

量子力学

第二卷

〔法〕A. 梅西亚 著

科学出版社

量子力学

第二卷

〔法〕A. 梅西亚 著

陈学俊 余加莉 译

何威物 校

科学出版社

1986

内 容 简 介

本书是一本较为完备的量子力学方面的权威著作. 内容比较广泛. 全书分为两卷, 共有 21 章, 叙述详细全面, 物理概念清楚, 每章后附有习题及有关参考资料, 适于大学物理系高年级学生、研究生阅读, 也可供教师与科研人员参考.

A. Messiah

MÉCANIQUE QUANTIQUE II

Dunod, Paris (1973)

量 子 力 学

第 二 卷

[法] A. 梅西亚 著

陈学俊 余加莉 译

何成钧 校

责任编辑 张邦固

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1986 年 3 月第 一 版 开本: 787×1092 1/32

1986 年 3 月第一次印刷 印张: 21

印数: 0001—4,300 字数: 481,000

统一书号: 13031·3106

本社书号: 4416·13—3

定价: 4.90 元

目 录

第 二 卷

第三部分 对称性和不变性

第十三章 量子力学中的角动量	1
1. 引言	
I. 角动量的本征值和本征函数	2
2. 角动量定义 3. 特征代数关系 4. J^2 和 J_z 的谱	
5. J^2 和 J_z 的本征矢量 不变子空间 $\mathcal{S}^{(j)}$ 的构成 6.	
标准表象 $\{J^2 J_z\}$ 7. 结论	
II. 轨道角动量和球谐函数	14
8. L^2 和 L_z 的谱 9. 球谐函数的定义和构成	
III. 角动量与转动	18
10. 转动的定义 欧勒角 11. 物理系统的转动 转动算符	
12. 可观测量的转动 13. 角动量与无穷小转动 14.	
算符 $R(\alpha\beta\gamma)$ 的构成 15. 转动 2π 角和半整数角动量	
16. 不可约不变子空间 转动矩阵 $R^{(j)}$ 17. 转动不变性	
和角动量守恒 转动简并	
IV. 自旋	35
18. 电子自旋的假说 19. $\frac{1}{2}$ 自旋和泡利矩阵 20. $\frac{1}{2}$ 自	
旋粒子的可观测量和波函数 旋量场 21. 矢量场和自	
旋粒子 22. 在原子中依赖于自旋的相互作用 23. 与自	
旋有关的核子-核子相互作用	
V. 角动量相加	51
24. 相加问题 25. 两个角动量的相加定理 26. 应用及	
举例 27. 总角动量的本征矢量 克累布施-戈登系数	

28. 应用: 二核子系统	29. 三个或多个角动量相加 拉卡系数“ $3S_j$ ”符号	
VI. 不可约张量算符		67
30. 标量算符的表示	31. 不可约张量算符定义	32. 不可约张量算符的表示 维格纳-爱卡特定理
33. 应用		
第十四章 全同粒子体系 泡利不相容原理		81
1. 量子理论中的全同粒子		
I. 对称化假设		85
2. 同类粒子和对称表象	3. 置换算符	4. 置换算符代数
对称化算子和反对称化算子	5. 全同粒子和对称化假设	
6. 玻色子和玻色-爱因斯坦统计	7. 费米子和费米-狄拉克统计	不相容原理
8. 波函数总是必需对称化吗		
II. 应用		103
9. 两个无自旋全同粒子的碰撞	10. 两个质子的碰撞	
11. 原子核的统计	12. 复杂原子 中心场近似	13. 原子的托马斯-费米模型
14. 核子系统和同位旋	15. 同位旋的效用	电荷无关性
第十五章 不变性和守恒定律 时间反演		134
1. 引言		
I. 数学补充 反线性算符		135
2. 三个有用的定理	3. 希尔伯特空间的反线性算符	4. 反线性变换
5. 反线性算符及其表象		
II. 变换和变换群		145
6. 系统的动力学变量和动力学态的变换	7. 变换群	8. 变换算符群
9. 连续群和无穷小变换	平移	转动
10. 有限群	反射	
III. 运动方程的不变性和守恒定律		158
11. 不变可观测量	12. 哈密顿量的对称性和守恒定律	
13. 动力学态的不变性和演化	14. 斯塔克和塞曼效应的对称性	

