



高等院校电子信息科学与工程类

# 小波分析与应用

主编 王慧琴



北京邮电大学出版社  
[www.buptpress.com](http://www.buptpress.com)



清华大学出版社

# 小波分析与应用

第二版

王长健 著



清华大学出版社

高等院校电子信息科学与工程类

# 小波分析与应用

主 编 王慧琴

北京邮电大学出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了小波分析的基本思想、原理、方法和应用情况。主要内容分为3部分。第1部分：小波分析理论，包括第1~5章的内容，主要涉及小波理论基础、连续小波变换、离散小波变换、多分辨率分析与正交小波变换、小波变换和多采样滤波器组、二维小波变换，以及小波包的基本原理等。该部分力求简化数学推导过程，略去一些复杂的数学证明，使工科学生容易读懂并能很快应用。第2部分：基于MATLAB的小波分析，主要是第6章的内容。重点介绍了MATLAB小波分析工具箱的使用方法，包括图形用户接口、小波通用函数、一维小波分析的MATLAB实现、二维小波分析的MATLAB实现、小波包变换的MATLAB实现等，利用大量的实例说明一些函数的使用方法。第3部分：小波分析应用技术，主要是第7章的内容，分别详细地论述了小波分析在信号/图像处理、奇异性检测、信号去噪及数据压缩、数字水印技术等领域的与应用与求解方法。实例丰富，所述算法具有实际可操作性，从而使本书具有理论的系统性和应用的实践性紧密结合和高度统一的特点。

书中附有若干MATLAB程序，供读者参考，意在鼓励读者将理论学习与上机实验结合以提高学习效率。

该书内容丰富，取材精练、重点突出、叙述清楚。内容安排由浅入深，既有理论，又有应用背景。既可供电子信息类和计算机应用类专业研究生以及高年级本科生作为教材使用，也可供有关工程技术人员参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

小波分析与应用/王慧琴主编.--北京:北京邮电大学出版社,2011.1  
ISBN 978-7-5635-2521-8

I. ①小… II. ①王… III. ①小波分析 IV. ①O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第264937号

---

书 名：小波分析与应用  
作 者：王慧琴  
责任编辑：王丹丹  
出版发行：北京邮电大学出版社  
社 址：北京市海淀区西土城路10号(邮编：100876)  
发 行 部：电话：010-62282185 传真：010-62283578  
E-mail：publish@bupt.edu.cn  
经 销：各地新华书店  
印 刷：北京源海印刷有限责任公司  
开 本：787 mm×1 092 mm 1/16  
印 张：11.75  
字 数：291千字  
印 数：1—3 000册  
版 次：2011年1月第1版 2011年1月第1次印刷

---

ISBN 978-7-5635-2521-8

定 价：24.00元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

# 前 言

20世纪80年代,法国地质学家J. Morlet在研究地下岩石油层分布时,对傅里叶变换和窗口傅里叶变换作了深入的研究,在此基础上提出了“小波(Wavelet)”的概念,随后数学家Meyer, Mallat, Daubechies, K. Chui等人的工作为小波分析学科的诞生和发展奠定了基础。

小波分析是从傅里叶变换中发展而来,但是在刻画时频局部化上又比傅里叶变换有优势。小波分析具有多分辨率分析的特点,在时域和频域都有表征信号局部信息的能力,因而能有效地从信号中提取有用的信息,所以被誉为“数学显微镜”。尽管小波分析的历史很短,但发展十分迅速,小波分析的理论和方法越来越引起人们的广泛关注,并取得了令人瞩目的进展,在信号分析、图像处理、模式识别、语音分析、方程求解、分形力学等领域都已取得了具有科学意义和应用价值的重要成果。

