庞家驹 主编

机械振动习题集

附题解与答案

清华大学出版社

简 介

本书包括线性振动（从单自由度系统、两自由度系统、多自由度系统到连续系统）和非线性振动的基本理论、基本方法以及工程应用方面的各种类型的习题，共五章，364题。大部分题给出题解，全部有答案。是高等工科院校师生和从事机械振动方面工作的工程技术人员的参考书。

机械振动习题集
——附题解与答案
庞家驹 臧剑秋 吴文洲 编
*
清华大学出版社出版
北京 海淀 清华园
北京印刷一厂印刷
新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售
*
开本：850×1168 1/32 印张：$11^3/_4$ 字数：326千字
1982年12月第一版 1983年5月第一次印刷
印数：1～40,000
统一书号：15235·63 定价：1.55元

前　　言

振动理论已日益成为工科院校许多专业的一门必修理论课程和越来越多的工程技术人员工作中所需要的基础知识。众所周知，无论是在学校学习或自学，除了必需有较好的教材和参考书外，通过一定量习题巩固和深化课程基本内容是一个重要环节。在有限的学习时间内选多少和挑那些题目才能收到最好的效果，往往是任课教师颇费思考和自学者热切希望引导的一个问题。为此编者结合教学经验编写了这本习题集，希望能在这个问题上有所裨益。

本书包括线性振动(从单自由度系统、两自由度系统、多自由度系统到连续系统)和非线性振动的基本内容。在选题和作题解时重点放在巩固、深化基本概念、基本方法和提高分析问题的能力上。注意了选取不同性质和不同类型的，以及有助于工程实际应用的题目，还包括工程上常用的一些近似计算方法。每章每节的题目尽可能按不同性质由浅入深作了安排。大部分题目给了题解，全部给了答案。数字计算题采用了国际单位制和工程单位制并用的办法。它是高等工科院校师生和从事机械振动方面工作的工程技术人员的参考书。

本书第一章至第四章由清华大学工程力学系固体力学教研组庞家驹和北京钢铁学院基础部力学教研组臧剑秋、吴文洲编选，第五章由臧剑秋编选。由庞家驹主编。全书蒙清华大学万嘉镄教授审阅，对此深表感谢。由于水平所限，书内肯定有错误和不妥之处，衷心希望读者提出宝贵意见。

编者

1982.1

常用符号表

A——自由振动振幅
A——面积
B——强迫振动振幅
C——阻尼系数
D，d——直径
E——弹性模量
e——偏心距
F——力
f——频率
G——剪切弹性模量
g——重力加速度
H，h——高度
I——转动惯量
J——截面惯性矩
K——弹簧刚度
L，l——长度
M——力矩、弯矩
M，m——质量
M_t——扭矩
N，n——转速
n——衰减系数
P——力
p——固有圆频率
Q——广义力
q——广义座标
R，r——半径

T——周期
T——动能
T——张力
t——时间
U——势能
V——体积
v——速度
W，w——重量
W——功
u，v，w——位移
x，y，z——位移、座标
$\dot{x}$，$\dot{y}$，$\dot{z}$——速度
$\ddot{x}$，$\ddot{y}$，$\ddot{z}$——加速度
β——放大因子
γ——重度
δ——柔度系数
δ——对数减幅系数
ε——应变
ξ——相对阻尼系数
η——隔振系数
θ——转角
θ，ϕ，ψ——角位移、角座标
$\dot{\theta}$，$\dot{\phi}$，$\dot{\psi}$——角速度
$\ddot{\theta}$，$\ddot{\phi}$，$\ddot{\psi}$——角加速度
λ——频率比
ν——振幅比
ρ——密度
ρ——回转半径
τ——时间
ϕ——自由振动相位角

ψ——强迫振动相位角
ω——激振圆频率
ω——角速度

常用矩阵符号表

$[M]$——质量矩阵
$[K]$——刚度矩阵
$[\delta]$——柔度矩阵
$\{A\}$——主振型列阵
$[A]$——主振型矩阵
$[M_p]$——主质量矩阵
$[K_p]$——主刚度矩阵
$\{A_N\}$——正则振型列阵
$[A_N]$——正则振型矩阵
$[M_N]$——正则质量矩阵
$[K_N]$——正则刚度矩阵
$[C]$——阻尼矩阵
$[C_N]$——正则阻尼矩阵
$[D]$——动力矩阵
$\{F\}$——力列阵

