泛函分析概要

〔苏〕 Л. А. 刘斯铁尔尼克
В. И. 索伯列夫 著

科学出版社

泛函分析概要

（第二版）

〔苏〕Л. А. 刘斯铁尔尼克
В. И. 索伯列夫 著

杨从仁 译

科学出版社

1985

内 容 简 介

本书是B. И. 索伯列夫根据 Л. А. 刘斯铁尔尼克在《数学科学进展》上发表的关于泛函分析的综合报告而写成的. 它用较少的篇幅包含了较多的内容,并阐述了泛函分析对微分方程、积分方程函数论、变分学以及近似计算的应用. 是一本很好的泛函分析参考书. 此书的第二版较第一版增加了许多新内容,并把第一版不足之处做了修改.

本书译稿经刘炳初同志校订.

本书可以作为大学高年级学生、研究生的泛函分析参考书,对从事泛函分析专业的研究人员也是有用的.

Л. А. Люстерник и В. И. Соболев

ЭЛЕМЕНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Издательство «Наука», 1965

泛函分析概要

(第二版)

〔苏〕Л. А. 刘斯铁尔尼克 B. И. 索伯列夫 著

杨从仁 译

责任编辑 张启男

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985年8月第一版 开本:787×1092 1/32

1985年8月第一次印刷 印张:16 1/8

印数:0001—7,100 字数:370,000

统一书号:13031·2969

本社书号:4037·13—1

定价: 3.75 元

第二版 前 言

本书第一版问世之后，直到现在已有十余年了．在这一段时间里，泛函分析不但得到了更全面的发展，而且它的概念和方法也更强烈地渗透到数学和其它各个领域．泛函分析也已开始更广泛地应用于力学和工程，更不用说物理学了，它是第一个应用泛函分析的概念和方法进行理论研究的学科之一．因此没有必要再强调泛函分析的重要性以及它在数学领域里的地位．

随着泛函分析的发展，以及广大数学工作者、物理学家和工程技术人员对它的兴趣的日益增长，我们已经有了许多杰出的泛函分析教程和专著．这里只要指出 Л. В. Канторович 和 Г. П. Акилов[12]，А. Н. Колмогоров 和 С. В. Фомин [14]，В.И.Смирнов [29]，Б.З.Вулих [6]，Н. И. Ахиезер 和 И.М.Глазман[3]，F.Riesz 和 B.Sz.Nagy[27]，N.Dunford 和 J. T. Schwarz[10]以及其它一些书就够了．但是我们认为本书第二版并非重复了上列的教程和专著．第二版基本上保持了叙述的初等性，因而本书比其它书更适宜于初学者，与第一版相比较，第二版对内容重新做了一些调整，增补了一些占篇幅不大的问题，这些问题在一般内容中常常遗漏掉，或者只是解释性质的；还补充了相当多的新材料．最重要的增补是 С. Л. Соболев 空间及对这些空间的嵌入定理，在任一 Banach 空间内具有全连续算子的线性算子方程的 Riesz-Schauder 理论，J. Schauder 不动点原理，Hilbert 空间内无界自伴算子谱理论初步．和第一版一样，我们也不准备考虑泛函分析

的重要分支，例如线性拓扑空间、赋范环、群表现论、半序空间、广义函数及其应用等．我们只对有兴趣于这些问题的读者指出另外的专著．

在准备本书第二版的过程中，我们参考了许多泛函分析的教程和专著，首先是 Л. В. Канторович 和 Г. П. Акилов, В. И. Смирнов, F. Riesz 和 B.Sz.Nagy 的书．在讨论 Hilbert 空间内自伴算子谱理论时，我们基本上依照 А. И. Плеснер[24,25]的计划和想法． 当泛函分析在苏联开始得到广泛发展的年代，他曾经是线性算子谱分析和一般泛函分析的热情宣传者．

А. И. Перов, Д. А. Райков 和 Я. Б. Рутицкий 曾阅读本书原稿，并提出许多有价值的意见，作者对他们表示感谢．

作者

目　录

引　论

分析、几何与代数的
基本概念的一般化

在本世纪初产生了一个新的分析学科，即泛函分析.

泛函分析的基本概念和方法，是在一些比较古老的数学分析领域内部逐渐形成的，这些领域是：变分法、微分方程论、函数逼近与表现论、分析中的数值计算法，特别是积分方程论.