本书是作者根据近年来为通信、自动化、电子和计算机等专业的学生讲授小波分析课程的讲义整理而成的。主要特点:(1)理论方法易懂。小波分析具有很强的数学背景,众多数学推导往往令人望而却步,本书避开了枯燥的数学推导,注重物理概念的清晰,着重从信号处理的观点阐述小波分析的理论,尽可能用形象的语言和直观的背景来描述一些抽象的问题。书中结合了大量的图表和例子介绍小波技术的概念、原理和方法,在保持小波理论数学严谨性的同时,着力从工程技术角度阐述小波技术及其应用,以帮助读者尽快掌握小波分析的相关知识和技能,并能使用其解决实际问题;(2)涵盖了MATLAB小波分析。介绍了MATLAB小波工具箱和小波变换的MATLAB实现,帮助读者能够快速地建立小波分析的知识框架;(3)注重理论与实践相结合。作为应用,本书较详细地讨论了小波分析在信号去噪、奇异性检测、数据压缩、数字水印技术等领域的典型应用,突出了小波分析的基础性和实用性。

全书共7章。具体安排如下:

第1章—预备知识。介绍与小波分析理论相关的数学基础知识,主要内容包括函数空间、基底和框架的基本概念和性质;傅里叶级数、连续与离散傅里叶变换以及窗口傅里叶变换的理论及算法等。

第2章—连续小波变换。介绍小波变换的基本概念和连续小波变换的原理;常见的小波基函数以及小波基函数的选择等。

第3章—离散小波变换。介绍了离散小波和二进小波变换的理论和性质。

第4章—多分辨率分析与正交小波的构造。分别从理想滤波器组和函数空间的剖分引入多分辨率分析的概念,介绍了多分辨率分析的基本理论和基本算法;在此基础上讨论了小波函数的构造以及Mallat快速算法;最后讨论了二维多分辨率分析方法。多分辨率分析是小波分析的主要内容,因而本

章也是全书的重点。

第5章—小波包和多小波。小波包是正交小波基的一种推广,是提高频域分辨率的一种有效的方法;多小波是小波理论的新发展,有良好的对称性、短支撑性、正交性和高阶消失矩等性质。

第6章—基于MATLAB的小波分析。介绍了小波分析的MATLAB通用函数;小波、小波包的MATLAB实现以及MATLAB小波图形用户接口功能。

第7章—小波分析应用技术。介绍小波分析理论在信号去噪、压缩、奇异性检测和数字水印领域的应用情况。

本书在编写过程中,参考了国内外许多专家的论文、专著,引用了其中的一些研究成果和数据,在此一并表示感谢。北京邮电大学出版社为教材的出版做了大量的工作,研究生胡燕、陈卿、方维、杨娜娟、苏婧、齐海平、邹婷、赵敏、张国飞、雷洁、贾洁、廖勇、茅世豪等同学参与了书中部分程序的调试,插图的绘制以及录入和校对等工作,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中不妥之处在所难免,恳请大家批评指正。

作者

# 目 录

第 1 章 预备知识	1
1.1 函数空间	1
1.1.1 线性空间	1
1.1.2 巴拿赫(Banach)空间	2
1.1.3 希尔伯特空间(Hilbert)	3
1.1.4 绝对可积和绝对可和空间	4
1.2 基底和框架	4
1.2.1 基、正交基和双正交基	4
1.2.2 框架和紧框架	6
1.2.3 信号的重构	7
1.2.4 Riesz 基	9
1.2.5 函数的基本性质	9
1.3 傅里叶级数和连续傅里叶变换	10
1.3.1 傅里叶级数	10
1.3.2 连续傅里叶变换	11
1.4 离散傅里叶变换	12
1.4.1 离散傅里叶变换的定义	12
1.4.2 离散傅里叶变换的性质	13
1.5 窗口傅里叶变换	14
1.5.1 窗口傅里叶变换的定义	15
1.5.2 时窗、频窗和时频窗	16
1.5.3 窗函数的条件	17
1.5.4 窗口傅里叶反变换公式	18
1.5.5 窗口傅里叶变换的局限性	18
1.6 小波发展简史	19
第 2 章 连续小波变换	22
2.1 小波基函数	22
2.2 连续小波变换及其性质	24
2.2.1 连续小波变换	24
2.2.2 连续小波变换的性质	25
2.3 连续小波变换的逆变换与再生核	27

