

中国幻方

第二期

中国幻方研究者协会主编

16 阶 科 艺 幻 方

祝 福

辽宁师大 周开其



245	0	10	255	165	150	105	111	133	153	90	144	210	122	45	102
204	54	51	201	63	12	225	243	192	30	24	231	121	228	134	27
185	129	69	70	126	140	55	115	120	100	186	200	96	135	159	155
8	253	247	2	5	250	28	236	19	227	233	37	47	22	208	218
35	203	15	52	220	113	103	142	240	152	66	198	132	189	123	57
147	75	125	180	88	252	108	38	118	137	167	3	130	143	112	217
158	124	188	151	131	67	43	17	238	97	104	179	212	25	76	230
95	138	160	106	31	18	202	224	56	199	149	53	42	117	213	237
99	77	174	81	163	107	148	92	178	156	72	216	80	183	175	39
110	182	242	73	244	239	145	146	13	11	181	109	173	74	82	16
48	223	83	172	226	1	232	29	139	116	23	254	211	44	207	32
49	176	206	62	248	7	154	84	79	101	191	193	157	64	98	171
68	34	128	187	94	89	166	161	197	58	229	26	127	114	141	221
205	119	184	4	194	241	214	14	61	251	71	59	41	136	50	196
222	85	65	249	33	190	21	219	170	6	234	78	46	209	177	36
162	168	93	195	9	164	91	169	87	246	20	60	215	235	40	86

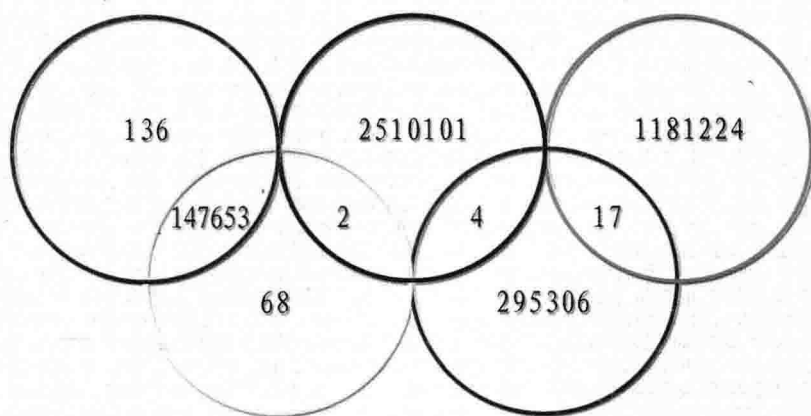
S=2040

香港天马图书有限公司



奥 微 积 五 环

张 润 修



环积=20080808

翻
印
必
究



版
权
所
有

ISBN 962-450-640-X



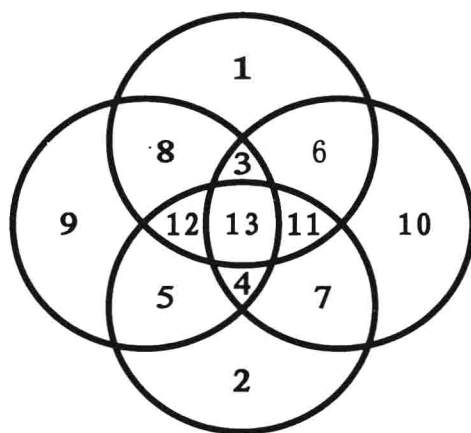
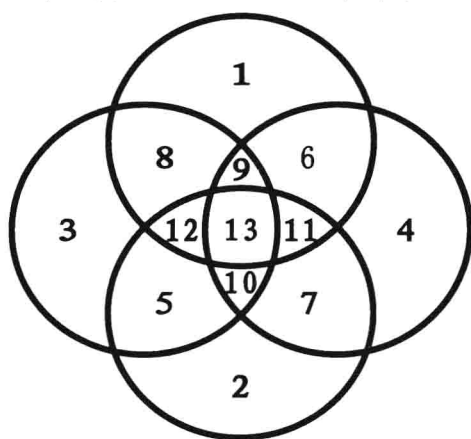
9 789624 506402

著 者：中国幻方研究者协会
出 版：天马图书有限公司
香港上水新成路123号3楼
电 话：(852)-26706633
传 真：(852)-26701382
印 刷：芜湖市丽士电脑
出版时间：2006年10月12日
印 数：1000册 定价：8.00元

国际书号：ISBN 962-450-640-X/D. 42672

魔环史话

2006年7月17日，汕头大学陈教授给出了四环棋的全套23解，录出如下。



起点解

1、S=60

3、11←13 9←11 S=52

4、1←12 2←13 S=41

5、10←9 5←4 S=42

6、12←1 13←2 S=53

7、9←3 11←5 S=59

8、6←10 5←9 S=55

9、7←6 8←7 S=56

10、1←12 2←13 S=45

11、3←5 9←11 S=43

12、4←8 5←9 S=39

13、12←1 13←2 S=50

14、3←4 2←3 S=49

15、1←2 9←10 S=48

16、2←12 3←13 S=38

17、10←4 11←5 S=44

18、3←1 5←3 S=46

19、12←1 13←2 S=57

20、6←5 7←6 S=58

21、1←12 2←13 S=47

22、3←10 4←11 S=40

23、12←1 13←2 S=51

2、3←9 4←10 S=54

菱形交换

轴上的交换

菱形交换

中心换四角

菱形交换

菱形交换

陈氏交换

对角线上的交换

菱形交换

菱形交换

陈氏交换

菱形交换

轴上的交换

中心换四角

菱形交换

菱形交换

轴上的交换

菱形交换

对角线上的交换

菱形交换

菱形交换

菱形交换

在这套交换中，出现了第7种交换形式，“陈氏交换”。其特点是：两个在对角线上，两个不在对角线上。在介绍四环棋的这7套交换形式时，我们遇到了麻烦，找到的总是“美中不足解”。这批“美中不足解”记录在封底，请大家帮忙，给出它的“标准解”。

