# 功耗率最小与工程力学中的各类变分原理

周筑宝　唐松花　著

科学出版社
www.sciencep.com

# 功耗率最小与工程力学中的各类变分原理

周筑宝　唐松花　著

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是作者多年研究成果的总结，全书共分8章，第1章是全书的内容摘要，重点是介绍本书的创新之处. 第2章对新最小耗能原理进行了更为严谨的证明，并阐述了它在科学上的价值和意义. 第3章由上述新最小耗能原理导出了一个新极值原理——最小功耗原理. 由于最小功耗原理不仅适用于保守系统，而且还适用于存在能量耗散项的非保守系统，因此它可作为建立各类力学变分原理的统一理论框架. 以后的第4~7章，分别讨论了最小功耗原理在分析力学、弹性力学、塑性力学和黏弹性力学中的应用问题. 第8章对如何实现上述各类新变分原理的有限元法计算问题进行了一讨论.

本书可作为工程力学或与工程力学有关的各类工程科学专业的研究人员、大学教师、工程技术人员、博士和硕士研究生以及高年级本科生参考用书. 另外，本书介绍的新理论对从事与热力学有关工作的各类人员，也具有一定的参考价值.

**图书在版编目(CIP)数据**

功耗率最小与工程力学中的各类变分原理/周筑宝，唐松花著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-019852-5

I. 功… II. ①周…②唐… III. 工程力学—研究 IV. TB12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 135605 号

责任编辑：胡 凯 / 责任校对：李奕萱

责任印制：赵德静 / 封面设计：王 浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007年9月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2007年9月第一次印刷 印张：15

印数：1—2 000 字数：282 000

**定价：46.00 元**

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

# 目 录

# 第 1 章　绪　　论

## §1.1　为什么要写这本书?

在文献 [1] 正式出版之后, 得到了一些素不相识、但对该文献所研究问题感兴趣的专家、学者和一些有关专业博士生的关注. 他们或通过写信、或打电话、或顺路、或专程从外地前来与我讨论有关问题. 外地高校 (指长沙地区以外的高校) 的有些博士生的博士学位论文, 还将文献 [1] 提出的解决问题的新理论、新思路和新方法, 用于所研究的题目, 并将该文献列为主要参考文献. 有位我至今也未曾见过一面的资深教授, 虽然对文献 [1] 有不同看法, 但他还是对该文献作出了 "莫要小看这本书, 在世界上这样从根本上解决科学上的理论问题是不多的" 的评价. 另外, 从互联网上现已查到, 文献 [1] 已被发表在包括《中国科学》在内的一些权威刊物上的数十篇论文引用. 以上情况对于苦苦从事建立新最小耗能原理 (即拓宽现有最小耗能原理适用范围) 研究工作二十多年的我, 无疑是一种精神上的支持与鼓励. 但由于这项研究工作属于源头性的基础理论创新, 所涉及的又是一个具有普遍意义的科学规律, 因而成果出来之后, 即使成果正确也必然还要经历相当长的一段时间, 才能逐渐为科学界理解和接受. 这是因为对任何一个被新发现的、具有普遍意义的科学规律而言, 在它所能覆盖的各个学科领域内, 都必需经历一个严格的考核和验证过程才能逐渐被理解和接受. 这个过程既挑剔又苛刻, 并且创新力度越大, 考核和验证的过程通常也会越长. 例如麦克斯韦 1864 年就导出了具有划时代意义的电磁场方程, 但直到 1888 年他的电磁场理论才获得科学界的承认, 历时 24 年, 而此时麦克斯韦本人已经逝世 9 年了.

显然, 这个任何基础理论创新成果都必需经历的过程, 对于我所提出的新最小耗能原理也不能例外. 为了尽可能地缩短这个过程, 除了必需不断地充实和完善已有的研究成果之外, 还必需认真领会、思考质疑者提出的各种问题, 并作出正确的回答和解释, 为此, 我写了这本书.