2.3.1	连续小波变换的逆变换	27
2.3.2	连续小波变换的冗余与再生核	27
2.4	常见的小波基函数	28
2.5	小波基函数的选择	32
<b>第3章</b>	<b>离散小波变换</b>	<b>34</b>
3.1	尺度与位移的离散化与离散小波变换	34
3.2	小波框架与 Reisz 基	35
3.3	离散小波的逆变换与重建核	36
3.4	二进小波变换及其逆变换	38
3.4.1	卷积型的小波变换	38
3.4.2	二进小波变换	38
3.4.3	二进小波变换的逆变换	39
3.4.4	二进小波变换的性质	39
<b>第4章</b>	<b>多分辨率分析与正交小波的构造</b>	<b>41</b>
4.1	多分辨率分析	41
4.2	尺度函数与尺度空间	43
4.3	小波函数与小波空间	43
4.4	多分辨率信号分解与重建	44
4.4.1	由理想滤波器组引入多分辨率分析的概念	44
4.4.2	从函数空间的剖分引入多分辨率分析的概念	46
4.5	二尺度方程和滤波器组	50
4.5.1	二尺度方程的简单推导及时域、频域表示方法	50
4.5.2	用滤波器组进行离散信号的多分辨率分析	51
4.5.3	滤波器组的性质	52
4.6	正交小波变换和双正交小波变换	53
4.6.1	正交小波变换	53
4.6.2	构造正交小波	55
4.6.3	双正交小波	58
4.7	Mallat 快速算法	59
4.7.1	快速算法	59
4.7.2	函数数值形式的多尺度分解和重构	62
4.7.3	离散序列分解的滤波器表示	63
4.7.4	离散序列的双正交分解和重构	65
4.8	二维多分辨率分析	66
<b>第5章</b>	<b>小波包和多小波</b>	<b>70</b>
5.1	小波包	70
5.1.1	小波包定义与性质	70



5.1.2	小波包的空间分解	72
5.1.3	小波包滤波器组	75
5.1.4	最佳小波包基的选择	77
5.2	多小波	79
5.2.1	多小波多分辨分析	79
5.2.2	正交多小波	80
5.2.3	多小波的构造	82
<b>第 6 章</b>	<b>基于 MATLAB 的小波分析</b>	<b>84</b>
6.1	小波分析中的通用函数	84
6.2	小波函数	92
6.3	一维小波变换的 MATLAB 实现	94
6.3.1	一维连续小波变换函数	94
6.3.2	一维离散小波变换函数	96
6.4	二维小波变换的 MATLAB 实现	105
6.5	小波包变换的 MATLAB 实现	115
6.6	MATLAB 小波图形用户接口	123
6.6.1	小波 GUI 的启动和功能	123
6.6.2	小波 GUI 的基本说明	124
6.6.3	小波 GUI 中的小波和小波包显示	125
6.6.4	一维离散小波变换	126
6.6.5	二维离散小波变换	127
<b>第 7 章</b>	<b>小波分析应用技术</b>	<b>129</b>
7.1	小波在信号去噪中的应用	129
7.1.1	小波信号去噪的准则及常用的方法	129
7.1.2	小波阈值去噪	130
7.1.3	一维信号阈值去噪例子	133
7.1.4	二维信号的小波去噪	137
7.2	小波在信号压缩中的应用	139
7.2.1	信号压缩的性能度量	140
7.2.2	信号压缩的实现方法	141
7.2.3	小波基的选择	142
7.2.4	MATLAB 小波工具箱中信号压缩的实现	142
7.2.5	基于小波包变换的图像压缩	148
7.3	小波信号奇异性检测与图像边缘检测	150
7.3.1	Lipschitz 指数与奇异性	150
7.3.2	检测第一种类型的间断点	151
7.3.3	检测第二种类型的间断点	155

