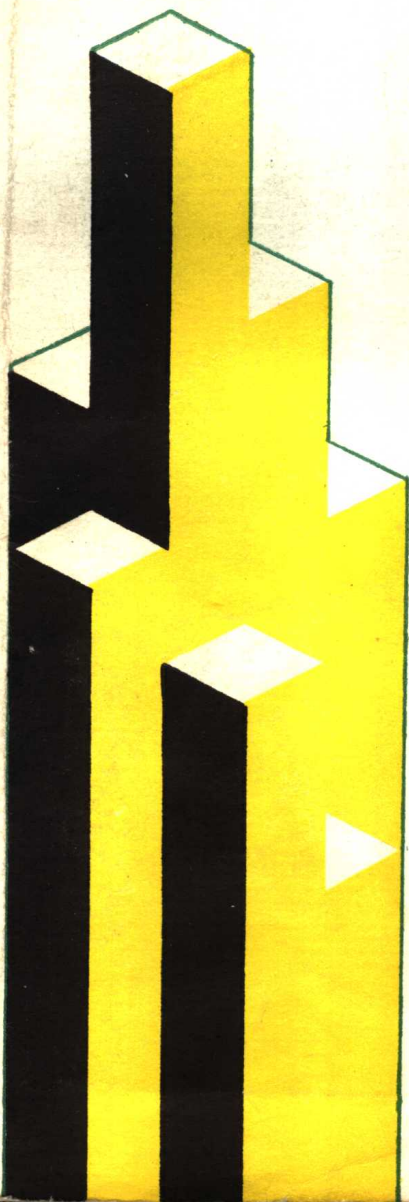


实用管理数学方法

能源出版社

肖人俊 李致安 张惠敏 编著



实用管理数学方法

肖人俊 李致安 张惠敏 编著

能源出版社

实用管理数学方法

肖人俊 李致安 张惠敏 编著

能源出版社出版 新华书店经销

国防大学第二印刷厂印制

787×1092 1/32开本 9.7印张 203千字

1989年12月第一版 1989年12月第一次印刷

印数1—2,500册

定价：3.60元

ISBN7—80018—188—×/F·23

目 录

导 言	(1)
第一章 经济和管理中的一些函数	(7)
第一节 静态市场均衡模型	(7)
一 需求函数	(8)
二 供给函数	(11)
三 静态市场均衡模型	(13)
第二节 国民收入均衡模型	(23)
一 国民收入	(23)
二 消费函数	(24)
三 国民收入均衡模型	(26)
第三节 损益平衡分析	(33)
一 成本函数	(33)
二 收益函数	(35)
三 损益平衡分析	(36)
第四节 常用的生产函数	(44)
一 生产函数	(45)
二 柯布——道格拉斯生产函数	(47)
三 CES生产函数	(50)
第二章 需求规律分析——微分法应用 (一)	(53)
第一节 销售增长率	(53)

一	复利与贴现·····	(53)
二	销售增长率·····	(56)
三	函数积与和的增长率·····	(59)
四	库存期限的最佳选择·····	(62)
第二节	供需函数的变化率·····	(65)
一	需求函数与供给函数的导数·····	(65)
二	需求函数与供给函数的二阶导数·····	(68)
第三节	比较静态分析·····	(69)
一	线性市场模型的比较静态分析·····	(70)
二	一般市场模型的比较静态分析·····	(74)
第四节	供给与需求的弹性·····	(77)
一	需求的价格弹性·····	(78)
二	供给的价格弹性·····	(85)
三	需求的收入弹性·····	(87)
第五节	供给与需求的局部弹性·····	(89)
一	需求函数的局部弹性·····	(89)
二	供给函数的局部弹性·····	(97)
第三章	企业管理最优化——微分法应用 (二) ·····	(99)
第一节	边际分析·····	(99)
一	导数与边际分析·····	(99)
二	多元生产函数的边际分析·····	(107)
第二节	商品生产最优化·····	(117)
一	一种商品的最佳生产·····	(118)
二	多种商品的最佳生产·····	(139)
三	同产品多市场的最优经济效果·····	(149)
四	多工厂一市场的最优经济效果·····	(155)