目　录

第一章　单自由度系统振动

一　自由振动

1-1　用加速度计测得一弹簧质量系统在简谐振动时某点最大加速度为 5 g（g=980 cm/s^2）．已知系统的固有频率为 25 Hz，求此系统的振幅和最大速度是多少？

提示：简谐振动的振幅、最大速度和最大加速度之间有 $\dot{x}_{max}=Ap$，$\ddot{x}_{max}=-Ap^2$ 的关系．

答案：$A=0.1986$ cm；$\dot{x}_{max}=31.19$ cm/s

1-2　已知一弹簧质量系统的振动规律为

$$x=0.5\sin pt+0.3\cos pt \qquad \text{cm}$$

式中　$p=10\pi$　1/s。

(1) 求其振幅、最大速度、最大加速度和初相位；

(2) 以旋转矢量表示出它们之间的关系．

提示：任意个同频率的简谐振动可以合成为一个与原频率相同的简谐振动．

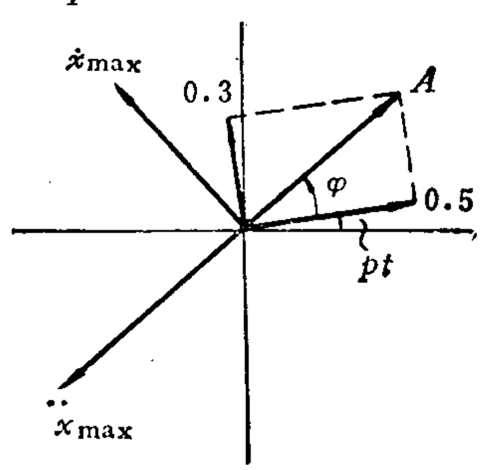

图 1-2

答案：(1) $A=0.583$ cm，$\dot{x}_{max}=18.32$ cm/s，$\ddot{x}_{max}=575.5$ cm/s^2，$\varphi=30°57'50''$