2006年10月15日

目 录

间隔幻方

16 阶全等间隔数方.....	1
-----------------	---

可拆幻方

可拆幻方.....	4
一个多重、多幻和数组的八阶可拆幻方.....	6
一个多彩的八阶可拆幻方.....	7
幻海拾贝 28 届雅典奥运会纪念幻方.....	8
9 阶全对称双向可拆幻方的变换.....	9
12 阶可拆幻方和 3 个 12 阶四数幻方.....	10

超级幻方

一种构造超级幻方的简单方法.....	11
超级幻立方.....	13

双重幻方

双重幻方.....	36
双重幻方.....	37
奇特的 8 阶、16 阶双重幻方.....	39
幻海拾贝 可加 8 阶双重幻方.....	40
$(2k+1)^2$ 阶双重幻方的构造方法.....	41
一个 32 阶双重幻方的构造与性质.....	45
平方幻方与双重幻方的构造.....	47

高次幻方

高次幻方.....	51
众里寻她千百度——16 阶三次幻方寻解历程.....	56
16 阶广义优化三次幻方.....	60
九阶广义完美雪花平方幻方.....	63
高次幻方中的“黑马”——12 阶三次幻方.....	66
32 阶完美兼三次幻方.....	69
幻海拾贝 颠倒数三阶幻圆和五阶颠倒数完美幻方.....	70
32 阶平方完美幻方.....	71
32 阶三次全息数方.....	73
用电脑构造 256 阶四次幻方.....	77

组合幻方

多品种组合幻方.....	80
--------------	----

立体幻方

构造三阶幻立方的一种方法.....	83
四阶行列式简单幻立方.....	85
构造四阶立方体幻方的巧妙方法.....	87
六阶广义幻立方的构造方法及其变通.....	88

多维幻方

多维幻方通解公式.....	90
幻海拾贝 六阶可拆幻方.....	91
三阶简单四维幻方.....	92
素数阶四维泛对角幻体及其构造法.....	95

幻方应用

论幻方的数学思想在社会经济发展中的应用.....	103
把重点转移到普及与应用上来.....	104
幻海拾贝 一组泛对角线兼对角线优化幻方.....	104
香港回归纪念幻方.....	105
几个素数纪念幻方.....	106
获奖幻方的图形.....	107
幻方连续数字成为封闭线形定理.....	107
附：梁海声先生给编辑部的信.....	107
一种有趣的幻方游戏.....	108
一种与幻方有关的棋类游戏.....	110
幻海拾贝 可加八阶双重幻方.....	110

文献评介

《幻方与幻立方的当代理论》一书的主要成果.....	111
《百变幻方——娱乐数学第一名题》简介.....	113
林镜清幻方专辑选摘.....	123
介绍国外制作的一些奇趣幻方.....	126

幻圆幻图

一个多重 12 边形幻图.....	129
幻海拾贝 八阶完备子母幻方.....	131
从幻环到曲面体幻图.....	132
一组四阶连元一体化幻圆.....	134
蜂巢幻图浅谈.....	136
也谈幻圆.....	139
幻海拾贝 杨辉九九图转换成超级幻方的简单方法.....	141
12 数空心幻图研究.....	142
幻海拾贝 5 阶连续素数幻方.....	146
从幻方到幻矩阵.....	147

三层五星幻图.....	149
风流人物	
大山的故事——高治源的少年.....	152
用数字演绎不老人生——退休干部郭人焱和他的幻方人生.....	153
幻海拾贝 八阶二次幻方.....	154
梁培基的若干项成果简介.....	155
老骥伏枥志在千里——记中国幻方研究者协会副主席林镜清.....	156
遨游在素数幻方的奇妙世界.....	157
第五次冲击基尼斯世界记录——记 17 和 19 阶完美五维幻方创造发明者朱福成.....	160
数阵趣谈	
活页幻方.....	161
16 阶科艺幻方.....	169
协会信息	
电子信箱.....	171
附 录	
中国平方幻方记录.....	172
国际平方幻方记录.....	174
幻立方的幻性和分类.....	176
幻立方初步分类.....	176

16阶全等间隔数方

丁宝训

俞润汝

北京蓝旗营5门12楼502室 上海南汇荡湾15幢103室

俞润汝制作的16阶间隔数方,构造方法简单,易于掌握。所得数方能衍生三代(16阶、8阶、4阶),而且都是全等方(“全等方”指数方的每一条泛对角线上的诸数和都相等)。间隔数方是从数方中按一定形式间隔取数构成若干个低阶数方。

16阶全等间隔数方的构造步骤是:

一、制作一个16阶自然方阵(图1)。二、将图1的第2、3、6、7、10、11、14、15行加以倒排后,再将第2、3、6、7、10、11、14、15列加以倒排。由于自然方阵含有组成数方的基础,其所有的泛对角线和都等于相关数方的定和,因此将图1两次倒排所得到的图2是16阶中心对称数方。图2是编制16阶间隔数方的基础。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256

图1 (为了节省篇幅,这里只给出16阶自然方阵的4行)

1	242	243	4	5	246	247	8	9	250	251	12	13	254	255	16
32	239	238	29	28	235	234	25	24	231	230	21	20	227	226	17
48	223	222	45	44	219	218	41	40	215	214	37	36	211	210	33
49	194	195	52	53	198	199	56	57	202	203	60	61	206	207	64
65	178	179	68	69	182	183	72	73	186	187	76	77	190	191	80
96	175	174	93	92	171	170	89	88	167	166	85	84	163	162	81
112	159	158	109	108	155	154	105	104	151	150	101	100	147	146	97
113	130	131	116	117	134	135	120	121	138	139	124	125	142	143	128
129	114	115	132	133	118	119	136	137	122	123	140	141	126	127	144
160	111	110	157	156	107	106	153	152	103	102	149	148	99	98	145
176	95	94	173	172	91	90	169	168	87	86	165	164	83	82	161
177	66	67	180	181	70	71	184	185	74	75	188	189	78	79	192
193	50	51	196	197	54	55	200	201	58	59	204	205	62	63	208
224	47	46	221	220	43	42	217	216	39	38	213	212	35	34	209
240	31	30	237	236	27	26	233	232	23	22	229	228	19	18	225
241	2	3	244	245	6	7	248	249	10	11	252	253	14	15	256

