

画法

几何

基本概念与解题指导

吴 忠

钱 万里

张运良

电力工业出版社

画 法 几 何

基 本 概 念 与 解 题 指 导

吴 忠 钱万里 张运良

电 力 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书是以介绍画法几何的基本概念及解题方法为主的教学参考书。全书包括：点、直线、平面、几何要素的相对位置、投影变换、曲线和曲面、几何体、几何体的截交与相贯、展开图以及类似对应等十章内容。每章都扼要地介绍本章的预备知识、基本概念及作图方法。全书共有三百余道例题与习题，每个题目都有详细的分析、作图步骤及解答。

本书可供工科院校师生与工程技术人员参考。

画 法 几 何

基本概念与解题指导

吴 忠 钱万里 张运良

*

电力工业出版社出版

(北京德胜门外六铺炕)

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

水利电力印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 16.5印张 380千字

1982年9月第一版 1982年9月北京第一次印刷

印数00001—24700册 定价1.40元

书号15036·4344

前 言

《画法几何学》是研究空间几何问题图示法和图解法的一门学科，是《工程制图》的理论基础。熟悉画法几何的基本理论并掌握解决画法几何问题的方法和技巧，这将丰富工程技术人员的空间想象力，并对从事生产和技术工作提供有力的工具和手段。

本书共分十章，每章通过对有关基本概念、基本理论和基本作图方法的叙述，系统地归纳了画法几何的基本内容。在此基础上，全书以更多的篇幅着重指导如何解决画法几何的具体问题。通过对典型例题的分析与作图，阐明解题思路和解题方法，并指出解题中需要注意的一些问题。本书从国内外的画法几何书籍、习题和资料中选编了三百余题，按章和题目的类别，由浅入深地、有分析地逐题进行详解，其中有基本作图题，也有一定数量的综合题，有些题还给出了多种解法。

本书初稿经巩永令副教授审阅。杨琨、郑明、田瑞生等同志协助绘制了部分插图，在此一并表示感谢。

由于编写时间仓促，编者水平有限，谬误之处在所难免，恳请读者指正。

编 者

一九八二年二月

目 录

前 言

第一章 点	1
预备知识	1
内容提要	1
基本作图与解题示例	6
习题详解	10
一、两投影面体系中点的投影问题	10
二、三投影面体系中点的投影问题	12
第二章 直线	18
预备知识	18
内容提要	18
基本作图与解题示例	21
习题详解	25
一、实长与夹角问题	25
二、直线的迹点问题	29
三、特殊位置直线、直线上的点、线段的定比分割问题	32
四、二直线的相对位置问题	35
五、二直线夹角的投影问题	36
第三章 平面	45
预备知识	45
内容提要	45
基本作图与解题示例	52
习题详解	58
一、平面的迹线问题	58
二、平面上的直线和点的问题	62
三、包含直线作一般位置平面的问题	68
四、由已知条件作平面图形的投影问题	69
五、平面对投影面的最大斜度线问题	71
第四章 直线与平面、两平面的相对位置	78
预备知识	78
内容提要	78
基本作图与解题示例	82
习题详解	94
一、作直线与平面平行的问题	94

二、作平面与平面平行的问题	95
三、作平面与直线平行的问题	98
四、平面与平面相交的问题	99
五、直线与平面相交的问题	106
六、非迹线平面相交的问题	110
七、三面共点问题	112
八、作直线与平面垂直的问题	113
九、作平面与直线垂直的问题	118
十、作平面与平面垂直的问题	122
十一、综合问题	123
第五章 投影变换	135
预备知识	135
内容提要	135
基本作图与解题示例	137
习题详解	151
一、变换投影面的基本问题	151
二、用换面法求交点、交线的问题	158
三、用换面法求平面与平面夹角的问题	160
四、用换面法求直线与平面夹角的问题	164
五、变换投影面的综合问题	167
六、绕垂直轴旋转的基本问题	172
七、绕平行轴旋转的基本问题	187
八、旋转法与换面法的综合问题	189
九、重合法问题	189
第六章 曲线和曲面	195
预备知识	195
内容提要	195
习题详解	199
一、圆的投影问题	199
二、曲线的实长问题	201
三、曲面的投影问题	201
第七章 几何体	204
预备知识	204
内容提要	204
习题详解	206
一、平面体的投影问题	206
二、曲面体的投影问题	211
第八章 平面、直线与立体相交以及两立体相交	215
预备知识	215

