

高等学校教材



# 电磁波工程基础

(电磁理论基础·微波技术·天线基础)

高建平 编著

西北工业大学出版社



# 电能表 IC 卡应用

2006 年 10 月

高等学校教材

# 电磁波工程基础

(电磁理论基础·微波技术·天线基础)

高建平 编著

西北工业大学出版社

**【内容简介】** 本书旨在使电子信息工程和通信工程专业的本科学生或从事相关专业的科技人员熟悉并掌握电磁波的产生、传播以及接收的有关理论、基本概念及其在工程实际中的应用。

全书共分三篇。上篇为电磁理论基础,主要介绍矢量分析,电磁场的基本方程、定理及分析方法,正弦均匀平面电磁波的传播特性及反射、折射规律等内容。中篇为微波技术,主要介绍几种典型的微波传输线,长线理论,阻抗匹配理论及方法,微波谐振腔,微波网络理论(简介),微波定向耦合器及微波滤波器等内容。下篇为天线基础,主要介绍电磁辐射的基础理论,天线的主要参数,对称振子,缝隙天线,天线的互耦,天线阵,喇叭天线,反射面天线及单脉冲雷达天线等内容。各章之后均附有一定数量的具有启发性、针对性和工程性的习题。

本书既可以作为电子信息工程和通信工程专业本科学生的教材,也可供从事相关专业的科技人员参考。

#### 图书在版编目 (CIP) 数据

电磁波工程基础/高建平编著. —西安: 西北工业大学出版社, 2008. 1

ISBN 978 - 7 - 5612 - 2331 - 4

I . 电… II . 高… III . 电磁波 IV . O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 000383 号

**出版发行:** 西北工业大学出版社

**通信地址:** 西安市友谊西路 127 号 邮编: 710072

**电 话:** (029)88493844 88491757

**网 址:** www. nwpup. com

**印 刷 者:** 陕西向阳印务有限公司

**开 本:** 787 mm×1 092 mm 1/16

**印 张:** 29. 875 插页 1

**字 数:** 730 千字

**版 次:** 2008 年 1 月第 1 版 2008 年 1 月第 1 次印刷

**定 价:** 45. 00 元

# 前　　言

本书针对电子信息工程和通信工程(本科)专业的特点,结合作者多年教学和科研实践的体会,把电磁场与电磁波、微波技术和天线基础三部分内容合理组合,全面系统地论述了电磁波的产生、传播和接收的有关理论、基本概念及其在工程实际中的应用。

全书共分三篇。上篇为电磁理论基础,主要介绍矢量分析,电磁场的基本方程、定理及分析方法,正弦均匀平面电磁波的传播特性及反射、折射规律等内容;中篇为微波技术,主要介绍几种典型微波传输线的导波特性,长线理论,阻抗匹配理论及方法,微波谐振腔,微波网络理论(简介),微波定向耦合器及微波滤波器等内容;下篇为天线基础,主要介绍电磁辐射的基础理论,天线的主要参数,对称振子,缝隙天线,天线的互耦,天线阵,喇叭天线,反射面天线及单脉冲雷达天线等内容。

为使读者更多地了解本学科的前沿动态和工程实际,除以例题、讨论及习题等形式介绍相关内容之外,还在第二十二章中专门介绍了电磁波理论的相关专题及工程应用。

作者在电磁对偶原理、电磁波的调制及不失真传播条件、波导四螺钉阻抗调配原理、变负载阶梯阻抗变换器的设计、矩形微波谐振腔的单模谐振条件、正弦电磁场位函数方程的求解,以及相控  $n$  元均匀直线阵的参数估算等内容的论述中,皆有一些独自的见解或独到之处。