泛函分析的实质在于把数学分析（及与之相近的代数与几何领域中）的初等部分的许多概念和方法推移到更一般的对象和属性更复杂的事物上面去，而且广泛地应用了代数与几何的方法．与分析基本概念的推广有关的这种推移就可以用统一的观点来处理许多早期只在特殊学科里被孤立讨论过的问题，并把一些看起来似乎相隔较远的数学理论联系起来，从而更促进新的数学事实的发现．为了证实这一说法的正确性，只须看近年来用泛函分析的方法所得出的有关微分方程、积分方程和其它方程的解的一系列的存在定理，或泛函分析对分析中近似计算法的研究就够了.

数学分析基本概念之所以可能一般化，是因为在它的各个不同分支的发展过程中，发现了在那里使用的概念、方法上有许多共同的地方，而且这些概念和方法常常在代数和几何中找出相似之点．例如逐次逼近法可以用来求解各种各样的代数问题和分析问题．又如泛函的定义，泛函的极值以及在

变分法中极值存在的条件则类似于函数(一个或多个变数)的定义，函数的极值以及微分学中极值存在的条件.

线性常微分方程和线性差分方程理论与线性代数方程组理论的相似，这是大家都知道的. 这些相似之点在发展史较晚的积分方程论中显得更突出.

随着分析概念在数学中的推广，也产生了由非欧几何的发现而开始的几何概念的推广. n 维空间几何的产生允许我们把多变数函数用几何的语言解释为多维空间的象，同时也显示了分析和几何之间的新的相似之处. 不仅如此，把分析几何化的新的可能性的出现更要求进一步推广几何概念. 我们不妨举几个例子来谈一谈，线性齐次 n 阶常微分方程的解的全体和 n 维矢量空间是同构的. 线性齐次偏微分方程的解的全体的几何类似物则是 n 维矢量空间的无穷维的推广. 在分析和几何的概念的对比和相似中有一个非常深刻而且非常重要的例子就是关于正交函数系的展开理论. 这些正交系在很多地方和欧氏空间正交矢量系相类似，而且正交系之所以得名也在于此. 把一个矢量用分量表示则对应于把函数用 Fourier 级数展开. Pythagoras 定理则相应于 Parseval-Стеклов 定理等，在此为了几何地表示无穷正交系，也需要把欧氏空间无穷维地扩张.

随着数学分析和几何的发展，不但分析的各部门的概念之间或分析和几何的概念之间的相似处增多了，而且也逐渐显示出来原来这些不同理论的相似乃是由于这些理论的基本概念极为相近之故. 函数相依，极限趋近，邻域，距离等就是这样的基础概念，而他们都是明显地或不明显地以各种形式应用于这些理论之中.

我们已经指出，泛函分析的特点不仅要把古典分析的基本概念和方法一般化，而且要把这些概念和方法几何化. 不

同类型的函数被看成《函数空间》的点或矢量．我们也曾说过，这样的讨论要求进一步把几何概念推广到：如，无穷维欧氏空间、矢量空间和另外的空间．这样一来，到最后引出了距离空间、线性赋范空间、拓扑空间等一般概念，它既包括了从前讨论过的几何对象也包括了不同的函数空间．

引进抽象空间以后，分析上的许多问题就可以用几何的语言来解释．象这样的用几何的方法去研究分析理论，不仅广泛地应用在数学文献里，而且也同样地应用于物理和力学的许多工作中．许多事实可以仿照 n 维几何推测出来，而另外许多事实也可以由几何方法获得证明．这样就在分析中找到了新的几何方法．同时随着几何概念的推广也产生了对代数概念的推广．

在一方面，施行于数的代数运算可以推移到属性更一般的对象上去（如矩阵、算子等），同时，又在数学的不同部门引出并采用了群、环、域等概念． 随着代数概念在分析上的应用，开始了定义有极限运算的代数结构的研究．另一方面，更广泛地开始利用分析运算是代数运算的极限这样的事实．而且代数概念在泛函分析内的推广正如初等代数在一般古典分析中所起的作用．