内容提要	215
基本作图与解题示例	222
习题详解	225
一、截交线问题	225
二、贯穿点问题	228
三、相贯线问题	231
第九章 展开图	236
预备知识	236
内容提要	236
基本作图与解题示例	238
习题详解	243
一、平面体的展开问题	243
二、曲面体的展开问题	245
第十章 亲似对应	248
预备知识	248
内容提要	248
习题详解	253
一、亲似对应的基本问题	253
二、利用亲似对应确定直线的迹点问题	255
三、利用亲似对应求直线与平面的交点问题	256
四、利用亲似对应求两平面的交线问题	257
五、利用亲似对应求截交线问题	258
六、圆与椭圆的亲似对应问题	260

第一章 点

预 备 知 识

- 1.点的概念：线上相邻两部分所公有的最小几何元素称为点；或者说点是两线的交界，点没有大小。
- 2.过空间一点可以且只能引一条直线与已知平面垂直。
- 3.三平面互相垂直时，它们的三条交线互相垂直，且交于一点。

内 容 提 要

一、点的正投影定义

由空间点向平面引垂线，垂足即该点在此平面上的正投影。

二、点与其正投影之间的关系

- 1.当投影面和投影方向确定时，空间一点只有唯一的投影。
- 2.点的一个投影不能确定该点的空间位置。如无其它附加条件，为确定点在空间的位置，则至少需要点在互相垂直的两投影面上的两个投影。

三、点在两投影面体系中的投影

1.点在两投影面体系中的投影规律

(1) 点的 H 投影到投影轴的距离，等于该点到 V 面的距离；点的 V 投影到投影轴的距离，等于该点到 H 面的距离。

(2) 点的两投影连线垂直于投影轴。

2.一般位置点的投影特性及判定法则(图1-1)

(1) 特性

I、III奇数分角内点的两个投影分居 ox 轴的两侧；II、IV偶数分角内点的两个投影同居 ox 轴的一侧。

(2) 判定法则

- ① I分角内的点 $\Leftrightarrow V$ 面投影在 ox 轴之上，
 H 面投影在 ox 轴之下；
- ② III分角内的点 $\Leftrightarrow H$ 面投影在 ox 轴之上，
 V 面投影在 ox 轴之下；
- ③ II分角内的点 $\Leftrightarrow V$ 面投影、 H 面投影都在 ox 轴之上；
- ④ IV分角内的点 $\Leftrightarrow V$ 面投影、 H 面投影都在 ox 轴之下。

3.特殊位置点的投影特性及判定法则(图1-2)