(2) 如图 1-2

1-3　测得一系统两点的振动规律为

$$x_1=3\cos 20t-4\sin 20t \quad \text{cm}$$

$$x_2=1.5\sin(20t-30°)-2\cos 20t \quad \text{cm}$$

求此两点的振幅和它们之间的相位差，并用旋转矢量表示之。

答案：$A_1=5\text{ cm}$，$A_2=3.04\text{ cm}$

$\varphi=\varphi_2-\varphi_1=151°48'$

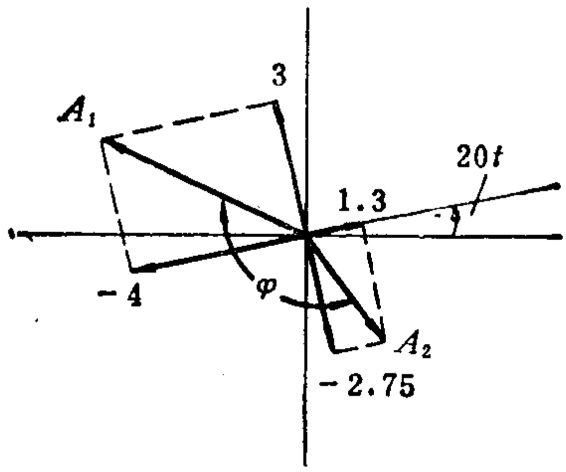

图 1-3

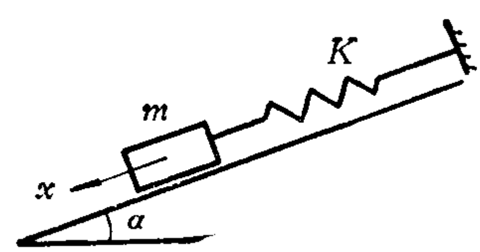

图 1-4

1-4 一弹簧质量系统沿光滑斜面作自由振动，如图 1-4 所示。试列出振动微分方程，并求出其固有圆频率。

解：方法(1) 以质量块的静平衡位置为原点，设 x 座标，根据牛顿定律可得振动微分方程

$$m\ddot{x}+Kx=0$$

其解为
$$x(t)=A\sin(pt+\varphi)$$

固有圆频率为
$$p=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

方法(2)以弹簧自由状态时的自由端为原点，则微分方程为

$$m\ddot{x}+Kx=mg\sin\alpha$$

其解为
$$x(t)=A\sin(pt+\varphi)-\frac{mg\sin\alpha}{K}$$

固有圆频率仍为
$$p=\sqrt{\frac{K}{m}}$$

它只决定于系统的物理特性 m 与 K，与座标无关。

1-5 一小车 P 自高 h 处沿斜面滑下，与缓冲器相撞后，随同缓冲器一起作自由振动。弹簧刚度为 K，斜面倾角为 α，小车与斜

面之间摩擦力忽略不计．求小车的振动周期和振幅。

答案： $$T=2\pi\sqrt{\frac{P}{gK}}$$

$$A=\sqrt{\frac{P}{K}\left(2h+\frac{P}{K}\sin^2\alpha\right)}$$

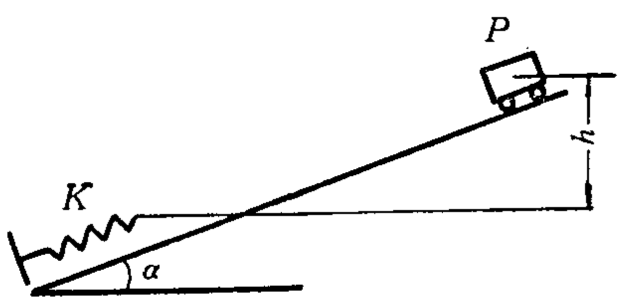

图 1-5

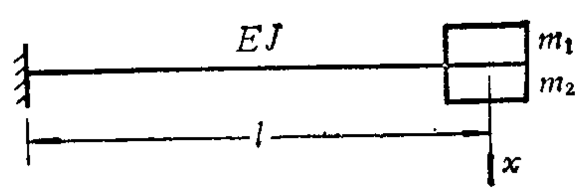

图 1-6

1-6 某仪器中一元件为一等截面的悬臂梁，质量可以忽略．在梁的自由端有两个集中质量 m_1 与 m_2，由电磁铁吸住．今在梁静止时打开电磁铁开关，使 m_2 突然释放．试求 m_1 的振幅．

解：方法(1) 把梁自由端只有 m_1 时的静平衡位置作为原点，设 x 座标．振动微分方程为

$$m_1\ddot{x}+Kx=0$$

式中 $$K=\frac{3EJ}{l^3}$$

其解为 $$x(t)=a\sin pt+b\cos pt$$

$$p=\sqrt{\frac{3EJ}{m_1l^3}}$$

由初始条件 $$t=0,\ x_0=\frac{m_2g}{K},\ \dot{x}_0=0$$

得 $$b=\frac{m_2g}{K},\ a=0$$

初始条件响应为 $$x(t)=\frac{m_2g}{K}\cos pt$$

振幅为 $$A=\frac{m_2g}{K}=\frac{m_2gl^3}{3EJ}$$

方法(2) 以未释放 m_2 前的静平衡位置为原点，则振动微分方程为

$$m_1\ddot{x}+Kx=-m_2g$$

其解为 $$x(t)=a\sin pt+b\cos pt-\frac{m_2g}{K}$$

初始条件为 $$t=0,\quad x_0=0,\quad \dot{x}_0=0$$

$$b=\frac{m_2g}{K},\quad a=0$$

初始条件响应为 $$x(t)=-\frac{m_2g}{K}(1-\cos pt)$$

振幅为 $$A=\frac{m_2g}{K}$$

可见响应的表达式对于选取的不同座标是不同的，但振幅与所选座标无关.

