GONGCHENG SHUXUE

工程数学

贲　亮　李茂生　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

工程数学

贡　亮　李茂生　编　著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书包括了线性代数与概率论两篇.线性代数部分的主要内容有:n阶行列式,矩阵,向量与向量组,线性方程组,矩阵的特征值、特征向量与n阶矩阵的对角化,二次型等.概率论部分的主要内容有:随机事件及其概率,一维随机变量及其分布,二维随机变量及其分布,随机变量的数字特征等.

本书可作为函授、远程等成人业余高等教育(工科)的教学用书,也可作为工科院校工程数学的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

工程数学/赍亮,李茂生编著.--北京:北京邮电大学出版社,2011.1

ISBN 978-7-5635-2491-4

Ⅰ.①工… Ⅱ.①赍…②李… Ⅲ.①工程数学 Ⅳ.①TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第211086号

书　　名:工程数学

作　　者:赍　亮　李茂生

责任编辑:李欣一　徐　琦

出版发行:北京邮电大学出版社

社　　址:北京市海淀区西土城路10号(邮编:100876)

发 行 部:电话:010-62282185　传真:010-62283578

E-mail:publish@bupt.edu.cn

经　　销:各地新华书店

印　　刷:北京忠信诚胶印厂

开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16

印　　张:20.75

字　　数:514千字

印　　数:1—3 000册

版　　次:2011年1月第1版　2011年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-2491-4　　定　价:36.00元

前　　言

本书包括了线性代数与概率论两部分内容. 这两部分内容是两个既有理论上的抽象性和逻辑推理的严谨性,又有很强的实用性的独立数学分支,是工科各专业必修的重要基础课. 随着科学技术的发展,它们的应用日益广泛深入.

通过线性代数与概率论这两部分内容的学习,可以使学生获得线性代数与概率论的基础知识和基本理论以及必要的基本运算技能,在用数学方法分析问题和解决问题的能力方面得到进一步的培养和训练,为学习有关专业课程和扩大数学知识面提供必要的基础.

本书分为两篇. 第一篇线性代数,主要内容有:n 阶行列式及其计算;矩阵及其运算、矩阵的初等变换;向量与向量组及其向量组的线性相关性;线性方程组有解的条件及其解法;矩阵的特征值与特征向量、n 阶矩阵的相似对角化及其二次型. 第二篇概率论,主要内容有:随机事件及其概率;一维随机变量及其分布;二维随机变量及其分布;随机变量的数字特征.

本书可作为函授、远程等成人业余高等教育(工科)的教学用书,也可作为工科院校工程数学的参考用书.

编者多年从事成人高等教育,有较丰富的教学经验. 在本书的编写上,力求做到逻辑严谨、重点突出、文字简洁、深入浅出、通俗易懂、便于自学. 为使学生对所学内容能够更好地理解和掌握,每一节都配有思考题与习题,每一章有小结与复习题,书后附有习题答案. 学生在学习中应循序渐进地阅读本教材,对重点与难点的内容需反复研读,并且要尽可能地独立回答思考题、独立做习题.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥与欠缺之处,希望读者提出宝贵的意见.

编　者

目　　录

第一篇　线性代数

第二篇 概率论

第一篇

线 性 代 数

第 1 章　行 列 式

本章主要内容：n 阶行列式的定义、性质与计算；行列式按一行（列）展开的方法；克莱姆法则解线性方程组.

本章基本要求：

了解：排列的逆序数；行列式的定义；用克莱姆法则解线性方程组的方法.

掌握：行列式的性质；应用行列式的性质计算行列式；行列式按一行（列）展开的方法.

行列式是研究线性代数理论的一个重要的基础工具，在线性代数的很多问题中都要用到行列式，如求解线性方程组、可逆矩阵的判定及求逆矩阵、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值，等等. 行列式是从解线性方程组的需要中建立起来的，它在其他数学分支（如概率论与随机过程、数理统计等）和其他学科（如物理，力学等）中也有着广泛的应用.

1.1　预 备 知 识

1.1.1　排列及其逆序数

定义 1.1.1　由 n 个自然数 1、2、3、…、n 按某种确定的顺序列出 $p_1p_2\cdots p_n$，称为这 n 个数的一种 **n 级排列**.（共有 $n!$ 种不同的 n 级排列. 按由小到大排列起来的排列称为自然排列，即 $123\cdots n$ 为 n 级自然排列.）

例如：由 3 个自然数 1,2,3 构成的 3 级排列共有 $3!=6$ 种，分别是 123,132,213,231,312,321.