五	利润最大和投入决策·····	(158)
第三节	在约束条件下的最优经济效果·····	(160)
一	在预算约束下的效用最大化·····	(161)
二	在产出约束下两种投入的最佳组合·····	(170)
三	其他经济例题·····	(181)
第四节	乘数原理·····	(186)
一	投资乘数·····	(186)
二	政府支出乘数、赋税乘数和平衡预算乘数·····	(189)
第四章	确定性存储模型——微分法应用 (三) ·····	(195)
第一节	基本概念·····	(196)
一	需求与补充·····	(196)
二	费用分析·····	(197)
三	存储策略·····	(198)
第二节	确定性存储模型·····	(198)
一	基本的经济批量模型·····	(199)
二	允许缺货的经济批量模型·····	(202)
三	经济生产批量模型·····	(208)
四	允许缺货的经济生产批量模型·····	(211)
第三节	有价格折扣的经济批量模型·····	(215)
一	有数量折扣的模型·····	(216)
二	有临时降价的模型·····	(221)
第五章	企业管理中的积分方法 ·····	(225)
第一节	最大经济效益的最佳时刻·····	(225)
一	利润最大的最优时刻·····	(225)
二	设备更新的最佳时刻·····	(227)

第二节	消费者和生产者剩余.....	(229)
一	消费者剩余.....	(229)
二	生产者剩余.....	(232)
第三节	经验曲线.....	(234)
第四节	收入分配不均匀的系数.....	(238)
第五节	资金流量的贴现.....	(241)
一	存量与流量.....	(241)
二	资本积累和投资.....	(242)
三	均匀流的贴现.....	(243)
四	持久流量的贴现.....	(248)
第六章	微分方程用于动态市场模型.....	(250)
第一节	从边际函数求总函数.....	(250)
第二节	动态市场的均衡稳定性.....	(258)
一	静态与动态均衡分析.....	(258)
二	动态市场的均衡稳定条件.....	(260)
第三节	具有价格预测的市场模型.....	(265)
一	价格趋向和价格预测.....	(265)
二	价格的时间路程.....	(267)
第七章	差分方程用于动态市场模型.....	(271)
第一节	差分和差分方程.....	(272)
一	差分的概念.....	(272)
二	一阶线性差分方程.....	(273)
三	一阶线性差分方程的解法.....	(274)
四	均衡的动态稳定性.....	(280)
第二节	蛛网模型.....	(283)
第三节	有存货的市场模型.....	(291)

第四节	其它经济问题上的应用.....	(295)
一	有滞后期的收入模型.....	(295)
二	购置设备的选择.....	(297)

附录

导 言

数学是以抽象的数量关系形式描述客观世界运动方式的一门科学，它研究的内容既有自然现象也有社会现象。但是，由于社会现象、经济问题错综复杂，牵涉的随机因素较多，人们企图用数学方法描述复杂的经济现象的努力未能成功。历史上曾揭开过物理学、数学方面的奥秘而有所发现的一些科学家，当他们把注意力转向社会现象的研究时，却未能对经济科学引起同样大的影响。人们可以给自然现象中力、能、原子核等概念下一个完整的定义，却很难给社会现象中的智力、农民、工人等下一个无可争议的定義。人们可以迅速地收集到有关的气温、风力、风向等的准确数据，做出恰当的天气预报；而对于消费者的需求往往很难掌握到庞大而准确的统计资料，致使预测消费者的实际需求往往误差很大。因此，长期以来数学主要是为自然科学和生产技术服务，数学自身的发展动力也来源于自然科学和生产技术。一直到近四、五十年来，由于经济科学发展的要求，它在继续深入质的研究的同时，加强了数量关系的分析和研究。以纽曼和莫尔斯特恩的《博弈论与经济行为》一书的发表为转折，数学与经济科学的结合进一步加深。因而，把微积分、微分方程、差分方程和矩阵代数等数学方法引进经济科学，使经济理论的研究工作取得了很大进展，使人们对经济规律认识的