IV. 时间反演和微观可逆性原理 167

15. 时间平移和能量守恒 16. 经典力学和量子力学中的
时间反演 17. 时间反演运算 无自旋粒子 18. 时间反
演的普遍定义 19. 时间反演和复共轭 20. 微观可逆性
原理 21. 推论: 克喇末简并 22. 实转动不变的哈密顿
量

第四部分 近似方法

第十六章 定态微扰 185

1. 第四部分概述

I. 非简并能级微扰 186

2. 按微扰的幂展开 3. 一级微扰 4. 氢原子基态 5. 原
子核的库仑能 6. 高级修正 7. 刚性转子的斯塔克效应

II. 简并能级微扰

8. 基本理论 9. 无自旋-轨道力时的原子能级 10. 自
旋-轨道力 LS 和 jj 耦合 11. LS 耦合的原子 自旋-轨
道耦合引起的分裂 12. 塞曼效应和帕邢-巴克效应
13. H 的对称性和简并的消除 14. 准简并性

III. 各级微扰展开的明显表达式 214

15. 哈密顿量 H 及其预解式 $G(s)$ 16. 把 $G(s)$ 、 P 、 HP 展
成 V 的幂级数 17. 本征值和本征态的计算

第十七章 与时间有关的薛定谔方程的近似解 225

1. “表象”的改变和哈密顿量的一部分的微扰处理

I. 与时间有关的微扰理论 228

2. 跃迁几率的定义和微扰计算 3. 核库仑激发的半经典
理论 4. V 与时间无关的情形 未微扰能量的守恒 5.
应用于玻恩近似中的截面计算 6. 周期性微扰 共振

II. 哈密顿量的突然改变和绝热改变 244

7. 问题和结果 8. 迅速变化和突然近似 9. 磁场的突然
倒向 10. 绝热改变 一般原则 最简单情形 11. “转动
轴表象” 12. 绝热定理的证明 13. 绝热近似 14. 磁
场的绝热倒向

第十八章 变分法及有关问题..... 269

1. 里兹变分法

I. 对束缚态的变分法 270

2. 本征值问题的变分形式 3. 分立能级的变分计算 4.
一个简单的例子: 氢原子 5. 讨论 应用于激发能级的
计算 6. 氢原子基态

II. 哈特里和福克-狄拉克原子 281

7. 自洽场法 8. $E[\Phi]$ 的计算 9. 福克-狄拉克方程
10. 讨论 11. 哈特里方程

III. 分子的结构 289

12. 概论 电子运动和核运动的分离 13. 在固定核场中
的电子运动 14. 绝热近似 15. 绝热近似中核的哈密顿
量 16. 玻恩-奥本海默方法 17. 关于双原子分子的一
些概念

第十九章 碰撞理论..... 311

1. 引言

I. 自由波格林函数和玻恩近似 312

2. 散射振幅的积分表述 3. 截面和 T 矩阵 微观可逆
性 4. 玻恩近似 5. 散射的积分方程 6. 玻恩展开 7.
玻恩近似适用性的判据 8. 原子对电子的弹性散射 9.
中心势 相移计算 10. 格林函数作为一个算符 它和
 H_0 的预解式的关系

II. 普遍化为扭曲波近似..... 333

11. 广义玻恩近似 12. 玻恩展开的普遍化 13. 扭曲波
的格林函数 14. 应用 T 的定义和形式性质 15. 关于
 $\frac{1}{r}$ 势的注释

III. 复杂的碰撞和玻恩近似	343
16. 概述 截面 17. 道 18. 截面的计算 T 矩阵 19.	
跃迁振幅的积分表述 20. 玻恩近似及其普遍化 21. 原	
子对快电子的散射 22. 原子核的库仑激发 23. 定态散	
射波的格林函数和积分方程 24. 两个散射中心对粒子	
的散射 25. 简单散射 干涉 26. 多重散射	
IV. 跃迁振幅的变分法计算	369
27. 相移的稳定表达式 28. 相移的变分计算 讨论 29.	
推广到复杂的碰撞	
V. 跃迁矩阵的普遍性质	376
30. 通量守恒 S 矩阵的么正性 31. 玻耳-佩尔斯-普拉	
捷克关系(光学定理) 32. 微观可逆性 33. T 矩阵的不	
变性	