7.3.4 图像多尺度边缘检测 .....	156
7.4 小波在数字水印技术中的应用 .....	159
7.4.1 数字水印技术的概念 .....	159
7.4.2 数字水印的基本原理 .....	159
7.4.3 数字水印的分类 .....	160
7.4.4 数字水印技术的主要应用 .....	161
7.4.5 空间域和频率域水印研究现状 .....	162
7.4.6 基于 DCT 域的图像数字水印技术 .....	164
7.4.7 基于 DWT 域的鲁棒图像数字水印技术 .....	167
7.4.8 基于 DWT 的鲁棒-脆弱数字水印算法 .....	170
7.4.9 DWT 域直接序列扩频数字图像水印方法 .....	173
<b>参考文献</b> .....	<b>176</b>

# 第1章

## 预备知识

小波分析是在现代调和分析的基础上发展起来的,其基础知识涉及泛函分析、数值分析、统计分析、傅里叶分析、信号与系统、数字信号处理等诸多方面,其同时具有理论深刻和工程应用十分广泛的双重意义。在本书的开始部分,将首先介绍小波分析的数学基础和傅里叶分析的概念和性质等。

### 1.1 函数空间

泛函分析是20世纪初发展起来的一个重要的数学分支,它是以集合论为基础的现代分析的一个基本组成部分。在泛函分析中,一个很重要的概念是函数空间。所谓函数空间,即由函数构成的集合。在此,我们首先介绍集合中最简单、最常用的函数空间的定义及其主要性质,然后介绍空间的基和算子的概念。

#### 1.1.1 线性空间

##### 定义 1.1.1 距离空间

设  $X$  是任一集合,如果  $X$  中任意两个元素  $x$  与  $y$  都对应一个实数  $\rho(x, y)$ , 而且满足:

- ① 非负性:  $\rho(x, y) \geq 0$ , 当且仅当  $x = y$  时,  $\rho(x, y) = 0$ ;
- ② 对称性:  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ ;
- ③ 三角不等式: 对于任意的  $x, y, z \in X$ , 有  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ 。

则称  $\rho(x, y)$  为  $x$  与  $y$  之间的距离, 而称  $X$  为以  $\rho(x, y)$  为距离的距离空间。常用的距离空间有如下几种:

##### (1) $n$ 维欧氏空间

设  $\mathbf{R}^n$  表示  $n$  维向量  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  的全体所组成的集合, 称为  $n$  维欧氏空间, 其中  $x_i (i=1, 2, \dots, n)$  都是实数。

对于任意的  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ , 定义

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[ \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.1)$$

为  $\mathbf{R}^n$  空间的距离, 因此, 按照  $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ,  $\mathbf{R}^n$  是一个距离空间。

##### (2) 连续函数空间 $C[a, b]$

令

$$C[a, b] = \{x(t); x(t) \text{ 是 } [a, b] \text{ 上的连续函数} \} \quad (1.1.2)$$

则称  $C[a, b]$  为  $[a, b]$  上的连续函数空间, 在  $C[a, b]$  上定义

$$\rho(x, y) = \max |x(t) - y(t)|, \quad t \in [a, b]; x(t), y(t) \in C[a, b] \quad (1.1.3)$$

可以证明  $\rho(x, y)$  满足距离的 3 个条件, 故  $C[a, b]$  按照距离  $\rho(x, y)$  是一个距离空间。

(3) 平方可积函数空间  $L^2(\mathbf{R})$

令

$$L^2(\mathbf{R}) = \left\{ x(t); \int_{\mathbf{R}} |x(t)|^2 dt < \infty \right\} \quad (1.1.4)$$

则称  $L^2(\mathbf{R})$  为平方可积空间, 在  $L^2(\mathbf{R})$  上定义

$$\rho(x, y) = \left( \int_{\mathbf{R}} [x(t) - y(t)]^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad x, y \in L^2(\mathbf{R}) \quad (1.1.5)$$

则  $L^2(\mathbf{R})$  空间按照式 (1.1.5) 为一距离空间。

(4) 平方可和离散序列空间  $L^2(\mathbf{Z})$

令

$$L^2(\mathbf{Z}) = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots); \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\} \quad (1.1.6)$$