为使全书的整体结构更为流畅,作者把某些必要(但显复杂)的理论推导列于书后的附录中。读者可以自行选学这部分内容。

目录中标有“\*”号的章节为选学内容,是否选学这些内容不会影响后续内容的学习。

为了满足不同的需求,在书后的附录中给出了(偶数序号)习题的参考答案。

鉴于作者水平有限,书中不足之处,恳请各位同行和读者不吝指正。

作　者

2007年8月1日

# 目 录

## 上篇 电磁理论基础

<b>第一章 矢量分析</b> .....	1
§ 1-1 标量、矢量及场的概念 .....	1
§ 1-2 矢量的运算规则 .....	2
§ 1-3 正交坐标系 .....	3
§ 1-4 矢量的运算方法 .....	7
§ 1-5 空间微分元 .....	8
§ 1-6 标量函数(场)的梯度 .....	12
§ 1-7 矢量场的散度 .....	14
§ 1-8 矢量场的旋度 .....	18
§ 1-9 场论(初步) .....	21
习题 .....	22
<b>第二章 电磁场的基本理论</b> .....	25
§ 2-1 电磁场中的基本物理量 .....	25
§ 2-2 麦克斯韦方程组 .....	27
§ 2-3 坡印亭定理 .....	31
§ 2-4 电磁场的边界条件 .....	32
§ 2-5 正弦电磁场的复域研究方法 .....	37
§ 2-6 时变电磁场的唯一性定理 .....	42
§ 2-7 电磁对偶原理 .....	43
§ 2-8 等效原理 .....	45
习题 .....	46
<b>第三章 正弦均匀平面电磁波在自由空间的传播</b> .....	49
§ 3-1 波动方程 .....	49
§ 3-2 理想介质中的正弦均匀平面电磁波(SUPW) .....	51
§ 3-3 导电媒质中的正弦均匀平面电磁波 .....	60

§ 3-4 电磁波的调制、色散、相速与群速 .....	66
§ 3-5 电磁波的极化特性 .....	70
习题 .....	75
<b>第四章 SUPW 的反射和折射 .....</b>	<b>77</b>
§ 4-1 SUPW 的反射、折射定律 .....	77
§ 4-2 SUPW 对平面边界的垂直入射 .....	79
§ 4-3 SUPW 对介质分界面的斜入射 .....	87
§ 4-4 SUPW 对理想导体表面的斜入射 .....	97
* § 4-5 SUPW 对导体表面的斜入射 .....	101
习题 .....	105

## 中篇 微 波 技 术

<b>引言 .....</b>	<b>109</b>
<b>第五章 微波传输线 .....</b>	<b>111</b>
§ 5-1 概述 .....	111
§ 5-2 微波传输线的基本方程(导波方程) .....	112
§ 5-3 矩形波导 .....	115
* § 5-4 圆波导 .....	125
§ 5-5 同轴线 .....	133
* § 5-6 微带线 .....	136
习题 .....	138
<b>第六章 长线理论 .....</b>	<b>141</b>
§ 6-1 概述 .....	141
§ 6-2 传输线方程及其解 .....	142
§ 6-3 均匀无耗长线的主要参数 .....	146
§ 6-4 均匀无耗长线的工作状态 .....	150
§ 6-5 圆图 .....	159
习题 .....	169
<b>第七章 长线的阻抗匹配 .....</b>	<b>173</b>
§ 7-1 匹配的基本概念 .....	173
§ 7-2 电抗(电纳)元件 .....	174
§ 7-3 分支阻抗调配器 .....	176
§ 7-4 阶梯阻抗变换器 .....	182
* § 7-5 渐变线阻抗变换器 .....	193

习题.....	197
<b>第八章 微波谐振腔.....</b>	<b>201</b>
§ 8-1 概述.....	201
§ 8-2 微波谐振腔的品质因数.....	202
* § 8-3 微波谐振腔的激励与耦合 .....	204
§ 8-4 同轴谐振腔.....	206
§ 8-5 矩形谐振腔.....	210
* § 8-6 圆柱谐振腔 .....	214
习题.....	218
<b>第九章 微波网络理论(简介).....</b>	<b>220</b>
§ 9-1 概述.....	220
§ 9-2 二端口微波网络.....	222
§ 9-3 多端口微波网络.....	232
习题.....	238
<b>第十章 定向耦合器.....</b>	<b>241</b>
§ 10-1 概述 .....	241
§ 10-2 波导匹配双 T .....	244
§ 10-3 双分支定向耦合器 .....	248
* § 10-4 混合环 .....	256
习题.....	261
<b>* 第十一章 微波滤波器 .....</b>	<b>263</b>
§ 11-1 概述 .....	263
§ 11-2 网络的对偶电路 .....	266
§ 11-3 低通原型滤波器 .....	269
§ 11-4 频率变换 .....	272
§ 11-5 微波低通滤波器的工程实现 .....	277
习题.....	282
<b>下篇 天线基础</b>	
<b>引言.....</b>	<b>283</b>
<b>第十二章 电磁辐射的基础理论.....</b>	<b>285</b>
§ 12-1 正弦电磁场的位函数 .....	285
§ 12-2 电流元的辐射 .....	289