第五部分 相对论量子力学基础

第二十章 狄拉克方程	387
I. 总导言	387
1. 相对论量子力学 2. 符号 各种约定和定义 3. 洛伦	
兹群 4. 经典的相对论动力学	
II. 狄拉克方程和克莱因-戈登方程	397
5. 克莱因-戈登方程 6. 狄拉克方程 7. 空间 $\mathcal{G}^{(r)}$ 的构	
成 狄拉克表象 8. 狄拉克方程的协变形式 9. 伴随方	
程 流的定义	
III. 狄拉克方程的不变性质	408
10. 狄拉克矩阵的性质 11. 狄拉克方程的形式对参考系	
作正时变换的不变性 12. 固有群的变换 13. 空间反射	
和正时洛伦兹群 14. 协变量的构成 15. 形式不变性的	
第二种表述: 态的变换 16. 运动规律的不变性 17. 变	

换算符 动量 角动量 宇称 18. 守恒定律和运动常数	
19. 时间反演和电荷共轭 20. 规范不变性	
IV. 算符的解释和简单解	433
21. 狄拉克方程和对应原理 22. 狄拉克粒子的动力学变	
量 23. 自由电子 平面波 24. 用洛伦兹变换得出平面	
波的结构 25. 中心势 26. 自由球面波 27. 氢原子	
V. 狄拉克方程的非相对论极限	449
28. 大分量和分量 29. 泡利理论作为狄拉克理论的非	
相对论极限 30. 应用: 超精细结构和偶极-偶极耦合	
31. 高级修正和福尔迪-沃思森变换 32. 自由粒子的 FW	
变换 33. 场内粒子的 FW 变换 34. 中心静电势中的	
电子 35. 讨论和结论	
VI. 负能解和正电子理论	466
36. 电荷共轭解的性质 37. 负能解的不平常行为 38.	
负能态的重新解释 “空穴”和正电子理论 39. “空穴”	
理论的困难	
第二十一章 场的量子化 辐射理论	477
1. 引言	
I. 实标量场的量子化	479
2. 经典自由场 简正振动 3. 自由场的量子化 4. 场的	
拉格朗日函数 $\Phi(\mathbf{r})$ 的共轭动量 5. 复基函数 6. 平面	
波 动量的定义 7. 球面波 角动量的定义 8. 空间和	
时间的反演	
II. 场与原子系统的耦合	499
9. 场与粒子系统的耦合 10. 弱耦合和微扰处理 11. 能	
级移位 12. 场粒子的发射 13. 衰变态的量子理论 谱	
线宽度 14. 弹性散射 色散公式 15. 共振散射亚稳态	
的形成 16. 场粒子的吸收(光电效应) 辐射俘获	
III. 电磁辐射的经典理论	531
17. 经典麦克斯韦-洛伦兹理论的方程组 18. 经典理论	

的对称性和守恒定律	19.	电子的自能和经典半径	20.
电磁势	规范选择	21.	矢量场的纵向和横向部分
纵场的消除	23.	能量	动量
角动量	24.	自由辐射的哈密顿量	25.
和粒子系耦合的辐射的哈密顿量			
IV. 辐射的量子理论		553	
26.	自由辐射的量子化	光子	27.
平面波	辐射的动量		
28.	极化	29.	多极展开
具有确定角动量和宇称的光子			
30.	辐射与原子系统的耦合	31.	原子发射光子
偶极发射	32.	低能康普顿散射	汤姆孙公式
附录 C.	矢量相加系数和转动矩阵		578
附录 D.	群论基本知识		611

第三部分 对称性和不变性

第十三章 量子力学中的角动量

1. 引言

和在经典力学中的情形一样，运动方程的对称性质在量子力学中也起着重大作用。在第十五章中，我们将对对称性及其推论作系统的全面的考查。本章专门论述与转动相联系的对称性，这是最重要的对称类型之一。正如在经典力学中那样，在量子力学中，一个系统作转动也会有角动量，运动方程的转动不变性表现为角动量是一运动常数。但与经典力学的情况也有差别，因为在量子力学中，角动量不是通常的矢量，而是矢量算符，它的三个分量是不对易的。

在第 I 节中，我们用角动量分量 J_x, J_y, J_z 的对易规则[关系式(13.3)]来定义角动量，而且在求解 J^2 和 J_z 的本征值问题时，我们仅利用这些对易规则和这三个分量是可观测这一事实。这个方法是狄拉克首先提出的，在很多方面类似于第十二章中对谐振子的处理。