定义 1.1.2　在 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 中，如果一对数 p_i 与 p_j 的前后位置与大小顺序相反，即 $i<j$ 且 $p_i>p_j$（前面的数大于后面的数），则称它们构成一个**逆序**. 一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中所有逆序的总数称为此排列的**逆序数**，记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

例如：在 5 级排列 32451 中 3 与 2，3 与 1，2 与 1，4 与 1，5 与 1 构成了该排列的全部 5 个逆序，因此排列 32451 的逆序数 $\tau(32451)=5$.

由定义可知，排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中每一个数 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的左边比 p_i 大的数的个数的总和就是此排列的逆序数.

例如：$\tau(35421)=0+0+1+3+4=8$

$$\tau(32451)=0+1+0+0+4=5$$

$$\tau(123\cdots n)=0+0+0+\cdots+0=0$$

$$\tau[n(n-1)(n-2)\cdots 21]=0+1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\vdots$$

定义 1.1.3 一个排列的逆序数为偶数，则称此排列为**偶排列**；一个排列的逆序数为奇数，则称此排列为**奇排列**.

例如：排列 35421 的逆序数 $\tau(35421)=8$，因此它是偶排列，排列 32451 的逆序数 $\tau(32451)=5$，因此它是奇排列.

把一个排列的某两个数互换位置其余数不动，则得到另一个排列，这种变换称为**对换**.

例如：排列 35421 经过 5 和 2 对换后，变为排列 32451，这一过程可记为 $35421 \xrightarrow{(5,2)} 32451$. 因为 35421 是偶排列，32451 是奇排列，因此对换(5,2)改变了排列 35421 的奇偶性. 这一现象不是偶然的，我们有以下的结论.

定理 1.1.1 对换一个排列中的任意两个数，则改变排列的奇偶性.

证明 首先考虑对换排列中两个相邻数的情形，即

$$p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n \tag{1.1.1}$$

$$\xrightarrow{(p_i,p_j)} p_1p_2\cdots p_jp_i\cdots p_n \tag{1.1.2}$$

显然(1.1.1)式、(1.1.2)式两排列中除 p_i，p_j 以外的数彼此之间的逆序状况是一样的，如果 $p_i>p_j$，则在排列(1.1.1)式中 p_ip_j 构成一个逆序，而在排列(1.1.2)式中 p_jp_i 不构成逆序，此时排列(1.1.2)式的逆序数比排列(1.1.1)式的逆序数小 1，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n)=\tau(p_1p_2\cdots p_jp_i\cdots p_n)+1$$

如果 $p_i<p_j$，则在排列(1.1.1)式中 p_ip_j 不构成逆序，而排列(1.1.2)式中 p_jp_i 构成一个逆序，此时排列(1.1.2)式的逆序数比排列(1.1.1)式的逆序数大 1，即

$$\tau(p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n)=\tau(p_1p_2\cdots p_jp_i\cdots p_n)-1$$

由此可知：如果 $p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n$ 是偶排列，则 $p_1p_2\cdots p_jp_i\cdots p_n$ 是奇排列；如果 $p_1p_2\cdots p_ip_j\cdots p_n$ 是奇排列，则 $p_1p_2\cdots p_jp_i\cdots p_n$ 是偶排列，即如果对换排列中两个相邻的数，则改变排列的奇偶性.

下面再考虑一般情形，设对换的两个数 p_i，p_j 之间还有 s 个数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，即

$$p_1p_2\cdots p_ik_1,k_2,\cdots,k_sp_j\cdots p_n \tag{1.1.3}$$

$$\xrightarrow{(p_i,p_j)} p_1p_2\cdots p_jk_1,k_2,\cdots,k_sp_i\cdots p_n \tag{1.1.4}$$

排列(1.1.4)式可看作由排列(1.1.3)式经过一系列对换得来，先把排列(1.1.3)式经过 s 次相邻两数的对换变为下面的排列

$$p_1p_2\cdots k_1,k_2,\cdots,k_sp_ip_j\cdots p_n \tag{1.1.5}$$

再把排列(1.1.5)式经过 $s+1$ 次相邻两数的对换变为排列(1.1.3)式，即由排列(1.1.3)式经过 $2s+1$(奇数)次相邻两数的对换变为排列(1.1.4)式. 因为一次对换排列中两个相邻的数，改变排列的奇偶性，偶数次对换排列中两个相邻的数，排列的奇偶性不变；奇数次对换排列中两个相邻的数，改变排列的奇偶性. 因此排列(1.1.3)式与排列(1.1.4)式的奇偶性不同. 这就证明了一般情形下，对换一个排列中的任意两个数，则改变排列的奇偶性.