在文献 [1] 正式出版之后, 我曾认真地重读过几遍, 除发现少许漏检的印刷错误之外, 在对一些问题作了进一步思考之后, 感到其中的第 2 章和第 5 章写得特别不能令人满意. 因此就萌生了重写第 2 章并大大充实第 5 章的想法. 重写第 2 章是为了使新最小耗能原理的证明更严谨一些, 以及将该原理在科学上的意义和价值说得更清楚一些; 大大充实第 5 章则是为了在我所熟悉的固体力学领域内更全面、更广

泛地考核及验证新最小耗能原理的正确性, 并凸显其也可为固体力学变分原理领域提供许多新的思路和新的具有应用价值的成果. 这本书的主要内容就是基于以上考虑确定下来的.

如文献 [1] 所述, 新最小耗能原理适用于热力学所能覆盖的一切领域, 但对其中的许多领域我并不熟悉, 因此如果我的研究工作能够引起除力学以外的其他领域 (特别是生命科学领域) 的学者们的关注, 则是我所衷心期待的事情. 只要身体和精力允许, 我还将继续就新最小耗能原理在其他方面 (例如流体力学方面) 的应用问题进行研究, 并乐于和一切关心 "新最小耗能原理及其应用" 研究工作的同志进行讨论.

本书的第二作者唐松花副教授具体参与了本书第 2、5、8 章的一些工作.

## §1.2 关于新最小耗能原理

本书第 2 章实际上是对文献 [1] 的第 2 章进行重写的结果. 在重写过程中, 一是增加了证明在非线性非平衡态热力学过程中的任意瞬时 $t$ 附近的一个微小区间 $t \pm \mathrm{d}t$ 内, 非线性的 "力"、"流" 关系都可以近似地视为唯象系数 $l_{ij}$ 为常数、且满足 Onsager 倒易关系 (即 $l_{ij} = l_{ji}$) 的线性关系, 并且在 $t$ 瞬时这种线性关系与真实的非线性关系之间并无差异的内容 (详见本书之 §2.3), 从而使新最小耗能原理的证明更趋严谨.

二是重写后的第 2 章通过一个简单动力学问题的启示, 特别凸显了新最小熵产生原理与 I.Prigogine 所确立的最小熵产生原理 (亦即新最小耗能原理与现有的最小耗能原理) 的根本不同就在于, 前者的 "最小" 是指非线性非平衡态热力学过程中任意瞬时的 (不管在该瞬时系统是否已达到了稳定态) 所有可能熵产生 (耗能率) 中的最小值. 而后者的 "最小" 则是指从恒定边界条件被给定之时起, 直到系统达到稳定态止的全过程范围内, 系统的所有可能熵产生 (耗能率) 中的最小值. 并且前者的 "最小" 是在过程中的任意瞬时都有, 而后者则只有在达到稳定态时才取最小值 (详见本书之 §2.2 及 §2.4~§2.8).

三是重写后的第 2 章指出了: 由于新最小耗能原理 (亦即新最小熵产生原理) 实际上已将现有的最小耗能原理 (亦即 I.Prigogine 的最小熵产生原理), 从一个只在平衡态附近线性区的稳定态才成立的结论, 拓展成为一个在非线性非平衡态热力学过程的任意瞬时都成立的结论, 从而使新最小耗能原理具有了普遍意义. 如所周知: 热力学第一定律解决了在能量传输和转换过程中, 各种参与传输和转换的能量之间应该维持一种什么样的关系的问题; 热力学第二定律解决了在能量传输和转换过程中, 各种参与传输和转换的能量究竟朝什么方向传输和转换的问题. 而具有了普遍意义的新最小耗能原理则解决了在能量传输和转换过程中, 各种参与传输和

转换的能量究竟以一种什么样的速率进行传输和转换的问题. 显然, 由于新最小耗能原理的加入, 将使目前已广泛应用于各学科领域的能量原理更趋完善. 从这个意义上来说, 应该可以把新最小耗能原理视为是一个能与热力学第一和第二定律并列的自然界的基本规律. 这就是新最小耗能原理在科学上的价值和意义.

## §1.3 固体力学的变分原理与基于新最小耗能原理的最小功耗原理

在固体力学中, 通常把与固体力学问题所应遵循 (满足) 的基本方程 (即所谓控制方程) 和定解条件等价的某种泛函的取极值条件称为变分原理. 显然, 如果可以找到或 "构造" 出一个泛函, 并且满足该泛函的取极值条件就相当于满足我们所关心的固体力学问题所应遵循的基本方程和定解条件, 那么该泛函的取极值条件就是与该固体力学问题相应的变分原理.