精确性有了显著提高。特别近二十年来，许多经济学家包括诺贝尔经济学奖金获得者的学术论文，如保罗·A·萨缪尔森的《分析技巧、集体选择》，T·C·库普曼的《最优化概念及其应用》以及勒·康托罗维奇的《数学在经济中的应用、成就、困难、前景》等都是把数学和经济学结合得十分紧密的范例。这些著作在正确分析经济概念的条件下，利用数学工具做为辅助手段，使经济科学、管理科学的研究收到了简洁、清晰和精确的良好效果。同时，无形中也给某些经济学家的责难：“经济现象太复杂。现有数学不足以用来分析经济问题”；“经济变量不具备连续性，经济问题不确定性大，用数学分析只能是简化的数学游戏，不可能准确预测”等以有力的批驳。从此，数学方法也步入经济科学的领域，成为分析、研究社会经济现象的有力工具。

通过数学方法分析研究经济现象的途径，可以是一组图表，也可以是文字阐述，但最主要的是通过经济数学模型来实现的。

一、数学模型的分类

有各种类型的模型。如按所研究对象范围而分，则经济数学模型可分为宏观模型和微观模型；研究整个国民经济、某一地区、某一部门经济关系的模型属于宏观模型，研究某一经济单位、某种产品的模型属于微观模型。如按包括方程个数的多少而分，则模型可分为单一方程模型和联立方程组模型。只用一个方程研究自变量与因变量数量关系的模型是单一方程模型；用联立方程组研究自变量和因变量多方面数量关系的模型是方程组模型。如按经济变量发生的时间而

分，则可分为动态模型和静态模型。模型所反映经济关系的经济变量，是在同一时间发生的，则模型是静态的；模型所反映经济关系的经济变量，是在不同时期发生的，则模型是动态的。如果按模型所含变量次数高低而分，则可分为线性模型和非线性模型。模型是由含一个或多个变量的一次方程构成的，则模型是线性的；模型是由含一个或多个变量的二次方程构成的，则模型是非线性的等等。

二、数学模型的优缺点

经济数学模型具有的优点，首先是把问题描述得简洁、清晰、一目了然，有助于发现重要的因果关系，从而，可以清楚地指出哪些数据与分析密切相关；其次，由于对问题的全部结构了如指掌，有利于从整体出发来考虑和处理各因素之间的相互关系；第三，可以通过数学模型使用高效率的电子计算机来分析问题。但是数学模型是经济理论现象的有效描述，不能过于简单化。这样，模型做出的最优化决策或预测与现实世界的实际情况，才有可能误差最小。另外，在使用模型时，也应注意不要过分重视运算的精确度和严密性，如果这样往往容易忽视了建立模型的真正目的。

三、数学模型的成分

任何经济理论都是从现实世界抽象出来的，而经济数学模型只是一种理论结构。它是在某些假定的条件下，对现实经济现象加以数学描述的一种经济分析方法。由于实际经济现象牵涉因素复杂，而这些因素对于分析、研究又并非同等重要的。所以，模型必然删除枝节，突出有相互联系的经

济关系。通常，是由许多互相关联的变量构成方程，而又由一组方程构成模型，随之采用有关的数学方法通过逻辑推理和计算得出最优化结果。

(1) 变量和参数

变量是可以取不同的值的量，如经济学中的价格、收益、成本、国民收入、消费等等。变量这个术语，在经济理论中有内生变量和外生变量之分，由模型求出解值的变量称为内生变量，由模型外的力量所决定，且其值被认为是已知的变量称为外生变量。不过一个模型的内生变量很可能是另一模型的外生变量。比如，在市场理论中分析价格(P)时， P 是内生变量，而在消费理论中，对单个消费者来说，价格为已知数， P 是外生变量。

常量是不变的量，它往往与变量结合成为这个变量的系数。但是，系数也可以是符号而不是数字。比如， aP (P 为价格，变量)。这里，在某种情况下， a 表示为一已知常数，由于 a 没有被指定一个具体数值，实际上它可以任意取值。粗略地说，它具有特殊身分，是一个可变常量。因而，它有一个特殊名称：参变量，也简称参量。注意，虽然可赋予参数不同的值，但在模型中仍然把它看作已知数。所以，有时也习惯于称它为常量。参数很象外生变量，因为二者在模型中都被看作是已知的。在有的经济学中，为了简便起见，只用一个名称：参数来表示二者。