1.1.2 数域的基本概念

定义 1.1.4 由一些数组成的集合 P，如果满足：

(1) $0,1\in P$；

(2) 对任意 $a,b\in P$，有 $a+b\in P$，$a-b\in P$，$a\cdot b\in P$，$a\div b\in P(b\neq 0)$，则称集合 P 是一个数域.

有理数集 **Q**、实数集 **R**、复数集 **C** 都是数域，而整数集 **Z** 不是数域.

例 1.1.1 证明有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域.

证明 有理数的形式为$\frac{q}{p}$(其中 p,q 均为整数),因为

(1) $0=\frac{0}{1},1=\frac{1}{1}\in\mathbf{Q}$

(2) 对任意 $a=\frac{q_1}{p_1},b=\frac{q_2}{p_2}\in\mathbf{Q}$(其中 p_1,p_2,q_1,q_2 均为整数),有

$$a\pm b=\frac{q_1}{p_1}\pm\frac{q_2}{p_2}=\frac{q_1p_2\pm p_1q_2}{p_1p_2}\in\mathbf{Q}$$

$$a\cdot b=\frac{q_1}{p_1}\cdot\frac{q_2}{p_2}=\frac{q_1q_2}{p_1p_2}\in\mathbf{Q}$$

$$a\div b=\frac{q_1}{p_1}\div\frac{q_2}{p_2}=\frac{q_1p_2}{p_1q_2}\in\mathbf{Q}$$

所以有理数集 $\mathbf{Q}$ 是数域.

例 1.1.2 证明整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

证明 因为对 $a=1,b=2\in\mathbf{Z}$,有 $a\div b=\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}$,即 $\mathbf{Z}$ 不满足定义 1.1.4 的条件(2),所以整数集 $\mathbf{Z}$ 不是数域.

线性代数各部分的内容都是在某一个数域中讨论的,如不特别声明是哪一个数域则认为是任意的数域.

思考题

1. 何谓 n 级排列?何谓排列的逆序数?如何求排列的逆序数?
2. 何谓奇排列和偶排列?对换一个排列中的任意两个数,排列有什么变化?

习题 1.1

1. 计算下列排列的逆序数,并判定其奇偶性:

(1) 3412; (2) 513624;

(3) 6427531; (4) 135792468.

2. 确定 i,j 的值,使排列 $1245i6j97$ 为奇排列.
3. 试证所有形如 $\alpha+\mathrm{i}\beta$(α,β 为有理数,$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$)的复数集 $\mathbf{C}$ 是一个数域.

1.2 n 阶行列式的定义

我们从二、三阶行列式入手引入 n 阶行列式的概念.

1.2.1 二、三阶行列式

二阶行列式是从解二元线性方程组引入的,对于任何一个二元线性方程组,经过整理后可化为一般形式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

由加减消元法解方程组(1.2.1),当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时,可得方程组(1.2.1)的唯一解:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \\ x_2=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1.2.2}$$

这是一般二元线性方程组(1.2.1)解的公式,为便于记忆,用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,称为二阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.2.3}$$

也可用"对角线法则"来定义二阶行列式,即 4 个数 $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ 排成两行两列并记为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$,称为二阶行列式,它等于主对角线(从左上角到右下角的连线)上的两个数相乘且取正号的一项 $a_{11}a_{22}$ 与副对角线(从右上角到左下角的连线)上的两个数相乘且取负号的一项 $-a_{12}a_{21}$ 的和.

由二阶行列式的定义,(1.2.2)式的两个分子可分别表示为

$$b_1a_{22}-b_2a_{12}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},b_2a_{11}-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

因此,方程组(1.2.1)的解可由下式表示:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ x_2=\dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases} \tag{1.2.4}$$

三阶行列式也是从解三元线性方程组引入的,现在用"对角线法则"来定义三阶行列式,即 9 个数 $a_{11},a_{12},a_{13},a_{21},a_{22},a_{23},a_{31},a_{32},a_{33}$ 排成三行三列,并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式,它等于主对角线上三个数的乘积并取正号的一项 $a_{11}a_{22}a_{33}$ 与两个有一边平行于主对角线的三角形顶点的三个数的乘积并取正号的两项 $a_{12}a_{23}a_{31}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{32}$,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

副对角线上三个数的乘积并取负号的一项 $-a_{13}a_{22}a_{31}$ 与两个有一边平行于副对角线的三角

形顶点的三个数的乘积并取负号的两项$-a_{12}a_{21}a_{33}$和$-a_{11}a_{23}a_{32}$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

一共 6 项的代数和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.2.5}$$

行列式中位于第 i 行、第 j 列的数记为 a_{ij}，也称为行列式第 i 行、第 j 列的元素，其中第一个下标 i 称为元素的行标，表示该元素所在的行，第二个下标 j 称为元素的列标，表示该元素所在的列，如 a_{12} 表示位于第 1 行、第 2 列的元素.

