理论工作外，弹性动力学的其它课题，如撞击问题，散射问题，动力实验技术以及求解各类问题的数学方法，近百年来也进行了广泛地研究，并取得了许多重大进展。二次世界大战期间，由于军事方面的特殊需要，要求了解高速撞击下物体的承载能力，使得波动问题研究更加强烈。最近几十年中，由于空间技术的发展和复合材料的利用以及地下爆炸，地震工程和石油工业等重要问题的需要，动力学问题愈来愈为更多的学科和工程部门所关心。随着电子技术的发展，容易用实验的方法来产生和检测高频率的弹性波，再加上电子计算机的广泛使用，使许多复杂的问题能借助于数值方法得以求解。所有这些都极大地推动了弹性动力学的发展。到目前为止弹性动力学已形成一套相当完善的经典理论和方法，并在近代科学和工程技术许多领域中获得广泛应用。随着科学技术的迅速发展，正不断向弹性动力学在有限变形和非线性弹性理论，非均匀及非各向同性弹性介质中的波动等方面提出许多新的课题。因此，我们说弹性动力学是在人们长期的生产斗争和科学实验中产生并发展起来的，而且随着科学的发展和技术的进步，将会显示出更加旺盛的生命力。

第二章 波动与振动

§ 2.1 波动及其分类

波动是一个极其广泛而有趣的研究课题，几乎所有学科和工程技术领域都包含着波动现象。如声波、水波、电磁波、固体中的波，量子力学中的几率波等都从不同的物理系统来研究波动问题。又如化学反应、生命过程，人口迁移以及交通流等过程中也都涉及到波动现象。尽管这些系统或过程彼此相互独立，所考察的现象和所关心的结果毫不相干，但却表现出许多极为相似的规律。可见这些不同的时间过程都受着某种共同的运动法则的制约，因而，跟踪这些时间过程的发展方程及其求解技术也必然有着一定的联系。由于波动被包含在如此广泛的自然现象之中，所以它一直在强烈地吸引着各个方面研究者的兴趣，并把许多研究领域微妙地联系起来。波动问题十分惹人注目，因此研究波动现象的数学概念和技巧取得了极为丰富的研究成果和进展，目前已形成一套相当完善的理论和方法。近年来，由于非线性效应日益被人们所关注，给波动理论的研究开辟了更为广阔的前景。

波动现象早已为人们所熟悉，然而抛开具体物理过程，概括波动现象整个范畴还难以给出它一个简明确切的定义。下述直观的定义似乎可以排除更多的限制而具有较大的覆盖性。波是一个以可以鉴别的速度，由介质的一部分向另一部分传递的可以鉴别的信号。这个信号可以理解成某种性质的扰动，它可以是某个量的极大值或突变，只要可以清楚地识别出来，并在任何时刻可以确定它的位置，而且容许在传播过程中改变其强度、形状和传播速度。简单地说，波动就是扰动在介质中的传播。扰动总是具有某种能量，因此，波的基本特征之一是能量在介质中的传递。显而易见，一个均匀场，尽管是可变的，是不会有波动现象存在的。另外，一个信号的传递若没有可以识别的速度也不称其为波动过程。

一个波动总是受到扰动源的激发而产生并通过介质而传递的，所以它既携带着扰动源的信息，又包含着介质本身的特征。如果我们的兴趣在于了解介质本身的一般的波动性质，这类问题常属于波的传播问题，如果我们关心的是某一特定扰动的传播规律，则属于波的激发问题。这两类问题的研究是相辅相成的，而且往往是耦合在一起的。

数学上最简单的波是扰动沿一个方向，如笛卡儿直角坐标系 x 轴正方向，以固定的速度 c 并保持其原来形状的传播。如果与这个扰动相关的某种特性用 ψ 来量测，在 $t=0$ 时用某个函数 $F(x)$ 来表示，则对于 $t>0$ ，扰动可表示为 $\psi(x, t) = F(\xi)$ ，此处 $\xi = x - ct$ ，于是对一个以速度 c 沿 x 正方向前进的观察者来说，其感受到 ψ 的条件是不变的。按照这种规律随时间在空间变化的量 ψ ，代表了一个沿 x 轴的正向行波。这里宗量 $\xi = x - ct$ 称为波函数 ψ 的相(位)，显然，如果 $\frac{d\xi}{dt} = 0$ ，即 $\frac{dx}{dt} = c$ ， ξ 保持常数，可见 c 是恒定相位沿 x 轴正向传播的速度，所以称为相速度。在目前的情况下，由于相 ξ 为常数时，扰动 ψ 就保持常数，所以 c 也就是扰动传播的速度，即波速。 $F(\xi) = F(x - ct)$ 的物理意义是明显的，实际上，对于某个特定的时刻 t_1 ， $F(x - ct_1)$ 仅是 x 的函数，它代表 t_1 时刻扰动 ψ 沿 x 轴的分布。经过一个