(2) 方程式

变量虽可独立存在，但是，只有用方程式或不等式，使它们互相关联时，才确实有意义。模型中常见的有三种方程：定义方程、行为方程和均衡状态。定义方程是指在两个

含义完全相同，而表述不相同的表示式之间建立的恒等式。比如，总利润 (π) 定义为总收益 (R) 对总成本 (C) 的超额。因此，有恒等式 $\pi \equiv R - C$ ，通常，也可写成 $\pi = R - C$ 。行为方程是指一变量的变化行为与其他变量变化相适应的方式。比如，某工厂产出的总成本 (C) 对产出变化 (Q) 的反应，可表为 $C = f(Q)$ 。均衡状态也是一个方程，它是在模型中包含均衡概念时，才用来描述达到均衡的先决条件。比如，在市场均衡模型中，需求量 (Q_d) 与供给量 (Q_s) 的均衡状态方程是 $Q_d = Q_s$ 。

四、建立模型的过程

概括地说，建立模型要根据不同的问题，采用不同的方式和过程。通常是这样的：

(1) 收集资料分析问题

在建立模型之前，有些实际经济问题往往不够明确，有的甚至含糊不清。因此，必须尽可能多地收集与所研究的问题有关的统计数据。然后，进行整理、分析。重要的是要识别变量、参数之间的因果关系，构成行为方程。

(2) 确定目标建立模型

建立模型来表示所研究的问题的关键在于确定适当的目标函数。目标要尽可能明确、具体。如果所研究的问题中需要构成一个以上的目标，则要仔细地比较各项目标，考虑它们的相对重要性。

(3) 依据模型求解

数学模型确定后，随之而来的是推导出解来。关于运用适当的数学方法对模型求解的问题，我们将在以下各章中详

细讨论。但是，必须认识到由于模型是现实问题的理想化的表述，许多现实问题中的难以确定或无法估量的因素，都被删除，因此，从模型中导出的解，只是就所讨论的模型而言，如果是最优解，也只是对这个模型为最优。不过，所得到的解，必须非常近似地满足现实问题的要求，使模型的解可供决策者作为行动指南的一个比较满意的答案。

(4) 检验模型与解

判断一个模型是否有效的准则，是决策者依据模型所提供的方案能否作出满意的抉择。为此，首先要核对在确立模型时，有无明显的错误或疏忽，是否对所研究的现象了解清楚，是否有某一重要因素或相互关系没有包括在模型之内，或者，是否没有正确估计某些参数。其次，核对模型中的数学表达式是否确切，在量纲上是否一致。最后，核对在运算上有否失误等等。经过一系列检验之后，就可着手改进模型，直至满意为止。也有这样的情况，由于现实世界客观情况不断地变化，有可能使模型不再有效。如果发生这样的事情要尽可能及早察觉，并相应地调整或修改模型及其解。

(5) 模型解的实施

在实施决策者所决定的最后解的过程中，重要的是要及时发现任何疵病，并随时给以纠正，以保证使解近似于实际问题的要求。

必须说明，以上所述只是应用数学方法描述经济问题过程的一个粗略的、不全面的叙述。目前还没有一个可以包括所有情况并能始终遵循的标准过程，这将有待于今后进一步的创造和革新。

第一章 经济和管理中的一些函数

在经济和管理学中，通常使用的经济量，如需求、价格、成本、收益、利润、国民收入、投资、消费以及储蓄等等，都不是孤立存在而是相互依赖的。这些经济量之间的关系可以由图或表来描述，也可以由函数关系来表达。由于函数可以把错综复杂的经济量之间的关系简明清晰地表达出来，便于数学逻辑推理导致结论。因此，在经济分析中，数学概念用得最广泛的是函数概念。它是采用数学方法建立数学模型、研究分析经济问题的基础。