§ 12-3 磁流元的辐射 .....	293
§ 12-4 基本面元的辐射 .....	294
§ 12-5 电流小圆环的辐射 .....	296
习题.....	297
<b>第十三章 天线的主要参数及互易定理.....</b>	<b>299</b>
§ 13-1 方向性函数及方向图 .....	299
§ 13-2 方向性系数 .....	301
§ 13-3 天线的效率与增益 .....	302
§ 13-4 天线的阻抗特性 .....	303
§ 13-5 天线的工作频带 .....	303
§ 13-6 互易定理 .....	303
* § 13-7 天线的有效长度与有效面积 .....	304
* § 13-8 接收天线的噪声温度 .....	305
* § 13-9 传输方程 .....	306
习题.....	308
<b>第十四章 对称振子.....</b>	<b>309</b>
§ 14-1 对称振子的模型及电流分布 .....	309
§ 14-2 对称振子的辐射场 .....	310
§ 14-3 对称振子的阻抗特性 .....	312
§ 14-4 对称振子的方向性系数 .....	315
§ 14-5 折合振子 .....	316
* § 14-6 对称振子的馈电方法 .....	317
习题.....	318
<b>* 第十五章 缝隙天线 .....</b>	<b>320</b>
§ 15-1 平板缝隙天线 .....	320
§ 15-2 波导缝隙天线 .....	322
习题.....	323
<b>* 第十六章 天线的互耦 .....</b>	<b>324</b>
§ 16-1 引言 .....	324
§ 16-2 天线的互耦 .....	324
§ 16-3 大地对天线性能的影响 .....	325
§ 16-4 引向天线 .....	327
习题.....	329
<b>第十七章 天线阵 .....</b>	<b>330</b>
§ 17-1 概述 .....	330

---

§ 17-2 增强方向性原理及方向性乘积定理 .....	330
§ 17-3 $n$ 元均匀直线阵 .....	331
§ 17-4 $m \times n$ 元均匀平面阵 .....	336
§ 17-5 均匀立体阵 .....	339
习题 .....	340
<b>第十八章 面天线的基本理论 .....</b>	<b>342</b>
§ 18-1 概述 .....	342
§ 18-2 平面口面辐射场的一般公式 .....	343
§ 18-3 同相平面口面天线的方向性系数及面积利用系数 .....	344
§ 18-4 同相矩形口面天线的辐射 .....	346
§ 18-5 口面场不同相位分布对辐射的影响 .....	352
习题 .....	358
<b>第十九章 喇叭天线 .....</b>	<b>359</b>
§ 19-1 概述 .....	359
§ 19-2 矩形喇叭的内场及口面场 .....	361
§ 19-3 矩形喇叭的辐射场 .....	365
§ 19-4 矩形喇叭的方向性 .....	367
§ 19-5 矩形喇叭的工程设计 .....	374
* § 19-6 圆形喇叭的辐射特性及工程设计 .....	376
习题 .....	378
<b>第二十章 反射面天线 .....</b>	<b>379</b>
§ 20-1 概述 .....	379
§ 20-2 旋转抛物面天线的几何参数及几何光学特性 .....	380
§ 20-3 旋转抛物面天线的口面场 .....	383
§ 20-4 旋转抛物面天线的辐射特性 .....	385
§ 20-5 旋转抛物面天线的馈源 .....	389
* § 20-6 卡塞格伦双反射面天线 .....	393
* § 20-7 赋形波束天线 .....	397
习题 .....	400
<b>第二十一章 单脉冲(雷达)天线 .....</b>	<b>402</b>
§ 21-1 单脉冲天线的工作原理及参数 .....	402
§ 21-2 单脉冲天线的分析 .....	407
§ 21-3 解决和差矛盾的方法 .....	413
习题 .....	418