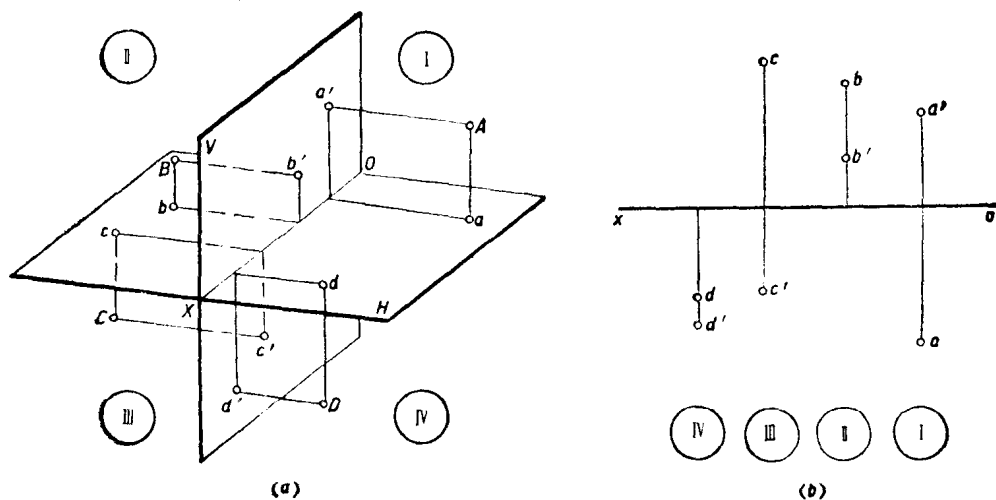


图 1-1 一般位置点的投影

(a) 立体图, (b) 投影图

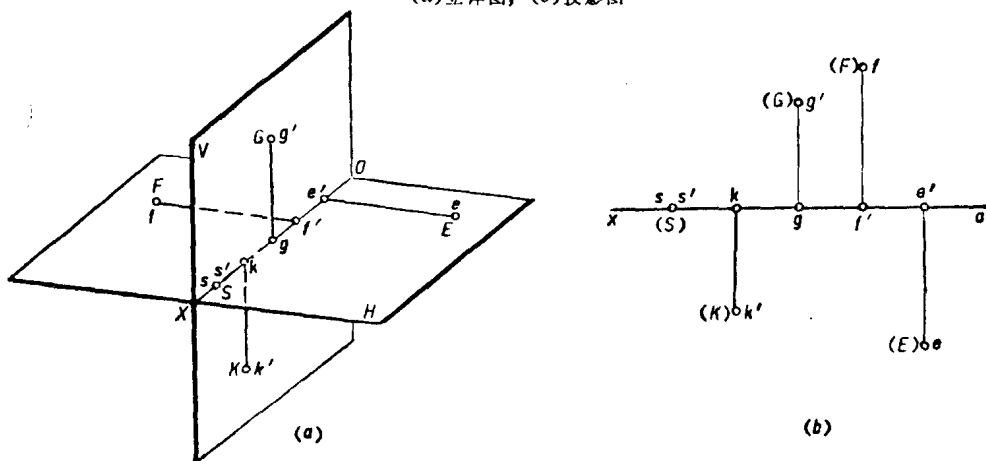


图 1-2 特殊位置点的投影

(a) 立体图, (b) 投影图

(1) 特性

投影面上的点, 其一投影重合于该点本身, 而另一投影在 ox 轴上; 投影轴上的点, 其两投影及本身均在 ox 轴上, 且重合于一点。

(2) 判定法则

点 E 在前 H 面 $\iff e'$ 在 ox 轴上, $e \equiv E$ 在 ox 下方;

点 F 在后 H 面 $\iff f'$ 在 ox 轴上, $f \equiv F$ 在 ox 上方;

点 G 在上 V 面 $\iff g$ 在 ox 轴上, $g' \equiv G$ 在 ox 上方;

点 K 在下 V 面 $\iff k$ 在 ox 轴上, $k' \equiv K$ 在 ox 下方;

点 S 在 ox 轴上 $\iff s' \equiv s \equiv S$ 均在 ox 轴上。

4. 角平分面上点的投影特性 (图1-3)

角平分面上的点到 V 、 H 面的距离相等，所以，点的 H 、 V 面投影到轴的距离也相等。即 $aa_x = a'a_x$ 、 $bb_x = b'b_x$ ，其中，I、III角分面上点的两个投影以 ox 轴为对称；II、IV角分面上点的两个投影同居 ox 轴的一侧，且重合于一点。