1-7 一圆盘以等角速度 ω 在水平面内转动．圆盘内有一直槽，槽内有一弹簧 K 联结一质量为 m 的滑块，如图 1-7 所示．当滑块 m 在圆心 O 点时，弹簧为原长．如滑块由锁住的初始位置 x_0 突然释放，求

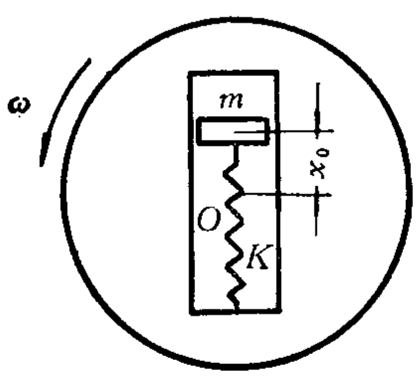

图 1-7

(1) 释放时滑块的加速度；

(2) 滑块经过 O 点时所受到的力．滑块与槽壁之间摩擦力忽略不计．

提示：滑块经过 O 点时有哥氏加速度 $a_K=2\omega v$.

答案： (1) $\ddot{x}_0=x_0\left(\omega^2-\frac{K}{m}\right)$；

(2) $F=2m\omega x_0\sqrt{\frac{K}{m}-\omega^2}$

试分析当 $\omega^2\geqslant\frac{K}{m}$ 时，将出现什么状况.

1-8 一重块 W_1 悬挂在一弹簧 K 的下端，处于静平衡状态，如

图 1-8 所示．另一重块 W_2 自高度为 h 处落下，然后与 W_1 一起作自由振动．试写出系统的振动微分方程，并求出其固有频率与响应．

提示：W_1 与 W_2 一起开始振动的初始速度可由 W_1 与 W_2 碰撞前后动量守恒来决定(碰撞过程重块自重忽略不计)，

$$v_0=\frac{W_2}{W_1+W_2}\sqrt{2gh}.$$

答案：
$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Kg}{W_1+W_2}}$$

$$x(t)=\frac{W_2}{K}\left[\sqrt{\frac{2Kh}{W_1+W_2}}\sin pt+(1-\cos pt)\right]$$

$x(t)$以 W_2 与 W_1 接触以前的静平衡位置为原点．

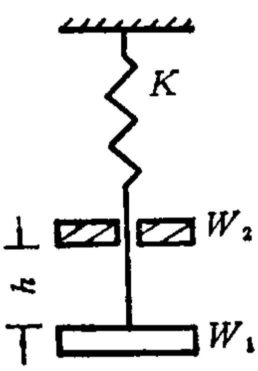

图 1-8

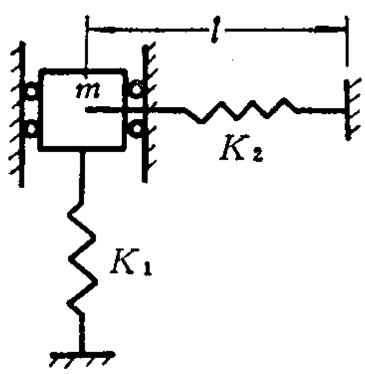

图 1-9

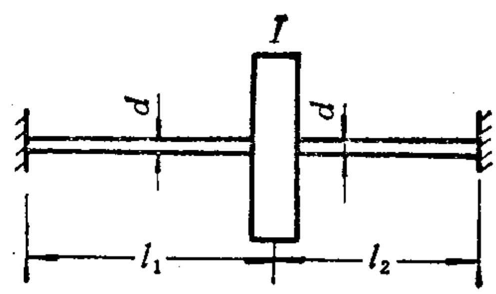

图 1-10

1-9 一弹簧质量系统如图 1-9 所示．弹簧 K_2 左端联结于质量 m 的质心，处于水平位置时长度为 l，具有初始张力 T_0．假设振动过程中 T_0 可视为不变，求系统作微振动的固有频率．

答案：
$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K_1l+T_0}{ml}}$$

1-10 求图 1-10 所示轴盘系统扭转振动的固有频率．

答案：
$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(l_1+l_2)}{32Il_1l_2}}$$