第一节 静态市场均衡模型

市场均衡就是商品供给和商品需求的均衡。需求和供给是商品交换的两个对立而又紧密相联的经济现象。需求是买方，供给是卖方。一方面，消费者持有一定数量的货币需要购买商品；另一方面，企业拥有一定数量的商品需要销售。通常，把前一种现象称为商品需求；后一种现象称为商品供给。因此，市场上商品的供需关系表现了卖方和买方的关系，生产者和消费者的关系。

一、需求函数

商品需求是指在一定时期和一定条件下，消费者对某种商品的需求，并且是有支付能力的需求。而不是指消费者占有商品的愿望。市场上某种商品的需求 (Q_d) 依赖于商品本身的价格 (P)，其他相关商品或代用品的价格 (P_1)，消费者的收入 (Y)，嗜好 (T) 以及广告费 (A) 等等。因此，需求函数可写成

$$Q_d = f(P, P_1, Y, T, A \dots)$$

例如，某汽车公司预测某年内的需求量 Q_d 是汽车平均价格 P 、人均可支配收入 Y 、人口 P_o 、信贷获得指数 C 以及广告费 A 的线性需求函数为

$$Q_d = a_1 P + a_2 Y + a_3 P_o + a_4 C + a_5 A$$

其中， $a_1, a_2, \dots, a_5$ 是需求函数的参数。将一组假设的参数值代入后，则上式可写成

$Q_d = -3000P + 1000Y + 0.05P_o + 1500000C + 0.05A$
它表明汽车平均价格每提高1元，汽车需求量将减少3000辆，人均可支配收入每增长1元，它将增加1000辆，人口每增加1人，它将增加0.05辆，信贷获得指数每增加1单位，它将增加1500000辆；广告费用多支出1元，它将增加0.05辆。

但是，为了研究的方便，在经济分析中，只把注意力集中在商品需求与其本身价格的关系上，而假设其他因素均为常量。因而，在某一时间，消费者对某种商品的需求数量 (Q_d) 取决于这种商品本身的价格 (P)，即 $Q_d = f(P)$ 。例如，在上例中，设人均可支配收入为2000元，人口为200000000人，信贷获得指数为1，广告费为100000000元，

则汽车价格变动与需求量变动之间的关系可写成

$$\begin{aligned} Q_d &= -3000(P) + 1000(2000) + 0.05(200000000) \\ &\quad + 1500000(1) + 0.05(100000000) \\ &= 18500000 - 3000P \end{aligned}$$

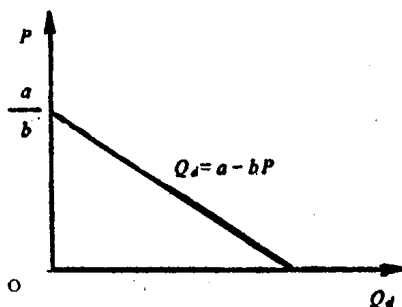


图 1—1

上式显示，价格越低需求量越大。

在经济分析中最简单的需求函数是线性的，其一般式为

$$Q_d = a - bP$$

其中， Q_d 为需求量， P 为单价， a 、 b 是两个大于零的参数。它们之所

以假设为大于零，是因为 $a > 0$ ，可以使需求为正；而 $b > 0$ ，可以保证需求函数单调递减。

由于经济意义的考虑， $Q_d = a - bP$ 的定义域和值域均为非负，所以，只在第一象限有图象，如图 1—1 所示。它是一条自左上方向右下方倾斜的连续曲线，称之为需求曲线。

必须说明，图 1—1 把价格绘在纵轴上，数量绘在横轴上，是按照经济分析中的习惯绘制的。许多年前，在西方的竞争市场上，企业对产品价格没有控制能力，但它能控制产量，而通过产量决定产品的市场价格。所以，在经济理论的原始模式中，价格是因变量，需求量是自变量。如果按照数学上的习惯，则应用横轴表示自变量 P ，而以纵轴表示因变量 Q_d 。

例 1 某玩具店每周销售电动卡车 1000 部，每部售价 5