时段 Δt 以后, 函数的宗量变成 $x - c(t_1 + \Delta t)$, 显然 x 点处的函数值随着发生变化。然而如果将 x 也增加一个 $c\Delta t$, 于是函数的宗量为 $(x + c\Delta t) - c(t_1 + \Delta t) = x - ct_1$, 和原来的一样, 即 $x + c\Delta t$ 处于 $t_1 + \Delta t$ 时刻的相位与 x 处 t_1 时刻的相位相同。于是 t_1 时刻扰动的分布, 经过时段 Δt 后沿 x 正方向平移了一个距离 $c\Delta t$ (图 2.1)。由此可见, $F(x - ct)$ 代表了沿 x 轴正向以速度 c 传播的行波。不难看出, x_2 处所经历的扰动将完全重复 x_1 处所经历的扰动过程, 只是在时间上推迟了 $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{c}$ 。

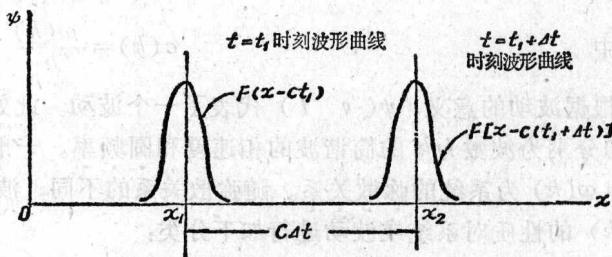


图 2.1

类似地, 对沿 x 负方向保持形状不变以速度 c 传播的扰动, 若其 $t = 0$ 时 $\psi = G(x)$, 则 $t > 0$ 以后的扰动可表示为 $\psi(x, t) = G(\eta)$, 其中 $\eta = x + ct$ 。

对于上述沿 x 轴正向行进的波, 其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.1.1)$$

借助于直接代入可以证明。同理沿 x 负方向行进的波, 其波函数满足微分方程

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - c \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (2.1.2)$$

(2.1.1) 和 (2.1.2) 是两个一阶的波动方程, 它们是描述波动现象的最简单的数学模型。显然沿 x 轴正向和负向行进的波, 它们同时满足二阶微分方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (2.1.3)$$

上式 (2.1.3) 常称为 一维波动方程, 其解为两个反向行波的迭加 (见 § 2.4)

$$\psi = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (2.1.4)$$

推广 (2.1.3) 可以得到三维的波动方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.1.5)$$

其中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, 方程 (2.1.5) 有如下形式的解:

$$\psi = f(\alpha x + \beta y + \gamma z \pm ct) \quad (2.1.6)$$

此处 f 是任意函数, α, β, γ 是常数, 且满足 $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ 。解 (2.1.6) 代表了三维介质中沿某一方向传播的 平面波, 即在特定时刻垂直于波传播方向的同一平面上各点感受到的扰动均相同。以后将会看到除平面波形式的解外, 方程 (2.1.5) 还有其它形式的解。

方程 (2.1.3) 和 (2.1.5) 在经典波动理论中起着相当重要的作用, 它们能给出许多物理现象很好地近似描述。在弹性动力学问题中, 经线性化后的波动方程基本上都可化为这两个方程。

为了讨论方便, 有必要对波动进行分类。基于不同的考虑则有不同的分类方式。如可根据所描述的物理现象对波进行分类, 也可根据支配方程的性质进行分类。下面根据方程解的特点进行分类是有用的, 尽管不是十分严格的。为简明起见, 我们只考虑一维线性波, 然而, 由此

对波所作的分类，不失去一般性，可推广到更为一般的波动问题中去。

考虑初值问题，若 $t=0$ 时施加于系统的扰动为 $\psi = F(x)$ ，可将其展成简谐函数的迭加

$$F(x) = \sum A(k) \exp(ikx) \quad (2.1.7)$$

如果 $t > 0$ ，有

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum A(k) \exp\{ik[x - c(k)t]\} \\ &= \sum A(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

其中

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} \quad (2.1.9)$$

则根据波动的意义， $\psi(x, t)$ 代表了一个波动。此处 k 称为简谐波的圆波数； $c(k)$ 和 $\omega(k)$ 分别为波数为 k 的简谐波的相速度和圆频率。一般情况下它们可能是复函数，我们称 $\omega = \omega(k)$ 为系统的弥散关系。随弥散关系的不同，波动将呈现出不同的特征。现根据 $\omega(k)$ 的性质对系统或波动进行如下分类：

(i) 如果 $\omega(k)$ 是实函数，且正比于 k ^①，则相速度 c 与波数 k 无关。这个系统是简单的，此时波动在传播过程中速度不变，形状不变，故称这样的波动为简单波或者是非弥散非耗散波。