则称  $L^2(\mathbf{Z})$  为平方可和离散序列空间。

若  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \in l^2, y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \in l^2$ , 定义

$$\rho(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1.7)$$

则  $L^2(\mathbf{Z})$  为一距离空间。

### 定义 1.1.2 线性空间

设  $X$  为一非空集合, 若在  $X$  中规定了线性运算——元素的加法和元素的数乘运算, 并满足相应的加法或数乘的结合律及分配律, 则称  $X$  为一线性空间或向量空间。对于线性空间的任一向量我们用范数来定义其长度。

### 定义 1.1.3 线性赋范空间

设  $X$  为一线性空间, 若对于任意  $x \in X$  有一个确定的非负实数  $\|x\|$  与它对应, 并满足:

- ①  $\forall x \in X, \|x\| \geq 0$ , 当且仅当  $x=0$  时,  $\|x\|=0$ ;
- ②  $\forall x \in X$  及  $\lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ ;
- ③  $\forall x, y \in X, \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ 。

则称  $\|x\|$  为  $x$  的范数,  $X$  为线性赋范空间。向量的范数是向量的大小或长度的一种度量。距离和长度的基本区别在于: 距离是指两个对象之间的距离, 而长度则是针对一个对象而言的。通过范数可诱导距离: 令  $\rho(x, y) = \|y-x\|$ , 即将两个向量的距离赋值为这两个向量的差的长度(范数)。因此线性赋范空间一定是距离空间, 但距离空间不一定是赋范空间。

## 1.1.2 巴拿赫(Banach)空间

**定义 1.1.4** 若  $X$  是一个线性赋范空间,  $X$  中任何柯西(Cauchy)序列  $\{x_i\}$  都有极限, 且极限都在  $X$  内, 则称  $X$  为巴拿赫空间。

上述柯西序列是指:一个序列  $\{x_n\}$ , 当  $n, m \rightarrow \infty$  时,  $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$ 。X 中任何柯西序列都收敛到 X 内的元素, 这一性质称之为 X 的完备性, 即一个完备的线性赋范空间是巴拿赫空间。

[例 1-1] 对于每个  $P, 1 \leq P < \infty$ , 令  $L^P(\mathbf{R})$  是  $\mathbf{R}$  上满足下述条件的可测函数  $f$  的类:

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx < \infty$$

赋予范数:

$$\|f\|_p = \left[ \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.8)$$

可以证明,  $L^P(\mathbf{R})$  对于上述定义的范数是巴拿赫空间。

### 1.1.3 希尔伯特空间(Hilbert)

定义 1.1.5 设 X 为实或复数域上的线性空间, 若对于 X 中的任何一对元素  $f, g$ , 都有确定的复数与之对应, 记为  $\langle f, g \rangle$ , 且满足

- ① 对称性:  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$ ;
- ② 线性:  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle \quad \alpha, \beta \in C$ ;
- ③ 非负性:  $\langle f, f \rangle \geq 0, \langle f, f \rangle = 0$  当且仅当  $f = 0$ 。

其中  $\bar{a}$  表示  $a$  的复共轭。则称 X 为内积空间,  $\langle f, g \rangle$  为  $f$  与  $g$  的内积。如果 X 是  $\mathbf{R}$  上的线性空间, 则上述第(1)条件变为  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ 。若内积空间 X 还是完备的, 则称 X 为希尔伯特空间。总结如下:

内积空间: 引入了内积的线性空间称为内积空间。在内积空间中, 对于每个  $f \in X$ , 定义范数

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (1.1.9)$$

则 X 就成为一个线性赋范空间, 这个线性赋范空间也称为由内积导入的线性赋范空间。

希尔伯特空间: 一个完备的内积空间称为希尔伯特空间。

内积空间有下述性质, 设 X 是内积空间, 则有:

(1) schwarz 不等式

$$x, y \in X, \text{ 则 } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (1.1.10)$$