图2 两次倒排得到的16阶中心对称数方

三、对图2的9-16行、9-16列进行倒排,就得到16阶全等间隔数方(图3)。

常用的间隔取数的方案有三种:

1、“隔1取1”取数:就是从左上角4个方格的某一个方格开始,横方向与竖方向都按照“隔1取1”的方法取数。

2、“隔2取2”取数：就是从左上角4个 2×2 方块的某一个方块开始，横方向与竖方向都按照“隔2取2”的方法取数。

3、“隔4取4”取数：就是从左上角4个 4×4 方块的某一个方块开始，横方向与竖方向都按照“隔4取4”的方法取数。

显然对于每一种间隔取数的方法，都可以同时得到4个阶数为原来一半的方阵。

1	242	243	4	5	246	247	8	16	255	254	13	12	251	250	9
32	239	238	29	28	235	234	25	17	226	227	20	21	230	231	24
48	223	222	45	44	219	218	41	33	210	211	36	37	214	215	40
49	194	195	52	53	198	199	56	64	207	206	61	60	203	202	57
65	178	179	68	69	182	183	72	80	191	190	77	76	187	186	73
96	175	174	93	92	171	170	89	81	162	163	84	85	166	167	88
112	159	158	109	108	155	154	105	97	146	147	100	101	150	151	104
113	130	131	116	117	134	135	120	128	143	142	125	124	139	138	121
241	2	3	244	245	6	7	248	256	15	14	253	252	11	10	249
240	31	30	237	236	27	26	233	225	18	19	228	229	22	23	232
224	47	46	221	220	43	42	217	209	34	35	212	213	38	39	216
193	50	51	196	197	54	55	200	208	63	62	205	204	59	58	201
177	66	67	180	181	70	71	184	192	79	78	189	188	75	74	185
176	95	94	173	172	91	90	169	161	82	83	164	165	86	87	168
160	111	110	157	156	107	106	153	145	98	99	148	149	102	103	152
129	114	115	132	133	118	119	136	144	127	126	141	140	123	122	137

图3 16阶全等多重间隔数方

原来的间隔数方只要求按“隔1取1”的方案取数能够得到4个数方，对图3按照三种间隔方案取数，每一种都得到4个八阶全等数方，因为图3是16阶数方。图4是三种取数方法得到的八阶全等数方的各一例子。

1	243	5	247	16	254	12	250	213	4	247	8	254	13	250	9
48	222	44	218	33	211	37	215	238	29	234	25	227	20	231	24
65	179	69	183	80	190	76	186	179	68	183	72	190	77	186	73
112	158	108	154	97	147	101	151	174	93	170	89	163	84	167	88
241	3	245	7	256	14	252	10	3	244	7	248	14	253	10	249
224	46	220	42	209	35	213	39	30	237	26	233	19	228	23	232
177	67	181	71	192	78	188	74	67	180	71	184	78	189	74	185
160	110	156	106	145	99	149	103	94	173	90	169	83	164	87	168
A. 隔1取1取数								B. 隔2取2取数							
65	178	179	68	80	191	190	77	65	178	179	68	80	191	190	77
96	175	174	93	81	162	163	84	96	175	174	93	81	162	163	84
112	159	158	109	97	146	147	100	112	159	158	109	97	146	147	100
113	130	131	116	128	143	142	125	113	130	131	116	128	143	142	125
177	66	67	180	192	79	78	189	177	66	67	180	192	79	78	189
176	95	94	173	161	82	83	164	176	95	94	173	161	82	83	164
160	111	110	157	145	98	99	148	160	111	110	157	145	98	99	148
129	114	115	132	144	127	126	141	129	114	115	132	144	127	126	141
C. 隔4取4取数															

图4 间隔取数所得八阶全等数方举例

按照三种取数方案得到的12个八阶全等数方全是间隔数方。例如图4A与图4B还可用隔2取2取数；图4C还可用隔1取1取数或者隔2取2取数方法分别得到4个四阶全等数方（图5）。显然图4A、图4B、图4C都只是其中的一个代表，这一步一共可得到32个实质不同的四阶全等数方（据乘法计算应得到64个四阶全等数方，但其中每一个都重复出现2次）。

· 一个 16 阶全等数方竟然可以衍生出祖孙三代全等数方共 $1(16 \text{ 阶}) + 12(8 \text{ 阶}) + 32(4 \text{ 阶}) = 45$ 个之多！真可算得上是一个大家族了。

65	179	80	190
112	158	97	147
177	67	192	78
160	110	145	99

65	178	80	191
96	175	81	162
177	66	192	79
176	95	161	82

图 5 图 4C 间隔取数所得四阶全等数方举例

观察发现，对上述 16 阶全等间隔数方用隔 1 取 1、隔 2 取 2 取数，得到的 8 个八阶全等数方中，每一个 2×2 方阵之四数和都是 514。注意，每个八阶全等数方中共有 $8 \times 8 = 64$ 个 2×2 方阵，而不是 $4 \times 4 = 16$ 个，因为数方中的每一个数都可作为 2×2 方阵的左上角。还发现，12 个八阶全等数方再间隔取数，得到的共 32 个四阶全等数方（图 5 给出了两个例子）中，每个 2×2 方阵之四数和也相等，也都是 514。可以把这个 2×2 方阵称为数方之基块。