因此线性代数和线性算子的理论相当．这个理论在本书中占相当大的一部分．分析的基本方法——用线性的对象去逼近非线性的对象——已运用到泛函分析中（见第八章）．由数值变量的多项式取极限后引出更一般的数值函数．与此相当《环上的多项式》（矩阵环、算子环等）的极限趋近得出这种变量的更一般函数．一些重要的数学领域如矩阵演算法，运算微积，线性算子谱论（见第七章）等都是在这个基础上建立起来的．

作为已经发展成为一个大的独立的数学分支的泛函分

析．直到现在仍继续吸收并继续总结更新的数学原理．为此只须指出在近年来得到充分发展的线性拓扑空间理论、群表现论和泛函分析的某些近代分支．

第一章　距离空间

§1　函数、空间、序性

数学分析的基本概念之一是函数相依．我们回忆一下在分析中函数相依的定义：设X和Y是两个实数集．如果对每一数 $x\in X$，按某一法则(规律)有唯一数 $y\in Y$ 与之对应，我们就说在集X上定义了一个单值函数 $y=\phi(x)$，其值域含于集Y内．集X也称为函数的定义域．

不难看出，在函数相依的概念中没有必要把X和Y都限制为实数集． 如果把X和Y理解为具有另外属性的元的集时，那么我们就导致更一般的函数相依的概念．这样的例子在数学分析的各个分支里都找得到．

例 1．设 $y=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 个实变量的实函数．那么X是 n 个有序实数组的某一集，Y是实数集．

2．设 $\boldsymbol{y}=f(x)$ 是一矢量值函数，使 n 维矢量 $\boldsymbol{y}$ 与实数 x 对应．在此X为某一实数集，Y为 n 维矢量的集．

3．在变分学中我们常考虑如下形式的泛函

$$I(\gamma)=\int_a^b F(x, y, y')dx,$$

其中 γ 是由方程 $y=f(x)$ 给定的曲线，式中的 $f(x)$ 是过两个已知点 $A(a, y_a)$ 和 $B(b, y_b)$ 且具有连续导数，即所谓 C_1 的函数． 在这个情形下，X是具有上述性质的曲线的集，Y是实数集．

4．在积分方程论中，常考虑形式如

$$y(t)=\int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

的积分式.在此,我们假设核 $K(t, s)$ 在正方形 $a\leqslant t, s\leqslant b$ 上被定义且连续. 那么上述等式可以看做某一规律, 据此使在$[a, b]$上的每一连续函数 $x(t)$ 有同一区间上的另一连续函数 $y(t)$ 与之对应. 这时 X 和 Y 都是连续函数的集.

现在我们引入函数相依的一般定义.

设任给两个集 X 和 Y, 并给定一个规律使得对每一元 $x\in X$ 都有一个唯一确定的元 $y\in Y$ 与之对应,我们就说在集 X 上定义了一个算子 $y=f(x)$(也常记成 $y=fx$)其值域含于集 Y[1].我们也说在集 X 上定义了一个到集 Y 内的映象.特别,当算子的值为实数或复数时,我们就把这样的算子称为泛函.

对于映象 $y=f(x)$, 与 $x\in X$ 成对应的元 $y\in Y$ 称为元 x 的象,而 x 则称为 $y\in Y$ 的原象.

如果映象 $y=f(x)$ 映 X 于 Y 上,那么显然对每一 $y\in Y$ 至少有一个原象 x. 在此情形下, 如果每一元 $y\in Y$ 仅有一个原象 $x\in X$,那么我们就说由公式 $y=f(x)$ 给定的 X 到 Y 上的映象是一对一的.

像这样非常一般地定义的算子, 我们几乎说不出它具有什么性质. 因此常常还要引入一些补充的假设.

在分析中与函数相依这一概念同等重要的一基本概念就是极限的概念以及随之而来的连续性的概念. 凡可依某种方式来定义序列的极限概念的集称为空间. 元为函数或数列的空间称为函数空间. 研究在函数空间内定义的算子构成泛函分析的基本内容.

---

1) 我们作这样规定: 假如某一情况对集的所有元成立, 我们就说"在集上"成立. 假如某一情况成立,但可能不是对集的所有元成立, 我们就说"在集内"成立.

我们再略论一下在泛函分析中用到的某些概念.