由于变分原理是进行结构分析的重要手段, 因此究竟如何才能更方便地从固体力学问题所应遵循的基本方程和定解条件出发, 来导出与之相应的变分原理也就成了众多研究者所共同关心的热点问题. 因为在一般情况下, 这种经典变分法教程中所研究的问题的逆问题, 是一个众所周知的难题. 例如, 20 世纪 50 年代胡海昌、鹫津久一郎针对弹性力学问题, "构造" 出了这种泛函, 从而建立了所谓的三类变量广义变分原理时, 曾被认为是一项重要成就, 并被称为胡 - 鹫变分原理 [2,3]. 进一步的研究表明 [4], 解决这类问题最方便的途径, 是建立一些与所研究的固体力学问题有关的泛函的极值原理. 例如现有理论中的最小作用量原理 (即 Hamilton 原理)、最小势能原理、最小余能原理等极值原理, 就为建立固体力学中的各种类型的变分原理提供了极大的方便. 上面提到的所谓胡 - 鹫变分原理, 如果借助于最小势能原理和 Lagrange 乘子法, 就可以轻而易举地得到, 这已是众所周知的了.

由于现有理论中的上述一些极值原理, 原则上都不适用于具有能量耗散情况的非保守系统, 因此建立像塑性力学或黏弹性力学这类需要考虑能量耗散的固体力学问题的变分原理时, 就会比建立分析力学和弹性力学 (它们通常不需考虑能量耗散, 因而可以利用上述极值原理) 的变分原理时遇到的困难要大得多. 例如塑性动力学现有理论中的 Martin 变分原理和 Тамуж (英译 Tamuzh) 变分原理 [5,6] 以及黏弹性力学现有理论中具有代表性的 Gurtin 和 Christensen 的各类变分原理 [7,8] 等, 都是通过采用先 "构造" 出一个泛函, 然后再证明满足这个泛函的取极值条件与满足相应的塑性动力学或黏弹性力学问题所应遵循的基本方程和定解条件等价 (即问题的真实解答将使该泛函取驻值) 的方法 (亦即采用与 20 世纪 50 年代建立所谓胡 - 鹫变分原理相同的方法) 来建立的. 由于在建立上述塑性动力学及黏弹性力学中的

一些变分原理时, 对其中所采用的泛函究竟是怎样“构造”出来的这个关键性问题无法作出回答, 这样就使得在试图对类似问题“构造”所需要的泛函时完全无章可循. 正像钱伟长指出的那样“所有上述工作, 都只证明对于特定的问题有一个特定的泛函, 通过变分可以全部满足这个问题的一切条件, 但都没有讲明他们的泛函是怎样建立的. 好像对于建立广义变分原理的特定泛函是一门艺术, 带有很浓厚的神秘性”[4]. 显然, 要完成这样一件“带有很浓厚的神秘性”的工作, 的确不是一件容易做到的事情.

本书第 3 章根据新最小耗能原理和最小作用量原理, 导出了一个可以包含能量耗散项在内的新极值原理 —— 最小功耗原理, 即“任何作用于系统的外力功消耗过程, 都将在与其相应的约束条件下, 以消耗外力功最小的方式进行.”这里所谓的“外力功消耗”(或“消耗外力功”)是指作用于系统的外力功被转换为系统的势能、动能及耗散能; 这里所谓的“以消耗外力功最小的方式进行”, 是指在外力功消耗过程中的任意瞬时, 其外力功的消耗率 (简称“功耗率”) 都取当时所有可能外力功消耗率中的最小值; 这里所谓的“相应的约束条件”, 是指在外力功消耗率的表达式中包含的物理量所应满足的控制方程 (即基本方程) 和定解条件. 于是根据上述基于新最小耗能原理的最小功耗原理, 各类力学问题 (无论其是否需要考虑能量耗散) 的变分原理, 都可用在满足所讨论问题的基本方程及定解条件下的、使外力功率 (即“功耗率”) 泛函表示式取最小值的条件变分问题的形式给出.