1-11 一单层房屋结构可简化成如图 1-11(a)所示的模型．房

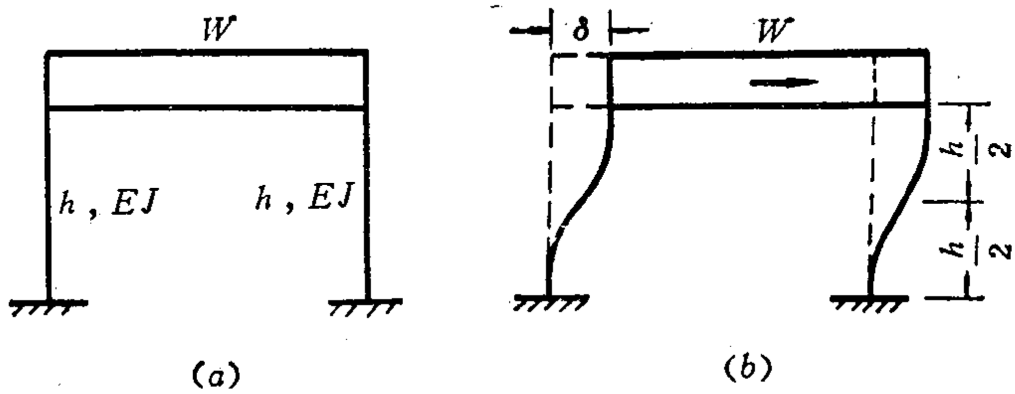

图 1-11

顶重W，视为一刚性杆，柱子高 h，视为无质量的弹性杆，其抗弯刚度为 EJ. 试求该系统作水平方向振动时的固有频率.

解：本题可用静变形法求系统的固有频率.

在系统作水平方向振动时，两柱子的水平位移 δ 如图 1-11(b) 所示. δ 相当于两根长度为 $h/2$ 的悬臂梁受到自由 端剪力 $\dfrac{W}{2}$的作用所产生的挠度之和. 由材料力学可知

$$\delta=2\left[\frac{\left(\frac{W}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right)^{3}}{3\,EJ}\right]=\frac{Wh^{3}}{24\,EJ}$$

$$p=\sqrt{\frac{g}{\delta}}=\sqrt{\frac{24\,EJg}{Wh^{3}}}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{24\,EJg}{Wh^{3}}}$$

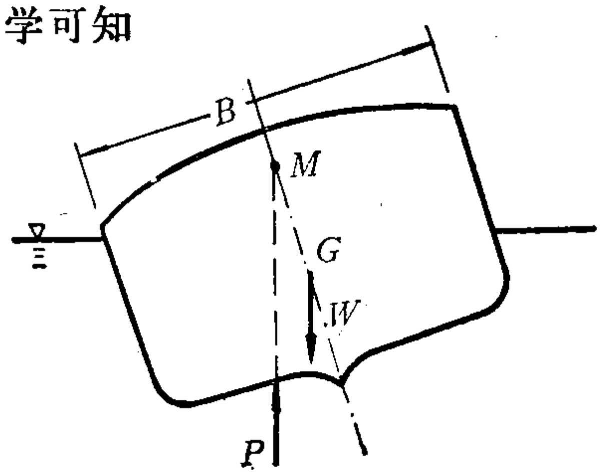

图 1-12

1-12 一货轮重心处的横截面如图 1-12 所示. G 为重心. M 为稳心，是浮力P的作用线与船体中心线的交点. 当船有倾斜时，由浮力与重力组成的恢复力偶矩使船体绕重心作摆动. 已知 $MG=h=92\,\text{cm}$，船宽 $B=15.20\ \text{m}$， 绕船体重心G轴的回转半径为 $\rho=0.35\,B$. 求船体微摆动的周期.