第 II 节专门研究一种特殊情况，即一个粒子的轨道角动量以及相应的本征函数(球谐函数)的构成。

在第 III 节中，我们建立起转动和角动量之间的联系。一个物理系统的转动由某个算符来实现，此算符依赖于总角动量的分量，它的形式由式(13.60)给出。我们将证明，运动方程的转动不变性与哈密顿量和这三个角动量分量对易这一条件等价，因而有角动量守恒定律。

实验指出,大多数粒子都具有内禀角动量,即自旋。自旋的概念将在第 IV 节中研究。

第 V 节专门讨论角动量相加这一重要问题。

各种量子力学算符可以用它们的转动变换规律来表征。具体地说有标量算符(对转动是不变的)、矢量算符,更普遍一些,有不可约张量算符,它们的变换性质特别简单。这些算符的特征也可用它们与角动量分量的极为简单的对易规则来说明。由此可得到,它们的表示具有某些值得注意的性质(维格纳-爱卡特定理)。本章第 VI 节(也就是最后一节)将论述这些性质以及它们的主要应用。

附录 C 是本章的一个补充。在那里收集了与转动、角动量相加有关的各种系数的最重要公式和主要性质。

1. 角动量的本征值和本征函数

2. 角动量定义

在处理单粒子量子系统时,我们已经遇到过角动量算符。按定义,一个粒子的角动量算符 $\mathbf{l}$ 为

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (13.1)$$

$\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{p}$ 分别为该粒子的位置矢量和动量矢量。在波动力学中, $\mathbf{l}$ 用矢量算符¹⁾ $(-i)\mathbf{r} \times \nabla$ 表述,它的三个分量是满足下列对易规则的微分算符:

$$[l_x, l_y] = il_z, [l_y, l_z] = il_x, [l_z, l_x] = il_y. \quad (13.2)$$

每一个分量都与角动量的平方对易,即

$$l^2 \equiv l_x^2 + l_y^2 + l_z^2, [l, l^2] = 0.$$

在 § 5.18 中已经导出过这些性质。我们记得,上述最后一个

1) 本章中选择单位使 $\hbar = 1$ 。

性质是关系式(13.2)的一个简单推论。

$\mathbf{r}$, $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{l}$ 是**矢量算符**。一个矢量算符 $\mathbf{B}$ 由它在三个正交坐标轴上的分量 B_x , B_y , B_z 来确定, 其中 B_x , B_y , B_z 是通常意义上的算符。给定这三个分量之后, 我们就能够确定 $\mathbf{B}$ 在任一方向 $\mathbf{u}$ [由单位矢量 $\mathbf{u}$ (u_x , u_y , u_z) 规定] 上的分量 B_u :

$$B_u \equiv (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) = u_x B_x + u_y B_y + u_z B_z.$$

于是, 我们可以确定 $\mathbf{B}$ 在任一其他正交坐标系中的分量。如果我们遵守有关算符次序的几个注意事项, 那末各种矢量代数的运算(求和、标量积、矢量积等)就可不加改变地应用于矢量算符(参看 § 9.2)。

现在考虑有 N 个粒子的量子系统。和上面的作法一样, 我们可以定义第 n 个粒子的角动量为 $\mathbf{l}^{(n)} = \mathbf{r}^{(n)} \times \mathbf{p}^{(n)}$ 。系统的总角动量是 N 个粒子角动量的矢量和:

$$\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N \mathbf{l}^{(n)}.$$

因为每一个角动量都满足对易关系 (13.2), 而且其中任一个角动量的分量和另一个角动量的分量对易, 所以我们得到

$$\begin{aligned} [L_x, L_y] &= \sum_n \sum_{n'} [l_x^{(n)}, l_y^{(n')}] = \sum_n [l_x^{(n)}, l_y^{(n)}] \\ &= i \sum_n l_z^{(n)} = i L_z. \end{aligned}$$

利用指标的循环置换, 我们可得到类似的另两个关系式。于是, 总角动量分量的对易规则和单个角动量分量的对易规则相同。

由此, 我们得到下述的角动量定义: 一个**矢量算符** $\mathbf{J}$, 如果它的分量是可观测量, 而且满足下列对易关系:

$$[J_x, J_y] = iJ_z, [J_y, J_z] = iJ_x, [J_z, J_x] = iJ_y, \quad (13.3)$$

则称它为角动量。

从这三个关系式，我们可以对 $\mathbf{J}$ 在任意其他坐标系中的分量导出类似的关系式。令 J_u, J_v, J_w 是 $\mathbf{J}$ 在三个正交坐标轴上的分量，而这三个坐标轴上的单位矢量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 的取向是这样规定的，以使 $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 成立。我们容易证明关系式 $[J_u, J_v] = iJ_w$ 以及由指标循环置换而得到的另两个关系式¹⁾。更普遍地讲，若 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 是任意两个矢量（或两个彼此对易而且也与 $\mathbf{J}$ 对易的矢量算符），那末，我们可以得到