以上构造方法完全可以推广到构造 32 阶、64 阶、……全等间隔数方，其中行列倒排的都是每连续 4 行（列）中取中间的行（列），所采用的重排码也可以作相应的推广。32 阶数方可衍生出四代、64 阶数方可衍生出五代、……。

用本文所介绍的方法构造的间隔数方似乎模拟了生物界的细胞分裂，1 分为 4、4 分为 16，……这不是很有趣吗？其后代都是全等数方，这多么像生物的遗传性？

如果只停留在 16 阶，读者还可以对图 2 数方采用其它合适的重排码作行列两个方向的“同步”重排，构造出新的 16 阶间隔数方。

2001-1 初稿 2005-8 定稿

责任编辑 李抗强

编者注：进一步挖掘，图 3 幻方又是一个多重可拆幻方。第一次分拆：依照图 3 中标记粗体字的方格取数，得到一个 16 阶八数完美幻方 C；余下的数组成另一个 16 阶八数完美幻方 D（图略）。第二次分拆：对于 16 阶八数完美幻方 C，又可以在每一个 4×2 方阵内取右图的 4 个方格，这些方格内的数组成一个 16 阶四数完美幻方，余下的方格内的数，组成另一个 16 阶四数幻方（图略）。聪明的读者一定可以想到，按照类似的方法，图 3 一共可以分拆成幻和相同的 4 个 16 阶四数完美幻方。从分拆的角度看，也相当于“祖孙三代”。

*	
*	
	*
	*

对于等距分布的双偶数阶幻方，分析它是否具有可拆特性的要点是：取某种分拆方法（分拆时每一行取数的数量应该是偶数），观察其每一条泛对角线上所含的方格数是否相等（据等距分布的特性，只要每一条泛对角线上所含的方格数相等，每一条泛对角线上诸数之和也就必然相等）。这里所介绍的可拆性，就是这样发现的。

有必要指出，对于可拆幻方方面的研究，是编者学习郭大焱先生有关可拆幻方的大作受到启发后才开始进行的。可以看出，一方面是主动地构造可拆幻方，另一方面可以发现某些幻方具有可拆的特性。

可拆幻方

郭大焱 (山西太原市建管委)

编者注 可拆幻方是郭大焱先生的创新,也是郭大焱幻方成果最多的课题。以前人们只研究单独的开天窗幻方,而且研究此课题的人也不太多。可拆幻方,就是将一个幻方分拆成两个或多个开天窗幻方,这是概念上的一个飞跃,比单独的开天窗幻方优美得多。

这里所介绍的成果是从《郭大焱幻方作品集》中精选的两个例子。

1、全对称九阶双向可拆幻方

(图1)由1~81顺序数组成,横向可拆成三个九阶三数幻方(图2、图3给出了其中的两个),同时纵向可拆成三个九阶三数幻方(图4给出了其中的一个),这些幻方的幻和均为123。为了便于观察,我们将3个九阶三数幻方的对角线上数字都标记了下划线,例如图2的两个对角线数组是(35, 46, 42)、(2, 68, 53)。

35	75	13	64	5	54	24	43	56
21	40	62	32	81	10	70	2	51
67	8	48	27	37	59	29	78	16
22	44	57	36	73	14	65	6	52
71	3	49	19	41	63	33	79	11
30	76	17	68	9	46	25	38	60
66	4	53	23	45	55	34	74	15
31	80	12	72	1	50	20	42	61
26	39	58	28	77	18	69	7	47

图 1

35	75	13						
						70	2	51
			27	37	59			
22	44	57						
						33	79	11
			68	9	46			
66	4	53						
						20	42	61
			28	77	18			

图 2

						24	43	56
			32	81	10			
67	8	48						
						65	6	52
			19	41	63			
30	76	17						
						34	74	15
			72	1	50			
26	39	58						

图 3

35			64			24		
21			32			70		
67			27			29		
		57			14			52
		49			63			11
		17			46			60
	4		45			74		
	80		1			42		
39			77			7		

图 4

3	8	1	7	0	5	2	4	6
2	4	6	3	8	1	7	0	5
7	0	5	2	4	6	3	8	1
2	4	6	3	8	1	7	0	5
7	0	5	2	4	6	3	8	1
3	8	1	7	0	5	2	4	6
7	0	5	2	4	6	3	8	1
3	8	1	7	0	5	2	4	6
2	4	6	3	8	1	7	0	5

图 5 Q 方阵

7	2	3	0	4	8	5	6	1
2	3	7	4	8	0	6	1	5
3	7	2	8	0	4	1	5	6
3	7	2	8	0	4	1	5	6
7	2	3	0	4	8	5	6	1
2	3	7	4	8	0	6	1	5
2	3	7	4	8	0	6	1	5
3	7	2	8	0	4	1	5	6
7	2	3	0	4	8	5	6	1

图 6 R 方阵

在图4这个九阶三数幻方中,每一个“大方格行”中所取的3列的相对位置是相同的,从上到下依次取的是1、3、2列。把从上到下依次所取的列的序号“1、3、2”,换成“2、1、3”或换成“3、2、1”,就得到纵向分拆的另外两个九阶三数幻方。

为什么图1幻方具有这么优美的性质呢?这是由于它具有两个结构上的特点:1、把它分成九大格,每一大格各行、各列三数之和都是123。2、它的两条主对角线上的数各自可以组合成3个和为123的等式:35+46+42、40+36+47、48+41+34、2+68+53、29+14+80、

56+41+26。。特点1为分拆后的各个行和、列和都相等创造了条件，利用特点2进行分拆，就能够使对角线上3数之和满足要求。

为了进一步研究，这里给出图1幻方的两个局部方阵——Q方阵、R方阵，按照公式

$$x = 9q + r + 1$$

计算，就得到图1幻方。图1幻方的两个结构上的特点，都充分体现在Q方阵和R方阵中。据这两个局部方阵，我们可以对图1幻方作一些变换，使之仍然是九阶双向可拆幻方：

(A) 将图1幻方的每一个人格旋转180度，得到的新九阶方阵（图7）与图1的行、列、主对角线数字组成都完全相同，因而图7仍然是双向可拆幻方。例如从上到下列的序号依次取“1、2、3”、“2、3、1”、“3、1、2”，就得到纵向分拆的三个九阶三数幻方。