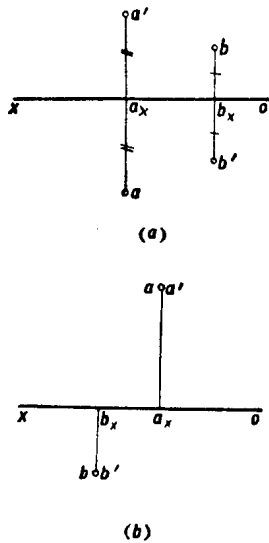


图 1-3 角平分面上点的投影
(a) I-III角平分面上的点；(b) II-IV角平分面上的点

表 1-1 坐标的正负

分 角	坐 标		
	x	y	z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

四、点在三投影面体系中的投影

1. 三面体系中点的投影规律

(1) 点的投影连线垂直于投影轴。

(2) 点的投影到投影轴的距离等于空间点离开相应投影面的距离。

2. 点的坐标与投影的关系

在 H 、 V 、 W 投影面体系中，可把 H 、 V 、 W 看作三个坐标面，其两两交线 ox 、 oy 、 oz 为坐标轴，三轴交点 O 为原点。这时，空间点 A 的位置可用 $A(x, y, z)$ 形式来表示。很明显， A 点的水平投影 a 的坐标是 $(x, y, 0)$ ；正面投影 a' 的坐标是 $(x, 0, z)$ ；侧面投影 a'' 的坐标是 $(0, y, z)$ 。

各分角中点的坐标的正负号，如表1-1。

3. 各分角内点的三面投影（表1-2）

判定法则：

①由点在 H 、 V 两投影面体系中的投影特性可知，在I、II、III、IV分角内的点，其 H 、 V 投影必在 ox 轴之左；与之相对应的V、VI、VII、VIII分角内的点，其 H 、 V 投影必在 ox 轴之右；而且，由点的 H 、 V 投影跟 ox 轴的相对位置即可确定其所处的分角。

②I、II、III、IV分角内的点，其 W 面投影在投影图中所居的位置与一般数学中所用的区域号数完全一致；V、VI、VII、VIII分角内的点，其 W 面投影在投影图中所居的位置则是区域号数加4。

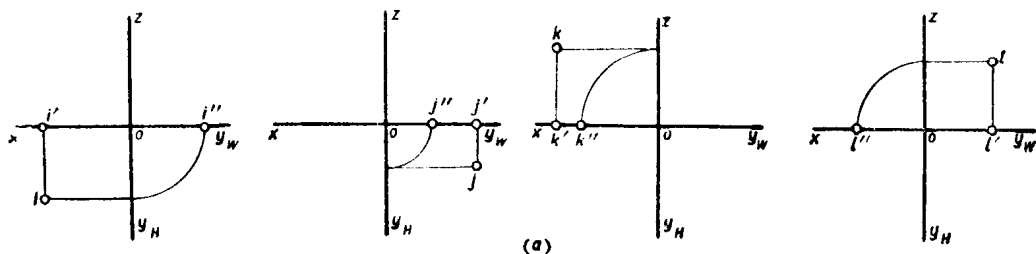
4. 投影面内点的投影（图1-4）

表 1-2

点在各分角的投影

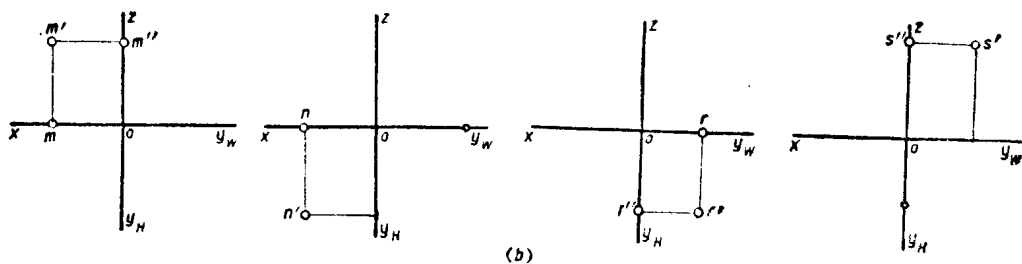
分角名称	立体图	投影图
I		
II		
III		
IV		
V		
VI		

分角名称	立体图	投影图
VII		
VIII		



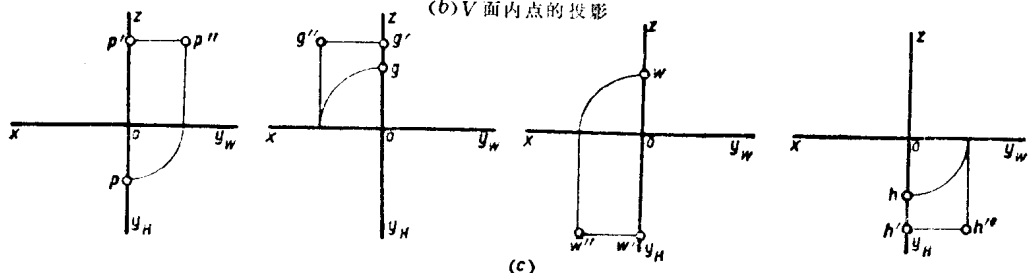
(a)