(ii) 如果 $\omega(k)$ 是关于 k 的非线性实函数，即 $\omega''(k) \neq 0$ ，我们说系统是弥散的。在此情况下不同波数的简谐波具有不同的传播速度。于是初始扰动的波形随着时间的发展将发生波形歪曲。这样的波称为弥散波。根据引起弥散的原因不同，可分为物理弥散和几何弥散。前者是由于介质的特性所引起，弥散的关系可由问题的支配方程来导出，后者是由于几何效应所引起，其弥散关系往往由边界条件来确定。在以后所讨论的弹性动力问题中，除第九章讨论的粘弹性波外，通常认为介质为非弥散的。几何弥散效应是由于把几何上某些特征尺寸引入到问题中来所导致的。

(iii) 如果 $\omega(k)$ 是复函数，则波的相速度由 $\omega(k)/k$ 的实部给出。如令 $\omega(k) = a(k) + b(k)$ ，则解 (2.1.8) 可写成

$$\psi(x, t) = \sum A(k) \exp[b(k)t] \exp\{i[kx - a(k)t]\} \quad (2.1.10)$$

基于物理上的要求 $b(k)$ 应为负的。上式给出的波既有弥散又有耗散效应，称为耗散波。我们将在第九章粘弹性波中专门讨论这种波动的特征。

如果 $\omega(k)$ 是纯虚函数，则不能给出波动现象，这时实际上是描述了一个扩散过程。

对于一个系统或过程判别其是否为弥散的，只需假定问题有形如 $A \exp[i(kx - \omega t)]$ 的基本解，将其代入问题的支配方程（有时要满足边界条件）就得到 ω 和 k 的关系 $G(\omega, k) = 0$ ，或 $\omega = \omega(k)$ 。如将基本解代入 (2.1.3) 可得 $\omega = \pm ck$ ，可见 (2.1.3) 所描述的系统是简单系统。又如对于梁的运动方程

$$\psi_{,tt} + \nu^2 \psi_{,xxxx} = 0 \quad (2.1.11)$$

可得其弥散关系为 $\omega = \pm \nu k^2$ ，故知梁中的弯曲波是弥散的。

§ 2.2 波动方程的建立

本节以一维问题为例讨论波动方程的建立。上节指出，不同的波动现象之间表现出许多相似的特征。表明支配这些时间发展过程的运动法则遵循着某些共同的规律。守恒律就是其

^① $\omega(k)$ 是 k 的线性函数时，亦属此类。

中之一。比如，我们熟悉的质量守恒，动量守恒，能量守恒等基本定律是许多物理过程都应遵守的。

1. 运动波

现在考虑沿一个方向上运动着的某种物质流，它可以是物料在管中的移动，也可以是公路上车流的行驶，或者是洪水在河道中流动。我们把它们作为一个连续分布的量。对于这个量我们定义两个函数，一个是密度函数 $\rho(x, t)$ ，一个是通量函数 $q(x, t)$ 。前者是单位长度内包含这个量的多少，后者是单位时间内这个量流过某个截面的多少。显然这个量的流动速度为

$$v = \frac{q}{\rho} \quad (2.2.1)$$

如果这个量是守恒的，则其在区间 $[x_1, x_2]$ 上的变化率必须与流过截面 x_1 和 x_2 处的通量相平衡。

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = q(x_1, t) - q(x_2, t) \quad (2.2.2)$$

令 $x_1 \rightarrow x_2$ ，利用中值定理，得

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.2.3)$$

方程(2.2.2)是守恒律的总体形式，而微分方程(2.2.3)是守恒律的局部形式。显然在导出局部形式时对密度函数 $\rho(x, t)$ 的连续性、可微性有较高的要求。

具有散度形式的方程(2.2.3)含两个未知函数，必须补充 q 和 ρ 之间的一个关系。实际上 q 和 ρ 并不独立，可以根据理论分析或实验统计确定它们之间的关系。假如这个关系由某种手段已经得到，如

$$q = Q(\rho) \quad (2.2.4)$$

则(2.2.3)可写成

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + C(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (2.2.5)$$

其中 $C(\rho) = \frac{\partial q}{\partial \rho} = Q'(\rho)$ 。上式(2.2.5)就是一个一阶的波动方程，当 $C(\rho) = \text{Const.}$ ，就是(2.1.1)，其解为沿 x 轴正向行进的波。在实际问题中，一般 $c(\rho) \neq \text{Const.}$ ，在此情况下由于问题的非线性性质，即使初始条件 $\rho(x, 0)$ 是很光滑的，当 $t > 0$ 后的某一时刻， $\rho(x, t)$ 也会出现奇异性，导致激波出现。至于这类问题的求解，本书第十一章将予简单地讨论。

2. 理想弦线中的波

一条绷紧的弦线所构成的最简单的动力学系统，可以给出波动和振动问题基本而清晰的物理图象。由于在理想弦中排除了几何上的复杂性，从而，可以使我们避开烦杂的数学运算而把注意力集中到问题的物理本质上。有趣的是通过这个简单系统的分析所获得的许多重要信息都包含在更为复杂的系统中，这里所提供的处理问题的数学技巧对于讨论复杂系统同样具有一定的普遍意义。因此，本章后面几节将围绕弦的问题展开一些讨论，为后面讨论复杂的弹性动力学问题奠定一定的基础。