(B) 按照公式 $y = 9r + q + 1$ 计算得到行、列组成不同的另外一个九阶双向可拆幻方（图8），对图8幻方也按照（A）所说的作变换，得到图9这个九阶双向可拆幻方。图8、图9幻方的分拆方案分别与图1、图7幻方相同。

48	8	67	59	37	27	16	78	29
62	40	21	10	81	32	51	2	70
13	75	35	54	5	64	56	43	24
17	76	30	46	9	68	60	38	25
49	3	71	63	41	19	11	79	33
57	44	22	14	73	36	52	6	65
58	39	26	18	77	28	47	7	69
12	80	31	50	1	72	61	42	20
53	4	66	55	45	23	15	74	34

图7

67	27	29	8	37	78	48	59	16
21	32	70	40	81	2	62	10	51
35	64	24	75	5	43	13	54	56
30	68	25	76	9	38	17	46	60
71	19	33	3	41	79	49	63	11
22	36	65	44	73	6	57	14	52
26	28	69	39	77	7	58	18	47
31	72	20	80	1	42	12	50	61
66	23	34	4	45	74	53	55	15

图8

24	64	35	43	5	75	56	54	13
70	32	21	2	81	40	51	10	62
29	27	67	78	37	8	16	59	48
65	36	22	6	73	44	52	14	57
33	19	71	79	41	3	11	63	49
25	68	30	38	9	76	60	46	17
34	23	66	74	45	4	15	55	53
20	72	31	42	1	80	61	50	12
69	28	26	7	77	39	47	18	58

图9

2、十阶可拆幻方

本文只给出图10这个十阶可拆幻方，它可以分拆为一个十阶四数幻方（图11，幻和为202）和一个十阶六数幻方（图略，幻和为303）。

18	1	31	65	50	49	41	67	99	84
94	28	62	89	45	55	13	38	7	6
21	69	66	93	97	3	9	37	33	77
74	87	11	61	47	53	43	85	19	25
78	29	10	44	81	15	59	96	71	22
23	72	91	57	20	86	42	5	30	79
27	14	90	40	54	48	58	16	82	76
80	32	35	8	4	98	92	64	68	24
7	73	39	12	56	46	88	63	26	95
83	100	70	36	51	52	60	34	2	17

图10

18	1							99	84
94			89			13			6
			93	97	3	9			
	87	11					85	19	
		10		81	15		96		
		91		20	86		5		
	14	90					16	82	
			8	4	98	92			
7			12			88			95
83	100							2	17

图11

此文曾在郭大焱幻方主页发表，这一次又作了较大的修改。

一个多重、多幻和数组的八阶可拆幻方

郭大焱

右图是由 1~64 共六十四个连续数组成的一个八阶完美幻方（幻和为‘260’），它又是一个半活动的可拆幻方。具体地说，可以按照图中有下划线分拆成两个八阶四数幻方，两个八阶四数幻方，幻和分别为‘66’（有下划线的）和‘194’（没有下划线的）。“半活动”，是说将整个幻方第一、二、三、四、五、六、七、八行（列）同时对调位置，或两行（列）上下（左右）一起移动（如同四阶完美幻方），其结果幻方上述性质不变。

62	<u>03</u>	47	<u>18</u>	49	<u>16</u>	36	<u>29</u>
35	<u>30</u>	50	<u>15</u>	48	<u>17</u>	61	<u>04</u>
<u>22</u>	43	<u>07</u>	58	<u>25</u>	40	<u>12</u>	53
<u>11</u>	54	<u>26</u>	39	<u>08</u>	57	<u>21</u>	44
64	<u>01</u>	45	<u>20</u>	51	<u>14</u>	34	<u>31</u>
33	<u>32</u>	52	<u>13</u>	46	<u>19</u>	63	<u>02</u>
<u>24</u>	41	<u>05</u>	60	<u>27</u>	38	<u>10</u>	55
<u>09</u>	56	<u>28</u>	37	<u>06</u>	59	<u>23</u>	42

此外，这个幻方还有很多八数与十六数的平方和（立方和）的等幂和数组。

一、第一、二、七、八行八个数平方和均为‘11 180’，立方和均为 540 800。第三、六行与第四、五行的十六个数的平方和均为‘22 360’（ 2×11180 ），立方和均为‘1 081 600’（ 2×540800 ）。

二、一、八（或七），二、七（或八），三、六（或五），四、五（或六）行间隔八数之平方和也均为‘11180’。如：一、八行的 62、47、49、36、9、28、06、23 和 03、18、16、29、56、37、59、42；一、七行的 62、47、49、36、24、05、27、10 和 03、18、16、29、41、60、38、55……等等。

这个幻方除上述的多重性外，还有下述多种幻和图形：

一、幻方横向由三十二对互补数组成（01、64， 02、63， 03、62 …… 30、35， 31、34， 32、33），数对的数和为‘65’，这样，任意四对数对之和即为幻和‘260’。

二、幻方纵向分别由 01~32（01、32， 02、31……15、18， 16、17）和 33~64（33、64， 34、53 ……47、50， 48、49），两组数对组成。数对之和分别为‘33’和‘97’。这样任意取两组‘33’的数对与两组‘97’的数对，八数之和也均为‘260’。

三、整个幻方的每一个半行、每一个半列的四数之和均为‘130’。

2004 年 7 月 4 日作

一个多彩的八阶可拆幻方

郭大焱

这是一个由 1 ~ 64 组成的、多彩有趣的、多重幻和的八阶可拆幻方,它可以按照图 2 拆成两个八阶四数幻方, 分别由 1~32 (粗体字) 和 33~64 两组数字组成, 两者的幻和分别为 66 和 194。