综上, 最小功耗原理又可表述为: 各类力学问题的真实 (正确) 解答 (即满足所讨论问题全部基本方程和定解条件的解答), 都必使

$$\delta\dot{W}=\delta\Big(\iiint\limits_{v}F_i\dot{u}_i\mathrm{d}v+\iint\limits_{S_p}\bar{P}_i\dot{u}_i\mathrm{d}s\Big)=0 \tag{1.1}$$

或使与 (1.1) 式等价的

$$\delta\dot{U}_{\mathrm{H}}+\delta(\dot{U}_{\mathrm{s}}-\dot{T})=0 \tag{1.2}$$

$$\delta\dot{W}-\delta\dot{U}_{\mathrm{H}}-\delta(\dot{U}_{\mathrm{s}}-\dot{T})=0 \tag{1.3}$$

中的任一式成立. 其中 $\dot{W}$ 为总外力功率, $F_i$、$\bar{P}_i$ 分别为外力中的体力和面力分量, $\dot{u}_i$ 为位移分量的变化率 ($i$=1, 2, 3); $\dot{U}_{\mathrm{H}}$ 为总能量耗散率; $\dot{U}_{\mathrm{s}}$ 为总势能变化率; $\dot{T}$ 为总动能变化率.

本书的第 4、5、6、7 各章, 分别讨论了最小功耗原理在分析力学、弹性力学、塑性力学及黏弹性力学中的应用问题. 由第 4、5、6、7 各章的内容不难看出, 由最小功耗原理出发, 不仅可以得到现有理论中已有的各种类型的变分原理, 而且还可以

得到一些现有理论中还没有的一些新结果. 因此可以认为, 基于新最小耗能原理的最小功耗原理, 是一个与现有理论相容不悖的、更为一般的、具有更广泛用途的新极值原理. 它可为建立各类力学问题的变分原理带来极大的方便.

## §1.4 由最小功耗原理获得的一些有关分析力学和固体力学变分原理的新成果和新认识

### 1.4.1 最小功耗原理与分析力学[①]

本书第 4 章从最小功耗原理出发, 分别导出了分析力学中的动力学普遍方程、Newton 运动方程、第一类 Lagrange 方程、保守及非保守系统的第二类 Lagrange 方程和最小作用量 (即 Hamilton) 原理的事实表明, 可以认为分析力学的上述结果其实都可看作是本书第 3 章建立的最小功耗原理的特例.

### 1.4.2 关于弹性静力学变分原理的新成果和新认识

1. 三个新极值原理

本书第 5 章之 §5.1 及 §5.3 由最小功耗原理出发, 得到了关于弹性静力学问题的如下三个新极值原理:

(1) 最小外力功原理: 弹性静力学问题的真实 (正确) 解答, 必使作用于弹性体 $v$ 的总外力功 $w_{\text{ext}}=\iiint\limits_{v}F_iu_i\mathrm{d}v+\iint\limits_{S_p}\bar{P}_iu_i\mathrm{d}s$ 取最小值. 其中 $S_p$ 为 $v$ 的作用有面力的边界, $F_i$、$\bar{P}_i$ 分别为外力中的体力及面力分量, $u_i$ 为位移分量并且 $i=1,2,3$.

(2) 最小应变能原理: 弹性静力学问题的真实 (正确) 解答, 必使弹性体 $v$ 的总应变能 $\iiint\limits_{v}A(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}v$ 取最小值. 其中 $A(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}\sigma_{kl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}$ 为弹性体的应变能密度.

(3) 新最小余能原理: 弹性静力学问题的真实 (正确) 解答, 必使弹性体 $v$ 的总余能 $\iiint\limits_{v}B(\sigma_{ij})\mathrm{d}v$ 取最小值. 其中 $B(\sigma_{ij})=\int_0^{\sigma_{ij}}\varepsilon_{kl}\mathrm{d}\sigma_{kl}$ 为弹性体的余能密度. 之所以把它称为新最小余能原理, 是因为它是一个不同于现有最小余能原理的新极值原理.

由本书之 §5.1 及 5.3.7~5.3.10 知, 以上三个新极值原理无论对小变形或大位移变形 (有限变形) 情况的弹性静力学问题都成立, 并且由它们中的任何一个出发, 都

① 按力学学科分类, 分析力学应归类于 "一般力学"(或称 "基础力学") 之中.

可导出弹性静力学变分原理中现有的一些结果, 例如最小势能原理、最小余能原理 (余能驻值原理) 以及相应的各类完全或不完全的广义变分原理. 以上情况表明, 弹性静力学中现有的一些变分原理, 其实也都可看作是本书第 3 章建立的最小功耗原理的特例.