(2) 平行四边形等式

$x, y \in X$ , 则

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1.1.11)$$

(3) 勾股定理

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (1.1.12)$$

[例 1-2] 线性空间  $L^2(\mathbf{R})$  中, 定义内积为: 对任何  $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ , 定义

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(x) \bar{g}(x) dx$$

易知, 这样定义的内积满足内积的 3 个条件, 因此本例中的  $L^2(\mathbf{R})$  对引入的内积构成一个希尔伯特空间。

[例 1-3] 平方可和序列空间  $L^2(\mathbf{Z})$  中, 内积定义为  $[a, b] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \bar{b}_n$  也是希尔伯特空间。

### 1.1.4 绝对可积和绝对可和空间

定义 1.1.6 若定义

$$\|f\|_1 \equiv \int_x |f| dx \quad (1.1.13)$$

则称满足  $\|f\|_1 < \infty$  的  $f$  为元素的线性空间为绝对可积空间, 记为  $L^1(x)$ 。同样, 当定义域为实数域时, 记为  $L^1(\mathbf{R})$ 。

类似地, 可定义绝对可和空间  $L^1(\mathbf{Z})$ 。

以下的例子说明一个平方可积函数不一定是绝对可积的。例如

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (1.1.14)$$

由于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi \quad (1.1.15)$$

所以  $f \in L^2(\mathbf{R})$ , 但

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \infty \quad (1.1.16)$$

$f \notin L^1(\mathbf{R})$ 。

## 1.2 基底和框架

一个代数系统或函数空间中的元素往往是无穷多的, 在研究它们的关系或表达式时涉及基底及函数展开的问题, 因此需要引入基底和框架的概念。

### 1.2.1 基、正交基和双正交基

定义 1.2.1 由函数序列张成的空间

设  $e_k(t)$  为一函数序列,  $X$  表示  $e_k(t)$  所有可能的线性组合构成的集合, 即

$$X = \left\{ \sum_k a_k e_k(t); t, a_k \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z} \right\} \quad (1.2.1)$$

称  $X$  为序列  $e_k(t)$  张成的线性空间, 记作

$$X = \text{span}\{e_k(t)\} \quad (1.2.2)$$

也即对任意  $g(t) \in X$ , 有

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \quad (1.2.3)$$

定义 1.2.2 基底

若  $e_k(t)$  是线性无关的, 使得对任意  $g \in X$ , 式(1.2.3)中的系数  $a_k$  取唯一的值, 我们称  $\{e_k(t)\}_{k \in \mathbf{Z}}$  为空间  $X$  的一个基底。基底是一个向量的集合, 空间中的任何向量可以表示为基底的线性组合, 并且表示是唯一的。

定义 1.2.3 正交

$x, y$  为内积空间  $X$  的两个元素, 若  $\langle x, y \rangle = 0$ , 则称  $x, y$  为正交的, 用  $x \perp y$  表示。例如, 在高等数学中的积分公式:  $\int_0^{2\pi} \cos nx \sin nx dx = 0, m, n \in \mathbf{Z}$ , 事实上,  $\cos nx$  和  $\sin nx$  都是函数空间  $L^2(0, 2\pi)$  中的元素, 该空间中的内积定义为  $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$ , 因此可以说  $\cos nx$  和  $\sin nx$  正交。

#### 定义 1.2.4 标准正交基

若内积空间  $X$  中元素列  $\{e_k\}$  满足

$$\langle e_m, e_n \rangle = \delta(m-n) = \begin{cases} 0, & m \neq n \quad (\text{体现正交性}) \\ 1, & m = n \quad (\text{体现单位性质}) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

则称  $\{e_n\}$  为  $X$  的标准正交基。其中,  $\delta(n)$  为 Dirac 函数, 即

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

#### 定义 1.2.5 完全的标准正交基

设  $X$  为内积空间,  $\{e_n\}$  为  $X$  中的一个标准正交基, 若  $x \in X, x \perp e_n (n=1, 2, \dots)$ , 则必有  $x = \theta$ 。换句话说,  $X$  中不再存在非零元素, 使它与所有的  $e_n$  正交, 则称  $\{e_n\}$  为  $X$  中的完全标准正交基。