* 第二十二章 电磁波理论的相关专题及应用 .....	419
§ 22-1 多普勒效应 .....	419
§ 22-2 电磁波的散射 .....	420
§ 22-3 几何绕射理论 .....	424
§ 22-4 铁氧体中电磁波的传播特性及应用 .....	426
§ 22-5 等离子体中电磁波的传播特性及应用 .....	431
附录 .....	437
附录 1 散度计算式的推导 .....	437
附录 2 旋度计算式的推导 .....	438
附录 3 矢量恒等式 .....	440
附录 4 无线电频段的划分 .....	440
附录 5 复波数的推导 .....	443
附录 6 国产矩形波导参数表 .....	444
附录 7 方向性乘积定理的证明 .....	445
附录 8 H 面喇叭 H 面辐射场中积分公式的推导 .....	445
附录 9 矩形喇叭的方向性系数(推导) .....	447
附录 10 卡塞格伦天线几何参数之间的关系(推导) .....	448
附录 11 (偶数序号)习题答案 .....	450
参考文献 .....	468

# 上篇 电磁理论基础

## 第一章 矢量分析

本章仅限于在实数域内介绍矢量的定义、性质及有关运算。

### § 1-1 标量、矢量及场的概念

#### 一、标量

数学上的标量就是只用数值即可表示的量(记为  $A, T, a, t, \dots$ )。

一个标量可以是时间和空间坐标的函数。

物理中的标量(如:温度、电流、能量等)还需带有相应的量纲。

#### 二、矢量

##### 1. 定义

矢量是既有大小又有方向且满足平行四边形法则的量(记为  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ )。

在图 1.1 中描述了矢量满足平行四边形法则的含意: $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  之和等于以  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  为邻边所作的平行四边形的(夹于  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  之间的)对角线。

$\mathbf{A}$  矢量的大小(或长度)称为其模值(记为  $|\mathbf{A}|$  或  $A$ ), 它是一个正实数。

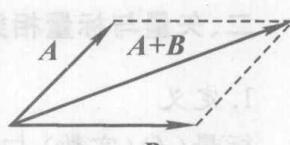


图 1.1 平行四边形法则

##### 2. 矢量的相等

对矢量  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ , 若有  $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$  且两矢量同方向, 则称  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  相等(记为  $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ )。

##### 3. 矢量的负值

矢量  $\mathbf{A}$  的负值(记为  $-\mathbf{A}$ )是一个矢量, 它的模值与  $\mathbf{A}$  相同但方向相反。

##### 4. 单位矢量

若矢量  $\mathbf{A}$  的长度为 1(即  $|\mathbf{A}| = 1$ ), 则称其为单位矢量(记为  $\hat{\mathbf{A}}$ )。一般有  $\hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{A}$ 。

##### 5. 零矢量

若矢量  $\mathbf{A}$  的模值为零(即  $|\mathbf{A}| = 0$ ), 则称其为零矢量。

### 三、场

#### 1. 定义

广义而言,所有具有分布特性(即为时、空坐标的函数)的物理量,都可视为具有相应物理意义的场。

#### 2. 标量场

如果所研究的量是标量,则对应于标量场。在标量场中,每一时刻、每一位置都对应一个标量值。如:地球周围大气的温度及含氧量即可视为标量场。

#### 3. 矢量场

如果所研究的量是矢量,则对应于一个矢量场。在矢量场中,每一时刻、每一位置都对应一个矢量值。如:地球周围的风速及地球的引力均可视为矢量场。

在数学领域,为研究问题方便,常抽象出标量场和矢量场而不考虑其物理特性,这也是本章讨论问题的基点。

## § 1-2 矢量的运算规则

### 一、矢量和

#### 1. 定义

$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$  如图 1.2 所示: $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  的和等于  $\mathbf{C}$ , $\mathbf{C}$  是这样一个矢量,当把  $\mathbf{A}$  的终端与  $\mathbf{B}$  的始端置于一处时, $\mathbf{C}$  由  $\mathbf{A}$  的始端指到  $\mathbf{B}$  的终端。