(a) H面内点的投影



(b)

(b) V面内点的投影



(c)

(c) W面内点的投影

图 1-4 投影面内点的投影

5. 投影轴上点的投影

投影轴上点的两个投影均在轴上，并与其自身重合，另一个投影在原点。

总之，点在三投影面体系中的位置共有二十七种，读者在掌握上述规律后，可以考虑各种位置的投影特性。

五、两点的相对位置

如图1-5，A、B两点的相对位置决定于两点相对坐标 $(x_A - x_B, y_A - y_B, z_A - z_B)$ 的大小，由图看出，A在左，B在右；A在前，B在后；A在下，B在上。所以，点A在点B的左、前、下方。

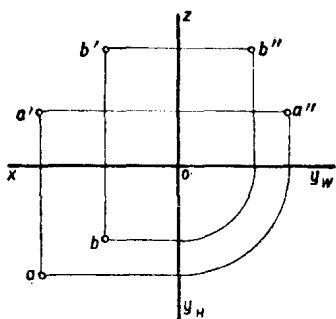


图 1-5 两点相对位置

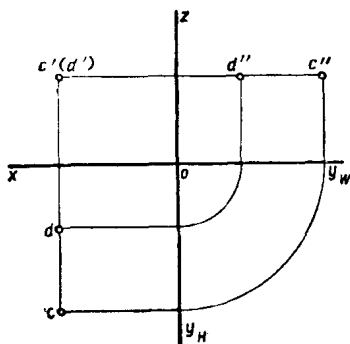


图 1-6 重影点

当两点的三个相对坐标中有两个等于零时，则此二点在某一投影面上就有重合投影（称为重影点）。若从该投影面的上方（或前方、左方）观察，其中一点必为另一点所遮住而不可见。如图1-6所示，向V面投影时，显然D不可见（对于三投影面体系来讲，重影点的三对同面坐标值中，必有两对相等，一对不等。不等的一对坐标值中，大者可见，小者不可见）。

基本作图与解题示例

1. 由点的两个投影求其第三个投影

- (1) 根据点的投影特性（或坐标），判断点的空间位置；
- (2) 根据投影规律，求出第三投影。

2. 由点的坐标求作投影图

- (1) 根据点的坐标，判断点所在的空间位置；
- (2) 根据点在空间各种位置的投影特性及点的坐标值，直接作出点的投影。

3. 由投影图研究点的空间位置，写出坐标，画立体图

- (1) 根据点的投影特性，判断点的空间位置；
- (2) 根据投影与坐标的关系，定出坐标值；

(3) 按斜二测的方法, 绘制立体图。

【例 1】 写出图1-7中各点的坐标, 并指出这些点在空间的位置(图1-7)。

分析:

根据一般位置点的正投影性质, 点的二投影分别位于 ox 轴两侧的是I、III分角内的点。若点的V面投影位于 ox 轴之上, 而H面投影位于 ox 轴之下, 则该点居第I分角内; 反之, 若点的V面投影位于 ox 轴之下, 而H面投影在 ox 轴之上, 则该点居第III分角内; 故A点在第III分角, B点在第I分角。当点的两投影位于 ox 轴同侧时, 则是II、IV分角内的点。若点的二投影都在 ox 轴之上, 则是第II分角内的点; 若点的二投影都在 ox 轴之下, 则是第IV分角内的点; 故E点是第IV分角内的点。

根据特殊位置点的正投影性质可知, 当点的一个投影在轴上时, 必为投影面上的点。若V面投影在轴上, 则是H面上的点; 若H面投影在轴上, 则是V面上的点。再依点的另一投影在 ox 轴上方或下方, 不难确定图中C点在V面的上半部, D点在V面的下半部; K点在H面的后半部, T点在H面的前半部。当点的两个投影都在轴上时, 必为投影轴上的点。故F点显然是在投影轴上。