2. 对大位移变形弹性静力学中的 "余能驻值原理" 的新认识

鹫津久一郎在文献 [9] 中指出: 对大位移变形弹性静力学问题而言, "因为位移和应力分量是耦合的", 因此试图将最小余能原理推广到大位移变形弹性静力学 "未获成功". 钱伟长在文献 [4] 中则指出: "大位移变形弹性理论的最小位能原理是大家都知道的, 但有关的余能原理却长期以来没有解决. 当然由于变形中体积元素产生有限的变化, 所以, 像小位移变形弹性理论那样的最小余能原理, 的确并不存在. 如果把这些体积元素的变形考虑在内, 则相应的余能原理仍是存在的. " 他在文献 [4] 中给出了如下的所谓 "大位移弹性理论的余能驻值原理":

"在满足大位移变形的平衡方程, 及边界外力已给条件 (即应力边界条件) 的所有允许的 $\sigma_{ij}$、$u_i$ 中, 实际的应力 $\sigma_{ij}$ 和位移 $u_i$ 必使弹性体的泛函

$$\Pi = \iiint\limits_v [B(\sigma_{ij}) + \frac{1}{2}u_{k,i}u_{k,j}\sigma_{ij}]\mathrm{d}v - \iint\limits_{S_u} \bar{u}_i(\delta_{ik} + u_{i,k})\sigma_{kj}n_j\mathrm{d}s \tag{1.4}$$

为驻值. $B(\sigma_{ij})$ 为余能密度, 它满足

$$\begin{cases} B(\sigma_{ij}) = \varepsilon_{ij}\sigma_{ij} - A(\varepsilon_{ij}) \\ \dfrac{\partial B}{\partial \sigma_{ij}} = \varepsilon_{ij} \end{cases} \tag{1.5}$$

亦即, 使 (1.4) 式的泛函 $\Pi$ 为驻值的 $\sigma_{ij}$、$u_i$, 必满足边界位移已给的条件 (即位移边界条件). 在证明中, 我们利用了应力应变关系 (1.5) 式的第 2 式和应变位移关系 (即几何方程)"(以上摘自文献 [4] 之 §8.4).

综上可以看出: ①建立大位移变形弹性静力学问题的余能原理是一个十分困难的问题; ②这个困难问题已被我国著名科学家钱伟长先生解决了. 但需要指出: ①钱伟长在给出上述 "余能驻值原理" 时, 也未对以 (1.4) 式表示的泛函究竟是怎么 "构造" 出来的这个关键性问题作出交待; ②钱伟长实际上是在要求满足平衡方程、应力边界条件、物理方程 (即 (1.5) 之第 2 式) 及几何方程 (因为在证明中 "利用了应力应变关系 (1.5) 式的第 2 式和应变位移关系 (即几何方程)") 的条件下才完成了满足 $\delta\Pi = 0$ 即相当于满足位移边界条件的证明. 本书则: ①根据由最小功耗原理得到的大位移变形弹性静力学中的最小外力功原理、最小应变能原理及新最小余能原理, 分别在 5.3.8 及 5.3.10 中给出了以 (1.4) 式表示的泛函 $\Pi$ 究竟是如何 "构造" 出来的推导过程; ②在 5.3.9 中, 仅在要求满足平衡方程、应力边界条件及物理

方程的条件下,完成了满足 $\delta \Pi = 0$ 即相当于满足位移边界条件及几何方程的证明.显然,本书的上述工作实际上是对大位移变形弹性静力学"余能驻值原理"的更深入一步的重新认识和完善.

### 1.4.3 关于弹性动力学变分原理的新成果和新认识

1. 本书的 §5.2 由最小功耗原理导出了以 (5.63)、(5.63′) 或 (5.65′) 式表示的,基于最小功耗原理的小变形弹性动力学问题的新变分原理. 说它新是因为它是与现有的,关于过程时间的积分型原理 (例如小变形弹性动力学的 Hamilton 原理、广义变分原理和虚功原理 [4,9]) 不同的瞬态型 (即对于动力学过程任一瞬时都成立的非积分型) 的极值原理. 从这一瞬态型的新原理出发,在 §5.2 中分别导出了小变形弹性动力学现有理论中的 Hamilton 原理、广义变分原理、虚功原理、Lagrange 动力学方程和弹性体自由振动的广义变分原理. 除此之外,还对现有理论为什么在导出弹性体自由振动的广义变分原理时要加一个 $\frac{1}{2}$ 因子的、令人难于理解的问题作出了解释.