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}] = i((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{J}). \quad (13.4)$$

3. 特征代数关系

角动量的平方为

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

它与 J_x, J_y, J_z 对易。此性质是对易关系(13.3)的一个推论，而且可以用 § 2 中得到角动量 $\mathbf{l}$ 的类似性质时所采用的同一方法导出。我们用符号写成

$$[\mathbf{J}, J^2] = 0. \quad (13.5)$$

因此， J^2 与 $\mathbf{J}$ 的分量的任一函数对易。

我们引入两个厄密共轭算符：

$$J_+ = J_x + iJ_y, \quad J_- = J_x - iJ_y. \quad (13.6)$$

J_+, J_- 和 J_z 这三个算符完全决定了矢量算符 $\mathbf{J}$ ，而且对代数

1) 这些关系也可缩写成下述形式：

$$[J_i, J_j] = i \sum_k \epsilon_{ijk} J_k \quad \text{或} \quad \sum_{ij} \epsilon_{ijk} J_i J_j = i J_k,$$

其中 $i, j, k = u, v$ 或 w ，而 ϵ_{ijk} 是带有三个指标的全反对称张量：

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{若有两个指标相同;} \\ +1, & \text{若 } i, j, k \text{ 可由 } u, v, w \text{ 的偶置换得到;} \\ -1, & \text{若 } i, j, k \text{ 可由 } u, v, w \text{ 的奇置换得到.} \end{cases}$$

第二种形式等价于下面的矢量算符方程：

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}.$$

运算而言,它们比 J_x, J_y, J_z 更为方便. 从关系式(13.3)可导出它们之间的对易关系:

$$[J_z, J_+] = J_+, \quad (13.7a)$$

$$[J_z, J_-] = -J_-, \quad (13.7b)$$

$$[J_+, J_-] = 2J_z. \quad (13.7c)$$

另外,从方程(13.5),我们得到

$$[J^2, J_+] = [J^2, J_-] = [J^2, J_z] = 0. \quad (13.8)$$

J^2 由下式给出:

$$J^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2.$$

利用(13.7c),我们可从上式导出两个恒等式:

$$J_- J_+ = J^2 - J_z(J_z + 1), \quad (13.9a)$$

$$J_+ J_- = J^2 - J_z(J_z - 1). \quad (13.9b)$$

4. J^2 和 J_z 的谱

因为 J^2 和 J 的每一个分量都对易,所以能够建立 J^2 和 J 的一个分量(例如 J_z)的共同本征函数的一个完备集. J_x, J_y 和 J_z 是厄密的,而且遵从对易关系(13.3),这一事实就使本征值谱受到严重的限制.

由于 J^2 是正定的厄密算符¹⁾之和,因而它也是正定的厄密算符. 它的本征值必需是正的(或 0),今后将其写成 $j(j+1)$,而且用实量子数 $j(\geq 0)$ 来标记.

如果令 $|jm\rangle$ 是 J^2 和 J_z 的本征矢量,对应的本征值分别为 $j(j+1)$ 和 m ,我们就说 $|jm\rangle$ 代表角动量为 (jm) 的状态. 若 J^2 和 J_z 不构成互相对易的可观测量的一个完备集,

1) 这是 J_x, J_y 和 J_z 的厄密特性的一个结果. 对任一 $|u\rangle$, $\langle u|J_z^2|u\rangle$ 是矢量 $J_z|u\rangle$ 的模方,所以它 ≥ 0 . 由于 J_x^2 和 J_y^2 也有同样的性质,对任何一个 $|u\rangle$,都有 $\langle u|J^2|u\rangle \geq 0$.