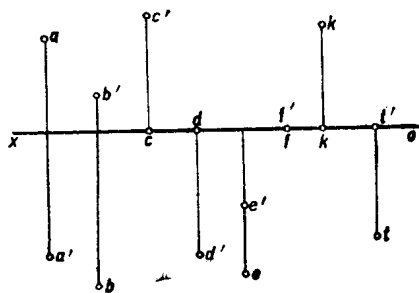


图 1-7

至于坐标值, 可从图中直接量取, 依点的空间位置来决定其正、负。 x 坐标可从 o 点量起, 都取正值。

题解:

- A (60, -15, -20) 在第III分角;
- B (52, 25, 6) 在第I分角;
- C (44, 0, 19) 在V面上半部;
- D (36, 0, -20) 在V面下半部;
- E (29, 24, -12) 在第IV分角;
- F (22, 0, 0) 在投影轴上;
- K (15, -17, 0) 在H面后半部;
- T (7, 18, 0) 在H面前半部。

说明: 本题一方面在于巩固投影与坐标的一一对应, 另一方面培养读投影图的能力。根据空间点对投影面的位置, 可分为一般位置与特殊位置两类九种情形。此题已占去八种, 还有一种情形是第II分角内的点, 其二投影均在 ox 轴之上。从本题的分析可以看出, 理解并熟记不同位置点的正投影性质, 对于分析、判断点在两面投影体系中的空间位置具有决定性的作用。但切忌死记硬背, 关键在于熟悉由空间转化为平面时, 投影面翻转的规定, 即: V面不动, 前H面向下翻转 90° , 后H面向上翻转 90° 。搞清这一点, 才能由平面返回空间。

【例 2】 已知 $A(20, 10, 15)$ ，求作一 B 点，使之在 A 点的 H 面投影线上，且比 A 点高出 10；再作一 C 点，使其位于 V 面的另一侧与 A 点成对称（图 1-8）。

分析：

由 A 点的坐标，即可画出 A 点的投影图。而 B 点在 A 点的 H 面投影线上，也就是说 B 点与 A 点位于平面 H 的同一垂线上。因此， B 点的 x 坐标与 y 坐标皆同于 A 点的 x 、 y 坐标，其 H 面投影必与 A 点的 H 面投影重合。由于 B 点比 A 点高出 10，故其 V 面投影比 A 点的 V 面投影要高 10。由此，容易作出其投影图。至于 C 点，需首先搞清对称的意义，所谓与 A 点关于 V 面成对称，即两个点在 V 面两侧的同一条垂线上，而且到 V 面的距离相等，则两点对于 V 面成对称。由此不难看出，关于 V 面的两个对称点一定分居两个不同的分角，已知点 A 在第 I 分角，则其对称点必在第 II 分角，且在 V 面的同一条垂线上。即两个点的 y 坐标绝对值相等，方向相反。表现在投影图上， a 在 ox 轴下方， c 在 ox 轴的上方， $aa_x = cc_x$ 。