2. 本书的 §5.3 由最小功耗原理导出了以 (5.90)、(5.90′) 或 (5.93) 式表示的,基于最小功耗原理的大位移变形弹性动力学问题的新变分原理. 说它新也是因为它是与现有的、关于过程时间的积分型原理 (例如大位移变形弹性动力学的 Hamilton 原理、广义变分原理及虚功原理) 不同的瞬态型 (即对于动力学过程任一瞬时都成立的非积分型) 的极值原理. 从这一瞬态型的新原理出发,在 §5.3 中同样也分别导出了大位移变形弹性动力学现有理论中的 Hamilton 原理、广义变分原理、虚功原理、Lagrange 动力学方程和弹性体自由振动的广义变分原理.

以上情况表明,弹性动力学中现有的一些变分原理,其实同样也都可以看作是本书第 3 章建立的最小功耗原理的特例.

### 1.4.4 关于塑性力学变分原理的新成果和新认识

1. 由于在加载的情况下,只要是比例加载 (等向强化情况) 或在单调的沿加载面法线方向的加载 (随动强化情况),塑性力学的全量理论问题实际上与非线性弹性力学问题完全一样 [10](因为上述加载路径就是极值加载路径),因此本书第 5 章建立的最小外力功原理、最小应变能原理和新最小余能原理,对于适用于比例加载或单调的沿加载面法线方向加载的塑性力学全量理论同样成立.

2. 由于若用速率记号表示的增量 $\dot{\sigma}_{ij}$、$\dot{\varepsilon}_{ij}$、$\dot{u}_i$、$\dot{F}_i$、$\dot{\bar{P}}_i$ 来取代小变形非线性弹性力学基本方程、定解条件及 (5.1) 式中的 $\sigma_{ij}$、$\varepsilon_{ij}$、$u_i$、$F_i$、$\bar{P}_i$(它们分别表示应力、应变、位移、体力及面力分量) 之后所得到的就是塑性力学增量理论的基本方程、定解条件及关于增量亦成立的 (5.1) 式 [10,11]. 因此,对塑性力学中的非极值路径加

载问题, 也可按本书第 5 章类似的方法, 根据最小功耗原理建立起关于以速率 (增量) 记号表示的, 塑性力学增量理论的最小外力功原理、最小应变能原理和新最小余能原理. 在求得增量解之后, 再按加载顺序积分 (叠加) 即可求得最终解答.

3. 本书 §6.4 根据最小功耗原理建立了有别于上述塑性力学全量理论和增量理论的一个新变分原理 —— 弹塑性力学的率型变分原理: 即准静态弹塑性力学问题的真实解答, 必使总外力功消耗率取最小值. 由于这个新原理对过程的任一瞬时均成立, 因此它是一瞬态型的率型原理. 另外由于这个新原理中不仅包含势能项, 而且还包含能量耗散项, 这样就使得在现有塑性力学变分原理中, 将耗散能也等同于势能对待的不合理情况得以消除.

4. 本书之 §6.5 对塑性动力学问题的变分原理作了讨论. 除建立了基于最小功耗原理的弹塑性动力学率型变分原理和 Hamilton 型变分原理之外, 还在理想刚塑性的假设条件下, 从最小功耗原理导出了 Martin 变分原理 (即动力学加速度极值原理) 和 Тамуж 变分原理 (即运动学加速度极值原理), 从而解决了对这两个原理的泛函究竟是怎样 "构造" 出来的疑问, 并为 "构造" 别样形式的泛函, 进而建立其他形式的变分原理提供了新思路.