就可以存在若干个线性独立的状态 $|jm\rangle$ 。在这种情况下， $|jm\rangle$ 是一特定的刃矢，它总是在角动量 (jm) 的子空间中选出。下面的证明对如此选取的任一矢量都是适用的。加在 $|jm\rangle$ 上的条件仅仅是

$$J^2|jm\rangle = j(j+1)|jm\rangle,$$

$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle.$$

考虑矢量 $J_+|jm\rangle$ 和 $J_-|jm\rangle$ 。从恒等式 (13.9a) 和 (13.9b)，我们得到

$$\begin{aligned} J_-J_+|jm\rangle &= [j(j+1) - m(m+1)]|jm\rangle \\ &= (j-m)(j+m+1)|jm\rangle, \end{aligned} \quad (13.10a)$$

$$\begin{aligned} J_+J_-|jm\rangle &= [j(j+1) - m(m-1)]|jm\rangle \\ &= (j+m)(j-m+1)|jm\rangle. \end{aligned} \quad (13.10b)$$

于是，矢量 $J_+|jm\rangle$ 和 $J_-|jm\rangle$ 的模方分别为

$$\langle jm|J_-J_+|jm\rangle = (j-m)(j+m+1)\langle jm|jm\rangle,$$

$$\langle jm|J_+J_-|jm\rangle = (j+m)(j-m+1)\langle jm|jm\rangle.$$

由希尔伯特空间的基本公理可知，这些模方不可能是负的，因此，

$$(j-m)(j+m+1) \geq 0, \quad (j+m)(j-m+1) \geq 0,$$

由此得到

$$-j \leq m \leq j.$$

此外，一个矢量是零的充分和必要条件是它的模方为零，所以

$$J_+|jm\rangle = 0 \text{ 当且仅当 } (j-m)(j+m+1) = 0 \text{ 时};$$

类似地有

$$J_-|jm\rangle = 0 \text{ 当且仅当 } (j+m)(j-m+1) = 0 \text{ 时}.$$

因为 m 必然在间隔 $(-j, +j)$ 中，所以上述这些条件分别约化为 $m = j$ 和 $m = -j$ 。

若 $m = j$ ，则非零矢量 $J_+|jm\rangle$ 是角动量为 $(j, m+1)$ 的矢量。由规则 (13.8) 得到

$$J^2 J_+ |jm\rangle = J_+ J^2 |jm\rangle = j(j+1) |jm\rangle;$$

又从(13.7a)导出

$$J_z J_+ = J_+ (J_z + 1), \quad (13.11a)$$

所以我们得到

$$J_z J_+ |jm\rangle = J_+ (J_z + 1) |jm\rangle = (m+1) J_+ |jm\rangle.$$

利用 J_- 和 J^2 对易, 以及由(13.7b)导出的下式

$$J_z J_- = J_- (J_z - 1), \quad (13.11b)$$

我们对 $J_- |jm\rangle$ 也可得到类似的结果.

归纳起来, 我们得出重要的定理:

如果 $|jm\rangle$ 是角动量为 (jm) 的矢量, 而且模方为 N , 那末:

(i) 必定有 $-j \leq m \leq j$; (13.12)

(ii) 若 $m = j$, 则 $J_+ |jm\rangle = 0$;

若 $m \neq j$, 则 $J_+ |jm\rangle$ 必定是角动量为 $(j, m+1)$ 的矢量, 而且它的模方为 $[j(j+1) - m(m+1)]N$;

(iii) 若 $m = -j$, 则 $J_- |jm\rangle = 0$;

若 $m \neq -j$, 则 $J_- |jm\rangle$ 必定是角动量为 $(j, m-1)$ 的矢量, 而且它的模方为 $[j(j+1) - m(m-1)]N$.

我们现在来考虑由算符 J_+ 重复作用在 $|jm\rangle$ 上而得到的一组矢量:

$$J_+ |jm\rangle, J_+^2 |jm\rangle, \dots, J_+^j |jm\rangle, \dots \quad (13.13)$$

已知 $-j \leq m \leq j$. 如果 $m = j$, 则 $J_+ |jm\rangle = 0$. 如果 $m < j$, 则 $J_+ |jm\rangle$ 是一个角动量为 $(j, m+1)$ 的非零矢量. 所以, 它具有 J^2 和 J_z 的任一共同本征矢量所特有的性质(i)–(iii), 即必定有 $m+1 < j$. 若 $m+1 = j$, 则 $J_+^2 |jm\rangle = 0$. 若 $m+1 < j$, 则 $J_+^2 |jm\rangle$ 是一个角动量为 $(j, m+2)$ 的非零矢量, 因此也有性质 (i)–(iii). 于是, 对矢量(13.13)的这些性质的分析可以一步一步地继续下去. 很显然, 这个序