作图：

(1) 依 A 点的坐标，作出 A 点的三面投影图；

(2) B 点的水平投影 b 与 a 重合，正面投影 b' 比 a' 高出 10，由 b 、 b' 依投影规律可作出 b'' ；

(3) C 点的正面投影 c' 与 a' 重合，水平投影 c 在 ox 轴上方，取 $cc_x = aa_x$ ，由 c 、 c' 可作出 c'' 。

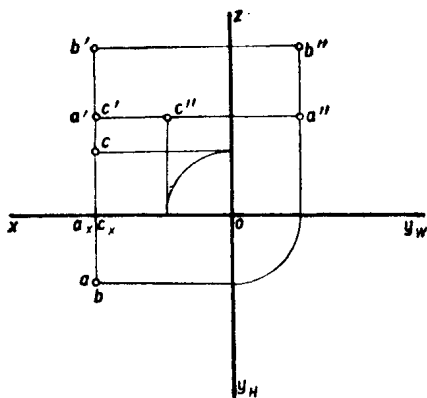


图 1-8

说明：本题不仅要作出一个点的投影图，而且进而发展到两个以上点的相对位置、点与投影面的相对位置，以及不同分角内点的投影。解决此题的关键，在于明确两个基本概念，其一是投影线的概念，对此如果不清楚，则会把题目的意思完全理解错了，导致错误的解答。其二是对称的概念，对称，一定要有参照物，此题是关于 V 面为对称，进而还可以演变成其它形式，如对 H 面对称，对 W 面对称，对投影轴对称，对原点对称，对角面对称等。因此，要善于通过解题，找出有关对称点的一些投影作图规律。另外，在审题时要把各种

条件相互联系起来进行分析，不要漏掉潜在条件，如本题“ B 点在 A 点的 H 面投影线上，”这句话中，就潜藏着 B 点的 x 、 y 坐标与 A 点的 x 、 y 坐标相同的条件。由此，才能为作出 B 点的正面投影作准备。

从整个解题过程中，给我们以重要提示：①在分析中，运用概念审明题意、形成设想是极为重要的，只有概念清楚，分析才能有效地进行；②在讨论中对题目作某些变化和推广，是消化它的重要手段。这些都说明，仅仅作出一题，从培养能力的观点看，不见得达到解题的目的，要注意到在解题过程中都能学到什么，才能较快地培养出解题能力。

【例 3】 已知 A 点在 H 面的前半平面上，距 V 面为 14；又知 B 点的水平投影 b 距 A 点的

水平投影 a 为 30, 而 B 点距离二投影面均为 10, 求作 A 、 B 二点的投影图。问: B 点可能有几种位置? 各在何分角? (图 1-9)

分析:

根据点 A 在 H 面前半平面上且距 V 面 14 的已知条件, 其正面投影 a' 必在 ox 轴上, 其水平投影 a 距 ox 轴 14。又知 B 点的水平投影 b 距 A 点水平投影 a 为 30, 满足此条件的 B 点水平投影 b 之轨迹, 是以 a 为圆心、30 为半径的圆。而 B 点又距二投影面等远, 则 B 点的空间位置必在角分面上, 且距二投影面皆为 10。满足此条件点的轨迹是 I-III 或 II-IV 角分面上平行于 ox 轴且距二投影面为 10 的四条直线。反映在两面体系中的投影是在 ox 轴两侧, 距 ox 轴皆为 10 的两条平行于 ox 轴的线。因此既满足其水平投影距 A 点水平投影为 30, 又满足到二投影面距离皆为 10 的点的投影, 必是平行线与圆的四个交点, 它反映了 B 点在四个分角内八种位置的投影。

B 点可能有八种位置, 分别在空间四个分角。其中: $B_1(b_1, b'_1)$ 在第 I 分角、 $B_2(b_2, b'_2)$ 在第 I 分角; $B_3(b_3, b'_3)$ 在第 II 分角、 $B_4(b_4, b'_4)$ 在第 II 分角; $B_5(b_5, b'_5)$ 在第 III 分角、 $B_6(b_6, b'_6)$ 在第 III 分角; $B_7(b_7, b'_7)$ 在第 IV 分角、 $B_8(b_8, b'_8)$ 在第 IV 分角。

作图:

(1) 在 ox 轴上任取一点定为 a' , 过 a' 向下作 ox 轴的垂线, 在垂线上截 14 定 a ;

(2) 以 a 为圆心, 以 30 为半径画圆;

(3) 在 ox 轴的上、下两侧各作一条平行于 ox 轴且距 ox 轴为 10 的直线;

(4) 两条平行线与圆交于四个点, 并分别确定其相应的投影, 即为所求。

说明: 本题是点与点、点与投影面相对位置的综合性问题, 有多个解答可供分析。同时也是初步应用轨迹法解决画法几何问题的示例。轨迹作图需注意三个方面: ① 轨迹的条件; ② 轨迹的形状; ③ 轨迹的位置。轨迹法是解决画法几何中综合性问题常用的一种方法。

【例 4】已知 a 、 a'' 求 a' (图 1-10)。

分析:

根据不同分角内点的正投影性质, 可以判断点 A 在第 V 分角。根据 a 、 a' 投影连线垂直于 oy_w , a' 、 a'' 投影连线垂直于 oz , 可知 a' 必重合于已知的 a'' (图 1-11)。

说明:

此题是检查作第三投影的熟练程度, 训练读图的灵活性。这类题目可分三种: 已知 a 及 a' 求 a'' ; 已知 a' 及 a'' 求 a ; 已知 a 及 a'' 求 a' 。对此题还可进一步提问: 为何 a' 、 a'' 重合? 何时 a 、 a' 重合? 有无 a 、 a'' 重合的可能? 何时 a 、 a' 、 a'' 重合为一点? 以及在这些情况下点在什么位置? (留读者思考)

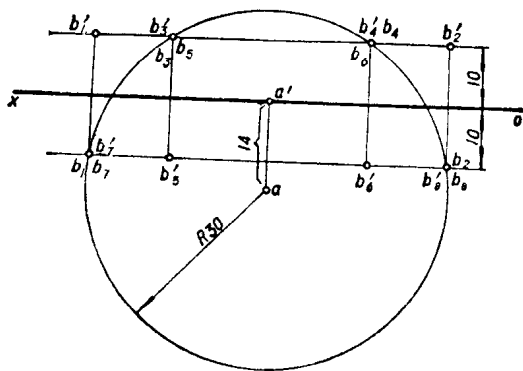


图 1-9

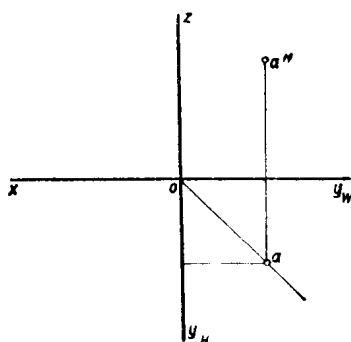


图 1-10

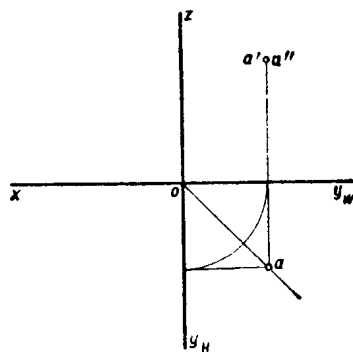


图 1-11

小 结

在点的投影这一章中，习题大致可分四类：①点的坐标与点的投影一一对应；②判断点在空间的位置；③点与点、点与投影面的相对位置；④根据点的两个投影求第三投影。解题的关键在于空间概念要清楚，投影作图规律要熟悉。

习 题 详 解

一、两投影面体系中点的投影问题

1. 已知点 A 、 B 、 C 、 D 对 H 、 V 面的坐标（如下表），求作其投影图（图1-12）。

点	距 H 面	距 V 面
A	15	10
B	-10	-17
C	-9	15
D	15	0



图 1-12

分析：

由题设可知， A 点在 H 面之上、 V 面之前，显然是第I分角内的点，其 H 面投影 a 随 H 面向下翻转 90° ，重合于 V 面下半部，故 a 的位置应在 ox 轴下方， a 到 ox 轴的距离 aa_x 等于 A 点到 V 面的距离。其 V 面投影 a' 不动，位于 ox 轴上方， a' 到 ox 轴的距离 $a'a_x$ 等于 A 点到 H 面的距离。根据点的相邻两投影连线垂直于轴的规律，容易作出 A 点的两个投影。同理可作 B 、 C 、 D 点的投影。其中 B 点在第III分角， C 点在第IV分角，而 D 点在 V 面上。

作图：（图1-13）

（1）过 a_x 作 ox 的垂线，在垂线上，自 a_x 向上截 $a_x a' = 15$ ，向下截 $a_x a = 10$ ，则 a 、 a' 即 A 点的两面投影；

（2）过 b_x 作 ox 的垂线，在垂线上，自 b_x 向上截 $b_x b = 17$ ，向下截 $b_x b' = 10$ ，则 b 、 b'