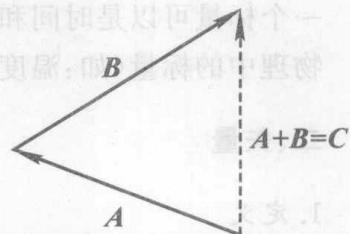
#### 2. 性质

$$(1) \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

(交换律)

$$(2) \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{D}$$

(结合律)



### 二、矢量与标量相乘(数乘)

#### 1. 定义

标量( $f$ )(实数)与矢量( $\mathbf{A}$ )之积为矢量,其大小为  $f$  的绝对值与  $|\mathbf{A}|$  之积;其方向当  $f > 0$  时同于  $\mathbf{A}$  方向,当  $f < 0$  时与  $\mathbf{A}$  方向相反。

#### 2. 性质

$$(1) f\mathbf{A} = \mathbf{A}f$$

(交换律)

$$(2) g(f\mathbf{A}) = (gf)\mathbf{A} = f(g\mathbf{A})$$

(结合律)

$$(3) (g + f)\mathbf{A} = g\mathbf{A} + f\mathbf{A}$$

(分配律)

$$f(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = f\mathbf{A} + f\mathbf{B}$$

### 三、矢量的标积(点积)

#### 1. 定义

两矢量( $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ )的标积为标量,它等于两矢量的模与两矢量正向夹角的余弦三者之积。

记为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\alpha$$

角度  $\alpha$  如图 1.3 所示。

## 2. 性质

$$(1) \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

(交换律)

$$(2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D}$$

(分配律)

(3)  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$  等价于下面的结论:

$\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  垂直(条件:  $|\mathbf{A}| \neq 0$  且  $|\mathbf{B}| \neq 0$ )。

(4) 若  $|\mathbf{A}| = 1$ , 则  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  代表矢量  $\mathbf{B}$  在  $\hat{\mathbf{A}}$  方向的投影。

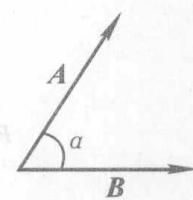


图 1.3 矢量的点积

## 四、矢量的矢积(叉积)

### 1. 定义

两矢量( $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$ ) 的矢积为一个矢量, 它表示为

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{n}} |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin\alpha$$

其中:  $\alpha$  为  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  正向夹角;  $\hat{\mathbf{n}}$  为垂直于  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  的单位矢量且  $\hat{\mathbf{n}}$  与由  $\mathbf{A}$  (经  $\alpha$  角) 到  $\mathbf{B}$  满足右手法则(见图 1.4)。

### 2. 性质

$$(1) \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

(不满足交换律)

$$(2) \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D}$$

(分配律)

(3)  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$  等价于下面的结论:

$\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  同(或反)方向(条件  $|\mathbf{A}| \neq 0$  且  $|\mathbf{B}| \neq 0$ )。

(4)  $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$  代表以  $\mathbf{A}$  与  $\mathbf{B}$  为邻边所作的平行四边形的面积。

以上定义了矢量的 4 种基本运算(规则), 关于矢量的其他(更复杂的) 运算都可以由上面的 4 种基本运算派生出来。

靠“运算规则”进行矢量运算很不方便, 还需进一步探讨矢量的运算方法, 这必须在一定的坐标系中方能实现。

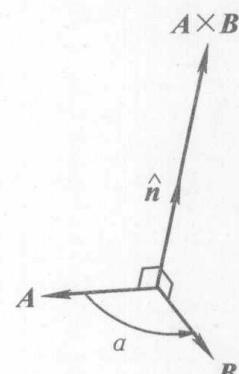


图 1.4 矢量的叉积

## § 1-3 正交坐标系

### 一、直角坐标系

#### 1. P 点的坐标

如图 1.5 所示, 空间任意一点  $P$  点在直角坐标系中的坐标为  $(x, y, z)$ 。

#### 2. P 点的坐标单位矢量

如图 1.6 所示, 空间任意一点  $P$  点的坐标单位矢量为  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ , 它们分别指向对应坐标增值方向且三者互相垂直并满足如下关系:

$$\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}, \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}, \quad \hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$$