下面详细介绍这个幻方的优美性质。

一、幻方的每行为 4 对互补数 (这些数对都处于每一行从左到右平均划分的 4 段中), 它的每一列由四个和分别为 17、49、113、81 的数对组成 (这些数对, 都处于每一列的从上到下平均划分的 4 段中, 例如在第一列中: $29 + 20 = 49$ 、 $1 + 16 = 17$ 、 $38 + 43 = 81$ 、 $58 + 55 = 113$)。由于具有这样的特点, 在行、列中, 能够找到很多规则的幻和图形。

二、幻方中有多种二次数组 (八数之和等于 260, 并且八数之平方和等于 11180 的数组)。

1、幻方的每一个列数组都是二次数组。

2、第 1、7 列颜色相同 (图 1) 的 8 个方格中的数组成两个二次数组 (这两个二次数组是 ‘29、1、43、55、46、50、28、8’ 和 ‘20、16、38、58、35、63、21、9’)。第 2、8 列、第 3、5 列、第 4、6 列也具有同样的优美性质。

三、幻方还有十个由横向四对数组成的三次数组 (八阶幻方的三次数组, 就是八数之立方和为 540 800 的三次数组)。

1、中隔 4 列颜色相同并且字体相同的 8 个数都是三次数组, 其它 4 列中, 黄色与绿色的 8 个数也是三次数组。这一类共有 6 个三次数组。

2、第一、四行的前 4 个数 (或者后 4 个数) 组成两个三次数组 (例如 29、36、62、3、16、49、47、18 是其中的一个。第五、八行也是如此。这一类共有 4 个三次数组)。

四、在由 1~32 组成的八阶四数幻方中:

1、每一行都由和为 32 和 34 的两对数组成 (其中一对处于四数幻方的左侧, 另一对处于四数幻方的右侧), 每列都由和为 49 和 17 的两对数组成 (这两对数都处于相邻的位置), 由于具有这样的特点, 这个四数幻方中可以找到很多规则的幻和图形。

2、若把这个四数幻方如图 B 所示用粗线条分成四个四阶方阵。

A、每一个方阵的四角的四数之和均为 66, 平方和均为 1 430 (例如 29、3、16、18 是其中的一组数), 另外四个数具有同样的性质。以上共有 8 个四数二次等幂和数组。

B、每一个方阵上半部的四数之和都是 66、平方和均为 1 558, 下半部四数的和都是 66、平方和均为 1 302。这里也有 8 个四数二次等幂和数组。

29	36	62	3	4	61	35	30
20	45	51	14	13	52	46	19
1	64	34	31	32	33	63	2
16	49	47	18	17	48	50	15
38	27	5	60	59	6	28	37
43	22	12	53	54	11	21	44
58	7	25	40	39	26	8	57
55	10	24	41	42	23	9	56

图 1

29	36	62	3	4	61	35	30
20	45	51	14	13	52	46	19
1	64	34	31	32	33	63	2
16	49	47	18	17	48	50	15
38	27	5	60	59	6	28	37
43	22	12	53	54	11	21	44
58	7	25	40	39	26	8	57
55	10	24	41	42	23	9	56

图 2

3、幻方第一、二、一、六、二、五、三、四、三、八、四、七、五、六、七、八，两列八数之平方和均为‘2 860’。共有 8 个八数二次等幂和数组。

五、在由 33~64 组成的八阶四数幻方中，与（四）类似，可以找到同样多的规则的幻和图形，同样有 16 个四数二次等幂和数组（四数平方和为‘9 750’、‘9 622’、‘9 878’），也同时有 8 个八数二次等幂和数组（八数平方和为‘19 500’）。

六、整个幻方可以有下述多种变化，变换后的方阵不仅仍然是八阶可拆幻方，而且仍然具有上文所说的各种优美性质。

1、幻方相邻一、二行（列），三、四行（列），五、六行（列），七、八行（列）同时对调位置。

2、把幻方移动 4 行或者移动 4 列。

3、把幻方沿图 B 的粗线条分成上、下（或左、右）两部分，将这两部分同时上下翻转（或左右翻转），或者将这两部分各自旋转 180 度。

2004 年 9 月 9 日作

幻海拾贝

28 届雅典奥运会纪念幻方

这是郭人焱先生 2004 年 6 月 28 日为纪念‘28 届雅典奥运会’而作的八阶纪念幻方，它由 0~63 共六十四个连续数组成，幻和为‘252’，其共同特点是：

一、幻方是用三十二对和为 63 的数对横向排列组成。

二、幻方中间有下划线的四数是雅典奥运会开幕的日子 2004 年 8 月 13 日，下划线的数‘28’，则标明奥运会的届数。

三、对角线把幻方分割成相等的四部分，上、下、左、右每部分十二个数之和均为‘378’，其中两个数加六个数八数之和均为幻和‘252’；四个数上下和左右各自相加八数之和也等于幻和‘252’。

四、幻方的半行和、半列和均为‘126’。这样幻和的组合就更多了。

五、幻方中有 16 对和为 31 的数对规则地排列在某四列的第一、第三方格与第六、第八方格，或者排列在某四列的第二、第四方格与第五、第七方格。幻方中另外 16 对和为 95 的数也是类似地规则排列的。因而又能找到很多规则的幻和图形。

六、把幻方第一、第三、第六、第八行的数都作半行逆排（例如变换后第一行依次各个数是 42、21、17、46、58、05、19、44），得到另一个同样优美的 28 届雅典奥运会纪念幻方。