答案： $$T=\frac{2\pi\rho}{\sqrt{hg}}=11.13\ s$$

1-13 一轮子的轮缘重 W，平均半径为 r，用 n 根辐射状辐条联接于半径为 r_0 的固定轮轴上，如图 1-13 所示．辐条两端都是铰链，装配时已有很高的初张力 S_0． 当轮缘作微幅扭振时，此张力可假定保持不变．求轮缘的扭振周期．

解：设座标 ϕ 如图．轮缘转动 ϕ 角后，每一辐条中张力 S_0 不再通过轴心 O，而有切向分量：

$$S_0 \sin\theta \approx S_0\theta \approx S_0 \frac{r_0\phi}{r-r_0}$$

由动量矩定理，可得振动微分方程：

$$\frac{W}{g}r^2\ddot{\phi} + nS_0\frac{r_0 r}{r-r_0}\phi = 0$$

由此得
$$p = \sqrt{\frac{nS_0r_0g}{Wr(r-r_0)}}$$

故
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Wr(r-r_0)}{nS_0r_0g}}$$

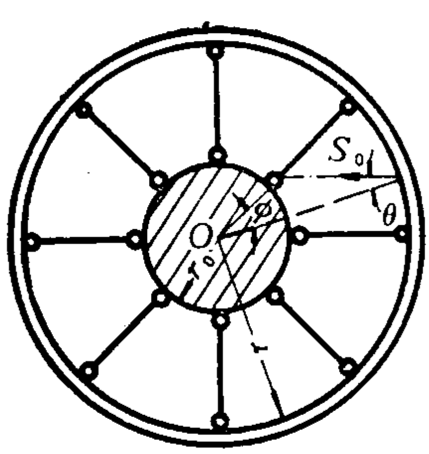

图 1-13

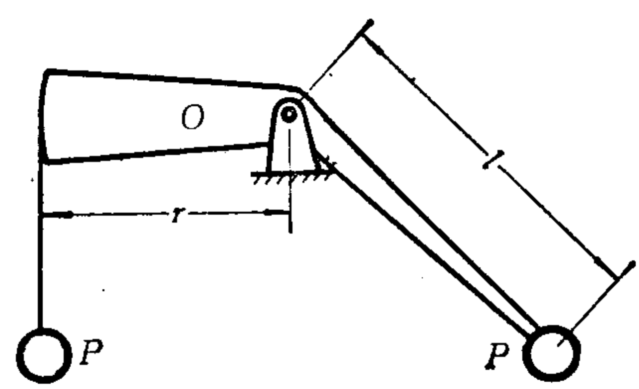

图 1-14

1-14 图示杠杆系统在两相等重物 P 作用下处于静平衡位置．杠杆重量忽略不计．试求杠杆绕 O 轴作微摆动时，系统的固有频率．

答案：
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(l^2-r^2)^{\frac{1}{2}}g}{l^2+r^2}}$$

1-15 某测振仪结构如图 1-15 所示．摆重量为Q，由扭转刚度为K_ϕ的螺线弹簧联结，并维持与铅垂成α角的位置．摆对O点的转动惯量为I．摆的重心到转动轴O点的距离为S．求此测振仪的自振周期．

解：设座标ϕ如图。在静平衡时

$$K_\phi \phi_s = QS\sin\alpha \tag{1}$$

式中ϕ_s为螺线弹簧的初始转角．微振动时，由动量矩定理，

$$I\ddot{\phi} = -K_\phi(\phi + \phi_s) - QS\sin(\alpha + \phi) \tag{2}$$

将（1）式代入（2）式，并使$\cos\phi \approx 1$，$\sin\phi \approx \phi$，得

$$I\ddot{\phi} + (K_\phi + QS\cos\alpha)\phi = 0$$

故

$$p = \sqrt{\frac{K_\phi + QS\cos\alpha}{I}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{K_\phi + QS\cos\alpha}}$$