【注】  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  皆为常矢量。

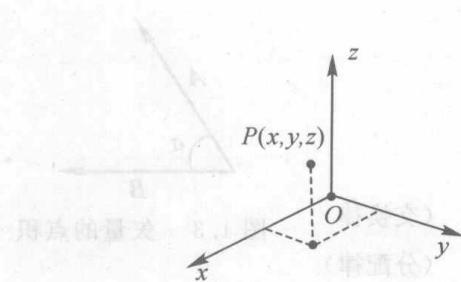


图 1.5 直角坐标系

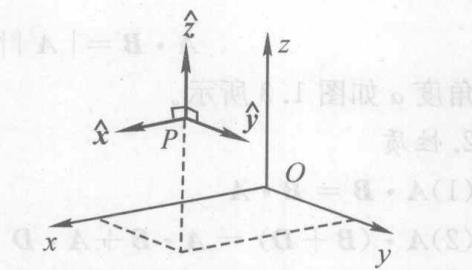


图 1.6 直角坐标单位矢量

### 3. P 点的位置矢径

如图 1.7 所示,空间任意一点 P 点的位置矢径为

$$\mathbf{r}_P = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z = \mathbf{r}_x + \mathbf{r}_y + \mathbf{r}_z$$

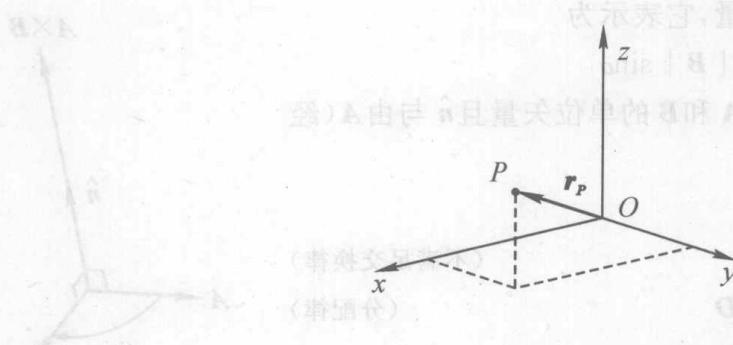


图 1.7 P 点的矢径

### 4. 坐标的定义域

#### 5. 几何解释

$x = x_0$ (常数)——平行于  $yOz$  坐标面的全平面。

$y = y_0$ (常数)——平行于  $zOx$  坐标面的全平面。

$z = z_0$ (常数)——平行于  $xOy$  坐标面的全平面。

## 二、圆柱坐标系

### 1. P 点的坐标

如图 1.8 所示,空间任意一点 P 点在圆柱坐标系中的坐标为  $(\rho, \varphi, z)$ 。

#### 2. 几何解释

$\rho = \rho_0$ (常数)——半径为  $\rho_0$  的圆柱面(以  $z$  轴为几何对称轴)。

$\varphi = \varphi_0$ (常数)——一个半平面(以  $z$  轴为边界)。

#### 3. P 点的坐标单位矢量

如图 1.9 所示,  $P$  点的坐标单位矢量为  $(\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{z})$ , 它们分别指向对应坐标增值方向且三者互相垂直并满足如下关系

$$\hat{\rho} \times \hat{\varphi} = \hat{z}, \quad \hat{\varphi} \times \hat{z} = \hat{\rho}, \quad \hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\varphi}$$