46	17	21	42	44	19	05	58
03	60	52	11	27	36	62	01
49	14	10	53	51	12	26	37
<u>28</u>	35	43	<u>20</u>	<u>04</u>	59	33	30
06	57	55	<u>08</u>	<u>13</u>	50	48	15
34	29	09	54	63	00	24	39
25	38	40	23	18	45	47	16
61	02	22	41	<u>32</u>	31	07	56

9阶全对称双向可拆幻方的变换

郭大焱

图 1 为全对称九阶双向可拆幻方，它可拆成纵、横各三个九阶三数幻方，图示为纵向分拆方法（分拆后的幻和都是 123，下同）。若把幻方列或行的排序变为：3、6、9、2、5、8、1、4、7 那末就成为图 2 和图 3 两个新的双向可拆幻方。

35	<u>75</u>	13	64	<u>5</u>	<u>54</u>	24	<u>43</u>	<u>56</u>
21	<u>40</u>	62	32	<u>81</u>	10	70	<u>2</u>	<u>51</u>
67	<u>8</u>	48	27	<u>37</u>	59	29	<u>78</u>	<u>16</u>
<u>22</u>	<u>44</u>	57	<u>36</u>	<u>73</u>	14	<u>65</u>	6	52
<u>71</u>	3	49	<u>19</u>	<u>41</u>	63	<u>33</u>	<u>79</u>	11
<u>30</u>	<u>76</u>	17	<u>68</u>	9	46	<u>25</u>	<u>38</u>	60
66	4	<u>53</u>	23	45	<u>55</u>	<u>34</u>	74	<u>15</u>
31	80	<u>12</u>	72	1	<u>50</u>	20	42	<u>61</u>
26	39	<u>58</u>	28	77	<u>18</u>	69	7	<u>47</u>

图 1

13	54	56	75	5	43	35	64	24
62	10	51	40	81	2	21	32	70
48	59	16	8	37	78	67	27	29
57	14	52	44	73	6	22	36	65
49	63	11	3	41	79	71	19	33
17	46	60	76	9	38	30	68	25
53	55	15	4	45	74	66	23	34
12	50	61	80	1	42	31	72	20
58	18	47	39	77	7	26	28	69

图 2

67	8	48	27	37	59	29	78	16
30	76	17	68	9	46	25	38	60
26	39	58	28	77	18	69	7	47
21	40	62	32	81	10	70	2	51
71	3	49	19	41	63	33	79	11
31	80	12	72	1	50	20	42	61
35	75	13	64	5	54	24	43	56
22	44	57	36	73	14	65	6	52
66	4	53	23	45	55	34	74	15

图 3

若再把图 2 按横向行或把图 3 按纵向列排序均变为：3、6、9、2、5、8、1、4、7 得到图 4 这个新的双向可拆幻方。再把图 4 上九个 3×3 方阵中各对应位置上的九个数组成新的九个 3×3 方阵，见图 5，又一个新幻方。

48	<u>59</u>	16	8	<u>37</u>	78	67	<u>27</u>	29
17	46	60	76	9	38	30	68	25
58	<u>18</u>	47	39	<u>77</u>	7	26	<u>28</u>	69
62	<u>10</u>	<u>51</u>	40	<u>81</u>	<u>2</u>	21	<u>32</u>	<u>70</u>
49	<u>63</u>	<u>11</u>	3	<u>41</u>	79	71	<u>19</u>	<u>33</u>
12	<u>50</u>	61	80	1	42	31	72	20
<u>13</u>	54	<u>56</u>	<u>75</u>	5	<u>43</u>	<u>35</u>	64	<u>24</u>
<u>57</u>	14	<u>52</u>	44	73	6	<u>22</u>	36	<u>65</u>
<u>53</u>	55	15	4	45	74	66	23	<u>34</u>

图 4

48	8	67	59	37	27	16	78	29
62	40	21	10	81	32	51	2	70
13	75	35	54	5	64	56	43	24
17	76	30	46	9	68	60	38	25
49	3	71	63	41	19	11	79	33
57	44	22	14	73	36	52	6	65
58	39	26	18	77	28	47	7	69
12	80	31	50	1	72	61	42	20
53	4	66	55	45	23	15	74	34

图 5

67	27	29	8	37	78	48	59	16
21	32	70	40	81	2	62	10	51
35	64	24	75	5	43	13	54	56
30	68	25	76	9	38	17	46	60
71	19	33	3	41	79	49	63	11
22	36	65	44	73	6	57	14	52
26	28	69	39	77	7	58	18	47
31	72	20	80	1	42	12	50	61
66	23	34	4	45	74	53	55	15

图 6

13	75	35	54	5	64	56	43	24
57	44	22	14	73	36	<u>5</u>	6	65
53	4	66	55	45	23	15	74	34
62	40	21	10	81	32	51	2	70
49	3	71	63	41	19	11	79	33
12	80	31	50	1	72	61	42	20
48	8	67	59	37	27	16	78	29
17	76	30	46	9	68	60	38	25
58	39	26	18	77	28	47	7	69

图 7

35	64	24	75	5	43	<u>13</u>	<u>54</u>	<u>56</u>
22	36	65	<u>44</u>	<u>73</u>	6	<u>57</u>	<u>14</u>	<u>52</u>
<u>66</u>	<u>23</u>	<u>34</u>	4	45	74	53	55	15
21	32	70	40	81	2	<u>62</u>	<u>10</u>	<u>51</u>
71	19	33	3	<u>41</u>	79	49	<u>63</u>	<u>11</u>
<u>31</u>	<u>72</u>	<u>20</u>	<u>80</u>	<u>1</u>	<u>42</u>	12	50	61
<u>67</u>	<u>27</u>	<u>29</u>	8	37	78	<u>48</u>	<u>59</u>	<u>16</u>
30	68	25	<u>76</u>	9	<u>38</u>	<u>17</u>	<u>46</u>	<u>60</u>
<u>26</u>	<u>28</u>	<u>69</u>	<u>39</u>	<u>77</u>	<u>7</u>	58	18	47