**定理** 设  $\{e_n\} (n=1, 2, \dots)$  为 Hilbert 空间  $X$  中的标准正交基, 且令  $M = \text{span}\{e_n, n=1, 2, \dots\}$ , 则下列 4 个条件是等价的:

$$\textcircled{1} \{e_n\} \text{ 为 } X \text{ 的完全标准正交基}; \quad (1.2.5)$$

$$\textcircled{2} M = X; \quad (1.2.6)$$

$$\textcircled{3} \text{ 对 } \forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \text{ (Parseval 等式)}; \quad (1.2.7)$$

$$\textcircled{4} \text{ 对 } \forall x \in X, x = \sum_{n=1}^{\infty} [x, e_n] e_n. \quad (1.2.8)$$

称式(1.2.8)为  $x$  关于完全标准正交基的傅里叶展开,  $\langle x, e_n \rangle$  称为傅里叶展开系数。其几何意义是:  $x$  等于它的各分量  $\langle x, e_n \rangle e_n$  之向量和。

通过上述定理, 把数学分析中的傅里叶展开式推广到了抽象的 Hilbert 空间中, 并揭示了完全标准正交基, Parseval 等式(能量守恒定律)及傅里叶展开式之间的本质联系。因此, 只要找到这种正交基, 则空间中的任意元素均可表示为一个傅里叶级数的形式:

$$g(t) = \sum_k a_k e_k(t) \quad (1.2.9)$$

其中

$$a_k = \langle g(t), e_k(t) \rangle \quad (1.2.10)$$

称为傅里叶级数。例如, 复空间中的任何函数可由函数系  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbf{Z}}$  的线性组合表示出来(复数形式的傅里叶级数), 且  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbf{Z}}$  满足条件(1.2.4), 因此  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbf{Z}}$  是  $L^2(0, 2\pi)$  的标准正交基。傅里叶级数是用来分析周期为  $T=2\pi$  的函数的。当周期  $T \rightarrow \infty$  时, 可得到任意非周期函数的傅里叶展开, 只是这时级数被积分取代了, 这就引出了我们熟

悉的傅里叶变换。对于  $\forall f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ , 其傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad (1.2.11)$$

标准正交基是一种理想的、具有良好性质的基底。但实际应用中往往很难获得这种基底, 一种解决的途径是将原来的标准正交的限制条件放松, 进而得到双正交基。

**定义 1.2.6 双正交基**

对于不满足标准正交条件的基底  $e_k(t)$  来说, 如果存在另一组对偶基底  $\tilde{e}_k(t)$ , 使得:

$$\langle e_m(t), \tilde{e}_n(t) \rangle = \delta(m-n) \quad (1.2.12)$$

则也可得到形如式(1.2.9)的函数分析和综合公式:

$$g(t) = \sum_k \langle g(t), \tilde{e}_k(t) \rangle e_k(t) \quad (1.2.13)$$

此时, 标准正交基存在于原基底  $e_k(t)$  和对偶基底  $\tilde{e}_k(t)$  之间, 展开式也相应的由原基底和对偶基底构成, 这种基称为双正交基,  $e_k(t)$  和  $\tilde{e}_k(t)$  互为对偶基底。

由正交基和双正交基的概念知道, 若函数序列  $e_k(t)$  是空间  $X$  的一组正交基, 则对于任意函数  $g(t) \in X$ , 可按式(1.2.9) 将其展开; 若函数序列  $e_k(t)$  是空间  $X$  的一组双正交基, 则对于任意函数  $g(t) \in X$ , 可按式(1.2.13) 将其展开。在这两种展开形式下, 其展开系数是唯一的。因为无论正交基还是双正交基, 它们的基元素之间都是不相关的。但是, 正交基往往对误差较敏感, 而且正交基的获得也比较困难。在工程应用中, 往往放宽了正交性的要求, 使得基底函数之间有部分的相关性和冗余度, 这就是框架。