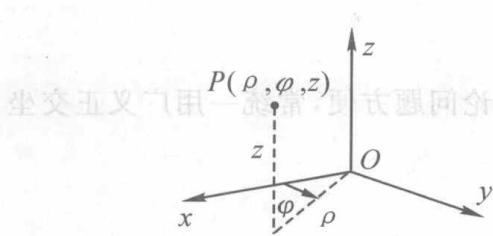


图 1.8 圆柱坐标系

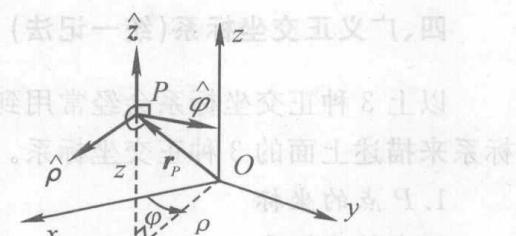


图 1.9 坐标单位矢量及矢径

#### 4. P 点的位置矢径

如图 1.9 所示,  $P$  点的位置矢径在圆柱坐标系中可以表示为

$$\mathbf{r}_P = \hat{\rho}\rho + \hat{z}z$$

#### 5. 坐标的定义域

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad |z| < \infty$$

### 三、球坐标系

#### 1. $P$ 点的坐标

如图 1.10 所示, 空间任意一点  $P$  点在球坐标系中的坐标为  $(r, \theta, \varphi)$ 。

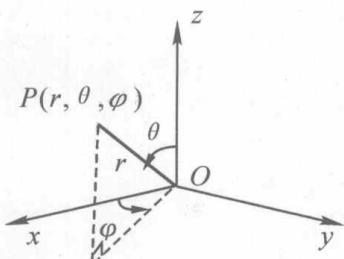


图 1.10 球坐标系

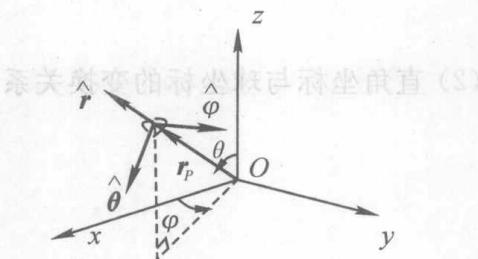


图 1.11 坐标单位矢量及矢径

#### 2. 几何解释

$r = r_0$  (常数) —— 以  $r_0$  为半径的球面(以球心为坐标原点)。

$\theta = \theta_0$  (常数) —— 以  $2\theta_0$  为顶角的圆锥面(锥顶在坐标原点,  $z$  轴为几何对称轴)。

#### 3. $P$ 点的坐标单位矢量

如图 1.11 所示,  $P$  点的坐标单位矢量为  $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ , 它们分别指向对应坐标增值方向且三者互相垂直并满足如下关系

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}, \quad \hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$

#### 4. $P$ 点的位置矢径

如图 1.11 所示,  $P$  点的位置矢径为

$$\mathbf{r}_P = \hat{r}r$$

#### 5. 坐标的定义域

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

#### 四、广义正交坐标系(统一记法)

以上3种正交坐标系会经常用到，必须熟练掌握。为讨论问题方便，常统一用广义正交坐标系来描述上面的3种正交坐标系。

##### 1. P点的坐标

P点的坐标为 $(u_1, u_2, u_3)$ 。

##### 2. P点的坐标单位矢量

P点的坐标单位矢量为 $(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \hat{u}_3)$ ，它们分别沿相应坐标增值方向且三者互相垂直并满足如下关系

$$\hat{u}_1 \times \hat{u}_2 = \hat{u}_3, \quad \hat{u}_2 \times \hat{u}_3 = \hat{u}_1, \quad \hat{u}_3 \times \hat{u}_1 = \hat{u}_2$$

#### 五、三种常用坐标系之间的变换关系

##### 1. 坐标变换关系

###### (1) 直角坐标与圆柱坐标的变换关系

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

###### (2) 直角坐标与球坐标的变换关系

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \arctan \left[ \frac{(x^2 + y^2)^{1/2}}{z} \right]$$

###### (3) 圆柱坐标与球坐标的变换关系

$$\rho = r \sin \theta$$

$$z = r \cos \theta$$

$$r = (\rho^2 + z^2)^{1/2}$$

$$\theta = \arctan \frac{\rho}{z}$$

##### 2. 坐标单位矢量之间的变换关系

各种坐标系的坐标单位矢量之间的变换关系分别见表1.1、表1.2、表1.3。

**【例1-1】**  $\hat{x} = \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi$

$$\hat{r} = \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta$$

**【讨论】**  $\hat{\rho}, \hat{\varphi}, \hat{r}, \hat{\theta}$  坐标单位矢量的方向随空间位置的变化而改变，一般来讲，它们均为变矢量。