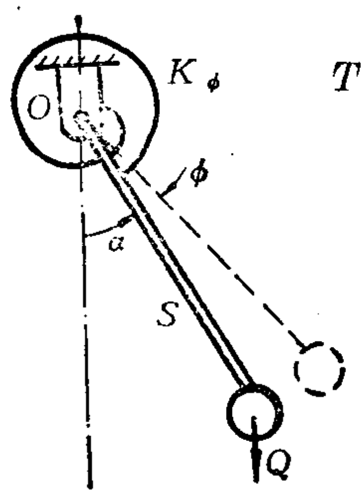

图 1-15

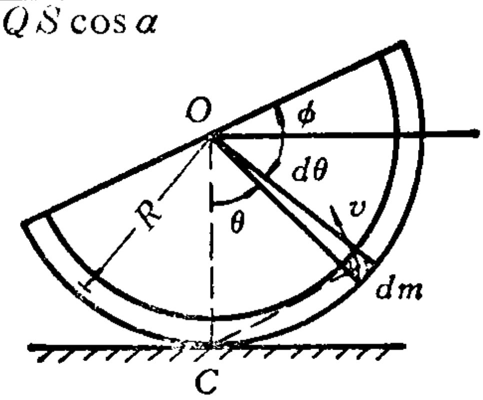

图 1-16

1-16 一半圆薄壁筒，平均半径为R，在一粗糙平面上作微摆动，如图 1-16 所示．试求其固有圆频率．

解：本题利用能量原理．设座标ϕ如图．取薄壁筒的一个任意微段$dm = \rho R d\theta$（ρ为薄壁筒单位弧长的质量）．该微段在摆动时的线速度为

$$v = \left(2R\sin\frac{\theta}{2}\right)\dot{\phi}$$

于是薄壁筒在摆动时的总动能为

$$T=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}+\phi}^{\frac{\pi}{2}+\phi}\left(2\,R\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\dot{\phi}^2\rho R d\theta=\rho R^3(\pi-2\cos\phi)\dot{\phi}^2 \tag{1}$$

总势能为

$$U=\int_{-\frac{\pi}{2}+\phi}^{\frac{\pi}{2}+\phi}\rho g R^2[\cos(\theta-\phi)-\cos\theta]d\theta=$$

$$=2\,\rho g R^2(1-\cos\phi) \tag{2}$$

由 $\frac{d}{dt}(T+U)=0$

将(1)(2)两式代入，并使$\cos\phi\approx1$，$\sin\phi\approx\phi$，同时忽略高阶微小量$\dot{\phi}^2$项，得微分方程

$$R(\pi-2)\ddot{\phi}+g\phi=0$$

故固有圆频率为

$$p=\sqrt{\frac{g}{R(\pi-2)}}$$

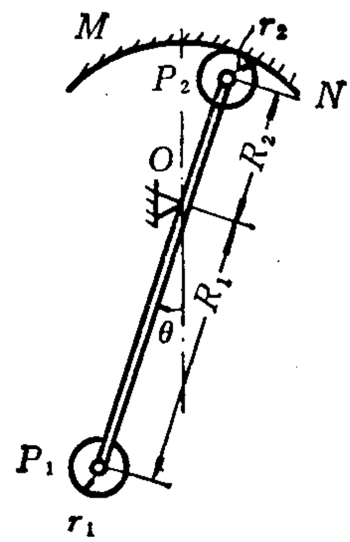

图 1-17

1-17 图示两圆柱体分别重 P_1 与 P_2，半径为 r_1 与 r_2，用一可忽略其质量的刚性杆联结，并用铰链支承于O点．圆柱体 P_2 可沿半径 R_2+r_2 的固定圆柱面 MN 作无滑动的滚动，且 $P_2R_2<P_1R_1$，试求系统作微振动时的固有频率．

解：由题意 $P_2R_2<P_1R_1$，系统将在铅垂面内作稳定的微摆动．利用能量法．

$$T=\frac{1}{2}\frac{P_2}{g}(R_2\dot{\theta})^2+\frac{1}{2}\left(\frac{P_2}{2g}r_2^2\right)\left(\frac{R_2}{r_2}\dot{\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{P_1}{g}(R_1\dot{\theta})^2+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{P_1}{2g}r_1^2\right)\dot{\theta}^2=\frac{1}{4g}[3\,P_2R_2^2+P_1(r_1^2+2\,R_1^2)]\dot{\theta}^2$$

$$U=P_1R_1(1-\cos\theta)-P_2R_2(1-\cos\theta)$$

由 $\frac{d}{dt}(T+U)=0$，得

$$\ddot{\theta}+\frac{2\,g(P_1R_1-P_2R_2)}{3\,P_2R_2^2+P_1(r_1^2+2R_1^2)}\theta=0$$