图 8

图 5 这个新的双向可拆幻方实际上和由图 1 各个 3×3 方阵同时旋转 180 度而生成的图形是相同的。图 5 若再重复图 1 的各个变换步骤那就得到图 6、图 7 和图 8。图 8 若重复图 4 变图 5 的步骤，则返回到图 1，整个变换形成一个“环”，显得甚为有趣。

2005 年作

12阶可拆幻方和3个12阶四数幻方

郭大焱

图1是一个12阶中心对称可拆幻方,它可以分拆成三个12阶四数幻方,分拆的图形如图2所示(字母A的方格、字母B的方格、填写数字的方格各自组成一个12阶四数幻方)。

分拆后,字母A的方格中含有1~24和121~144这些自然数;字母B的方格含有25~48和97~120这些自然数;填写数字的方格含有49~96、97~144这些自然数。这时3个四数幻方都是中心对称幻方,其幻和均为290。

如果在图1幻方中,把121~144这些数都减少96,也就是使字母A的方格含有1~48这些自然数;把25~48这些数都加上72,把97~120这些数都加上24,也就是使字母B的方格含有97~144这些自然数;填写数字的方格内的数据不变。那么变换后的方阵也是一个12阶可拆幻方(但不是中心对称的)。新的幻方分拆的方法不变,分拆后的幻和依次为98、290、482。

16	25	49	76	119	132	121	110	95	70	36	21
112	53	34	143	3	80	91	10	134	27	66	117
86	48	99	14	130	67	56	123	23	106	37	81
57	5	139	29	87	115	114	84	32	138	8	62
105	128	18	93	60	42	43	63	74	19	125	100
141	90	72	44	98	1	12	107	41	51	77	136
9	68	94	104	38	133	144	47	101	73	55	4
45	20	126	71	82	102	103	85	52	127	17	40
83	137	7	113	61	31	30	58	116	6	140	88
64	108	39	122	22	89	78	15	131	46	97	59
28	79	118	11	135	54	65	142	2	111	92	33
124	109	75	50	35	24	13	26	69	96	120	129

图1 12阶可拆幻方

A	B	49	76	B	A	A	B	95	70	B	A
B	53	B	A	A	80	91	A	A	B	66	B
86	B	B	A	A	67	56	A	A	B	B	81
57	A	A	B	87	B	B	84	B	A	A	62
B	A	A	93	60	B	B	63	74	A	A	B
A	90	72	B	B	A	A	B	B	51	77	A
A	68	94	B	B	A	A	B	B	73	55	A
B	A	A	71	82	B	B	85	52	A	A	B
83	A	A	B	61	B	B	58	B	A	A	88
64	B	B	A	A	89	78	A	A	B	B	59
B	79	B	A	A	54	65	A	A	B	92	B
A	B	75	50	B	A	A	B	69	96	B	A

图2

一种构造超级幻方的简单方法

欧 阳 录

湖南师范大学桃花坪校区离退休办

摘 要 本文证明, 只要有 n 阶幻方, 便有 n^2 阶超级幻方, 而且构造方法非常简易。

关键词 超级幻方 超级原幻方 正交

中图分类号 0157 **文献标识码** A

一个由 1 到 n^2 这 n^2 个自然数组成的 n^2 阶方块, 如果它的行和、列和、斜和及任何 $n \times n$ 子方块 (一共有 n^2 个 $n \times n$ 子方块) 内诸数之和都相等, 则称为 n^2 阶超级幻方。

2001 年我在 [www.World Thesis.com](http://www.WorldThesis.com) 上用中文发表了《超级幻方》一文。之后, 一些海外华人来信来电, 要我用英文重发一次, 以消除语言障碍。这年 8 月, *Mathematical theory and applicatious* 杂志同意刊登此文英文稿, 但主编认为论文较长, 要改写成两篇, 分别发表。2002 年, 发了 “On The Super Magic Square of Eyen Orer”, 2003 年, 要发 “On The Super Magic Square of Odd Orer” 时, 主编仍认为太长, 把有关的证明都删除了, 一篇稿子发了三年, 仍辞不尽意。

2003 年, 我把英文稿送交中国幻方研究者协会, 请转交国内的幻方专家, 希望激起国内对超级幻方的兴趣。果然, 收到很多来信, 其中特别是 2004 年 4 月 22 日同一天收到的甘肃黄均迪先生与福建苏茂挺先生的信件, 更令人兴奋。黄先生说, 对于九阶的超级幻方, 有更简单的方法造成, 并具体举了一例。苏先生说, 用耆那幻方造不出 $(4k+2)^2$ 阶超级幻方, 换个方法可以造出。实际上, 只把黄先生的方法一般化, 超级幻方的快速构造问题便可以全面解决, 因此, 本文的产生, 实应归功于黄苏两先生。

设有一个由 0, 1, 2, …, n^2-1 这 n^2 个自然数构成的方块 S , 它的行和、列和都是 $n(n-1)/2$, 令

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由 S , 用很简单的方法作出 n^2 阶方块 F (图略), 具体步骤是重复 S 的第 i 列 n 次, 作为 F 的第 $(i-1)n+1$ 列。重复 F 的第 $(i-1)n+1$ 列 n 次, 作为 F 的第 $(i-1)n+1$ 列到第 in 列 ($i=1, 2, 3, \dots, n$) (对方块 F 的构造方法, 请参看后面的实例以加深理解)。

一个由 0 到 n^2-1 各 n^2 个组成的 n^2 阶方块, 如果它的行和、列和、斜和及任何 $n \times n$ 子方块 (一共有 n^2 个 $n \times n$ 子方块) 内诸数之和都相等, 则称为 n^2 阶超级原幻方, 不难看出, F 是一个超级原幻方。

把 F 转置, 即把 F 的第 i 行作为第 i 列 ($i=1, 2, 3, \dots, n$), 成为方块 G (图略)。