例 1.2.1 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & -6 & 5 \end{vmatrix} &= 2\times4\times5+(-1)\times1\times2+2\times3\times(-6)-2\times4\times2- \\ &\quad 2\times1\times(-6)-(-1)\times3\times5 \\ &= 13 \end{aligned}$$

1.2.2 n 阶行列式的定义

我们从二、三阶行列式的定义引入 n 阶行列式的概念. 但是，当 $n\geqslant 4$ 时，则不能用“对角线法则”来定义行列式，这是因为无法用“三角形”、“平行”等几何语言来描述，即“对角形法则”没有反映行列式结构的特点. 为了找出行列式结构的特点，我们首先把二、三阶行列式表示为下面的缩略形式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = \sum(\pm 1)a_{1p_1}a_{2p_2} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ &\quad a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \\ &= \sum(\pm 1)a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3} \end{aligned} \tag{1.2.7}$$

其中，(1.2.6)式中 $a_{1p_1}a_{2p_2}$ 是不同行不同列的两个元素的乘积，其行标排列为 12，列标排列为 p_1p_2 是 1、2 的某种排列(即 12、21 中的一种)，(1.1.6)式中两项的列标排列正好是 1、2 的所有不同的 2 级排列，所以二阶行列式是 $2!=2$ 项的代数和，而每项所带有的符号当 p_1p_2 是偶排列(即 12)时取正号，当 p_1p_2 是奇排列(即 21)时取负号；(1.2.7)式中 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$ 是不同行不同列的三个元素的乘积，其行标排列为 123，列标排列为 $p_1p_2p_3$ 是 1,2,3 的

某种排列(即 123,231,312,321,132,213 中的一种),(1.1.7)式中六项的列标排列正好是 1,2,3 的所有不同的 3 级排列,所以三阶行列式是 3! = 6 项的代数和,而每项所带有的符号当 $p_1p_2p_3$ 是偶排列(即 123,231,312)时取正号,当 $p_1p_2p_3$ 是奇排列(即 321,132,213)时取负号.下面根据二、三阶行列式的结构特点给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.2.1 将 n^2 个元素排成 n 行 n 列:

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

所有不同行、不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.2.8}$$

的代数和 $\sum(\pm 1)a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 称为 n 阶行列式,记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中,行标排列 $123\cdots n$ 是自然排列,列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 是某种 n 级排列,当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时,项(1.2.8)式前取正号;当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时,项(1.2.8)式前取负号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{1.2.9}$$

其中共有 $n!$ 项 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 求代数和.

注:(1) 当 $n=1$ 时,$|a_{11}|=a_{11}$,即一阶行列式就是元素 a_{11} 本身;

(2) 二、三阶行列式满足上述定义,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$$

(3) (1.2.9)式的左端是 n 阶行列式的形式,右端是其结果,我们把给出形式的行列式要得出其结果的过程称为计算行列式;

(4) 当 $n=4$ 时,有 $4!=24$ 项的代数和,而每项是 4 个元素的乘积,要做 3 次乘法,一共要做 $4!\times 3=72$ 次的乘法,而且还要做 23 次加(减)法;当 $n=5$ 时,有 $5!=120$ 项的代数和,而每项是 5 个元素的乘积,要做 4 次乘法,一共要做 $5!\times 4=480$ 次的乘法,而且还要做 119 次加(减)法;当 $n=6$ 时,有 $6!=720$ 项的代数和,而每项是 6 个元素的乘积,要做 5 次乘法,一共要做 $6!\times 5=3\,600$ 次的乘法,而且还要做 719 次加(减)法;……可见当 $n\geqslant 4$ 时,按定义计算行列式其计算量是很大的,因此,在实际的计算中一般不用定义计算行列式,但有些特殊形式的行列式又必须要按定义计算.

下面我们举几个按定义计算行列式的例子.