### 1.4.5 关于黏弹性力学变分原理的新成果和新认识

1. 本书之 §7.5 根据最小功耗原理, 建立了一个新的变分原理 —— 准静态黏弹性力学率型变分原理: 即准静态黏弹性力学问题的真实解答, 必使过程中任意瞬时的总外力功消耗率取最小值. 与本书 §7.4 所列举的准静态黏弹性力学现有的一些有代表性的变分原理相比, 新变分原理新在: ①它是一个关于过程任意瞬时均成立的瞬态性率型变分原理. 而本书 §7.4 列举的一些有代表性的、现有的变分原理, 则都是关于表示过程的时间参数 $t$ 的积分型原理. 由于积分型原理在求变分时, 实际上都隐含着求变分的符号与时间积分项的求积分符号进行顺序交换的内容, 而这种交换在一般情况下, 只有在关于时间积分项的积分结果与积分路径无关时才能进行. 显然, 如果荷载随时间变化, 即使对于具有确定上、下积分限的、关于时间的积分项而言, 它实际上可以对应于起点和终点荷载相同但加载路径却完全不同的多种不同加载 (积分) 路径. 鉴于黏弹性力学问题存在能量耗散情况, 因此上述积分项的积分结果与加载 (积分) 路径有关. 所以当荷载随时间而变时, 上述积分型原理只有在与时间参数有关的加载路径被完全给定之后才能被认为是正确的. 本书 §7.5 提出的新原理, 则因为是一个不包含关于时间参数积分项的瞬态性率型原理, 所以它不存在求变分的符号与求时间积分的符号进行顺序交换的问题; ②新变分原理由于是根据最小功耗原理直接建立的, 所以它具有明确的物理意义, 即准静态黏弹性力学问题的真实解答, 必使过程中任意瞬时的总外力功消耗率取最小值. 而 §7.4 中所

列举的一些现有理论中有代表性的变分原理, 都是通过验证准静态黏弹性力学问题的真实解答, 必使所"构造"出的泛函 (例如 §7.4 中的 $\phi_1 \sim \phi_6$、$M_1$ 及 $M_2$) 取驻值 (或极值) 的方法建立的, 鉴于这些原理都没能给出所"构造"泛函的物理意义, 因此它们也就不具有明确的物理意义; ③新变分原理的泛函根据最小功耗原理极易得到, 而 §7.4 所列举的一些现有理论中有代表性的变分原理, 则都没能对其所采用的泛函究竟是怎样"构造"出来的这一关键性问题作出说明, 因此, 使人感到"带有很浓厚的神秘性", 以致在试图对类似问题"构造"所需要的泛函时完全无章可循.

2. 本书 §7.7 还建立了另一个新变分原理 —— 基于最小功耗原理的黏弹性动力学问题的率型变分原理: 即黏弹性动力学问题的真实解答, 必使动力学过程中任意瞬时的总外力功消耗率取最小值. 之所以称它是一个新变分原理的原因, 与上述准静态情况类似, 故不赘述.

综上可见, 基于新最小耗能原理的最小功耗原理, 的确为固体力学 (含分析力学) 变分原理领域提供了许多新的思路和新的具有应用价值的成果. 最小功耗原理实际上可以被认为是建立各类力学变分原理的统一理论框架, 由本书第 6、7 两章中所涉及的塑性动力学及黏弹性力学现有理论中的变分原理可以看出, 像最小功耗原理这样的建立各类力学变分原理的统一理论框架, 在此之前还未曾被提出过.

## §1.5 关于将 Lagrange 乘子也作为待定未知函数的有限元法

本书第 8 章指出, 基于最小功耗原理的各类变分原理的一个主要特征, 是它们的无条件变分表达式中的 Lagrange 乘子的物理意义通常事先并不知道. 为此, 第 8 章特别讨论了将 Lagrange 乘子也作为待定未知函数的有限元计算方法. 虽然这种方法在一定程度上会导致计算工作量的增加, 但由于有限元法的计算工作实际上都是由计算机来完成的, 因此它所带来的负面影响并不显著. 但它带来的正面价值却很明显, 因为最小功耗原理具有普适性, 即无论对于是否具有能量耗散的各类力学问题, 都可根据最小功耗原理很容易地建立起带有待定 Lagrange 乘子的无条件变分表达式, 所以在把将 Lagrange 乘子也作为待定未知函数的有限元计算方法与最小功耗原理相结合之后, 将为用有限元法解决各类力学问题带来极大的方便.

## 参考文献

[1] 周筑宝. 最小耗能原理及其应用. 北京: 科学出版社, 2001.

[2] 胡海昌. 弹性理论和塑性理论中的一些变分原理. 中国科学, 1955(4).