**1.2.2 框架和紧框架**

**定义 1.2.7 框架**

设  $H$  为一 Hilbert 空间,  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  为  $H$  中的一个函数序列, 若对于任意  $f \in H$ , 存在  $0 < A < B < \infty$ , 使得下述不等式成立:

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (1.2.14)$$

则称  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  为一个框架; 称  $A, B$  分别为框架的上、下界。框架常数  $B < \infty$  保证了变换  $f \rightarrow \{\langle f, \psi_j \rangle\}$  是连续的, 常数  $0 < A$  保证了变换式是可逆的, 并且有连续的逆变换, 这样用框架  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  就能完全刻画函数  $f \in H$ 。框架提供了一种冗余表示, 在框架中称比值  $B/A$  为冗余比或冗余因子。

**定义 1.2.8 紧框架**

若  $A = B$ , 则称此框架为一紧框架, 此时式(1.2.14) 变为

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \psi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2 \quad (1.2.15)$$

由式(1.2.15) 可推得

$$f = A^{-1} \sum_j \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \quad (1.2.16)$$

需要特别指出, 满足式(1.2.16) 的紧框架  $\{\psi_j\}_{j \in \mathbf{Z}}$  一般并非正交的。

**[例 1-4]** 设空间  $H$  为  $C^2$ , 即二维向量的空间, 取

$$e_1 = (0, 1), e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$



如图 1.1 所示,对任意矢量  $\mathbf{V} = (v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$ ,有

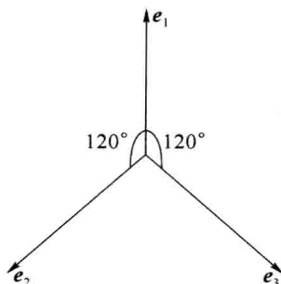


图 1.1 紧框架

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 |\langle \mathbf{V}, \mathbf{e}_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\ &= \frac{3}{2} [ |v_1|^2 + |v_2|^2 ] = \frac{3}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

由此可知,  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  构成了  $\mathbb{C}^2$  空间的一个紧框架,且  $A = B = 3/2$ ,但它显然不是一个正交基,因为  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 = 0$ ,显然三者是相关的。框架界  $3/2$  给出了这个离散框架的冗余度(用三个矢量描述二维空间)。

### 1.2.3 信号的重构

若  $A = B = 1$ ,  $\|\psi_j\| = 1 (j \in \mathbf{Z})$ ,则此时  $\psi_j$  为一正交基,并且

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \quad (1.2.18)$$

式(1.2.18)给出了紧框架情况下由  $\langle f, \psi_j \rangle$  重建原函数的公式。下面推导当  $A \neq B$  时,由  $\langle f, \psi_j \rangle$  重建原函数的公式。首先定义算子  $F$  为:  $Ff = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$ , 记作  $g$ 。则其逆运算可表示成

$$f = F^{-1}g = F^{-1} \left[ \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j \right] = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle F^{-1} \psi_j \quad (1.2.19)$$

令  $F^{-1} \psi_j = \tilde{\psi}_j$ , 则式(1.2.19)可写为

$$f = \sum_{j \in \mathbf{Z}} \langle f, \psi_j \rangle \cdot \tilde{\psi}_j \quad (1.2.20)$$

以上说明重建原函数的关键在于寻找  $\psi_j$  的对偶序列  $\tilde{\psi}_j$ 。对偶的严谨数学推导较为复杂,这里不作讨论,只把一些主要结果列举如下:

(1)  $\tilde{\psi}_j$  也构成一个框架,其上、下界恰与  $\psi_j$  的上、下界呈倒数关系,即

$$B^{-1} \|f\|^2 \leq \sum_{j \in \mathbf{Z}} |\langle f, \tilde{\psi}_j \rangle|^2 \leq A^{-1} \|f\|^2 \quad (1.2.21)$$

(2) 当  $A$  与  $B$  比较接近时,作为一阶近似,可取

$$\tilde{\psi}_j = \frac{2}{A+B} \psi_j \quad (1.2.22)$$

因此