设由元 a, b, c, $\cdots$ 组成的集 X 的某些元的有序对可以引入关系

$$a \leqslant b,$$

并设这个关系满足下述条件:

1) $a \leqslant a$,

2) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant c$,那么 $a \leqslant c$,

3) 若 $a \leqslant b$ 且 $b \leqslant a$,那么 $a = b$.

我们就称 X 为一个**半序集**. 如果对元 a 和 b 总有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$,那么 a 和 b 称为**可比较的**.

集 X 称为**全序的(或线性序的)**,如果对 X 的任意两个元 a 和 b 总有 $a \leqslant b$ 或 $b \leqslant a$.

半序集 X 的子集 Y 称为**上有界的**,如果存在元 $b \in X$, $y \leqslant b$ 使得对所有的 $y \in Y$. b 称为集 Y 的一个**上界**. 上界中的最小者称为 Y 的**上确界**.

同理可以定义**下有界**,集的**下界**及**下确界**.

最后,元 $z_0 \in X$ 称为 X 的极大元,如果在 X 内不存在元 $x \neq z_0$ 满足 $z_0 \leqslant x$.

有了以上定义后,下述引理是非常重要的.

Zorn 引理 **如果半序集 X 的每一全序子集 Y 都有上界,那么在 X 内存在极大元.**

全序集称为良序的,如果它的任一非空子集 Y 都含有最小元,即是说,存在 $a \in Y$,使得对所有的 $x \in Y$, $a \leqslant x$.

Zermelo 定理 每一集 X 总可以引入某一顺序关系,使之成为良序集.

Zermelo 定理可由所谓的 Zermelo 选择公理来证明.这个公理是说:任意给定一个非空的互不相交的集族,必存在一个集,使得它与集族中每一个集有且仅有一个公共元.

可以证明，Zorn 引理、Zermelo 定理和选择公理是相互等价的命题.

详见[5]和[21]*⁾.

例. 令$\mathscr{M}$代表某一非空集，且令 $T=\{t\}$ 代表M的所有子集 t. 如果 $t_1\subset t_2$,则规定 $t_1\leqslant t_2$. 显然,这样引入的顺序关系满足半序集的三个条件. 如果M含有两个或两个以上的元时,集T的这样顺序化显然不是全序的(自然，更不是良序的).

如果S是T的任一子集,那么它是上有界的,而且它的上确界是集

$$S=\bigcup_{t\in S}t.$$

在T内存在极大元：即M自身，因为M自身也可以看做一个子集. Zorn 引理在这个情形下是显然成立的. Zermelo 定理断定，如果引入另外顺序关系的话，T可以使之良序化. 但是怎样引入这个关系不能由定理导出，这是因为这个定理的证明是非构性的.

§2 距离空间

在数学分析中我们遇到过一些极限的概念，而且在某些情况下对于同一数学对象的序列常由问题性质的不同而引入不同的极限概念. 我们首先遇到的是实数序列的极限概念. 这个概念立刻可以推广到复数序列和n维矢量序列. 其次，对函数序列我们有一系列的收敛概念：按点收敛、一致收敛、平均收敛等等.

所有这些收敛概念都具有一个共性,一个序列的元 x_n(代表数、矢量或函数)收敛于元 x，它的意思是说 x_n 无限地“接

*⁾ 也可以参考补充文献[36]. ——译者注

近”于 x，也就是说，当这些下标无限地增大时，这些元之间的“距离”就无限制地缩小．依随于元 x_n 和 x 之间的距离的不同理解，我们就得出不同的极限定义．因此对某些集的元之间给出距离的一个一般定义而使之能保持上面所说的特例是适合的．此后，再借助这个距离在集内引入极限概念，使它转变成为一个空间．

距离空间 集 X 称为一个距离空间，如果对它的每一对元 x 和 y，有非负实数 $\rho_X(x, y)$ 与之对应，且满足下述条件：

1) $\rho_X(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$（恒等公理）．

2) $\rho_X(x, y) = \rho_X(y, x)$（对称公理）．

3) $\rho_X(x, y) + \rho_X(y, z) \geqslant \rho_X(x, z)$（三角公理）．

非负数 $\rho_X(x, y)$ 称为元 x 和 y 的距离．上面列举的三个条件称为距离公理．显然，距离公理所表述的乃是普通三维欧氏空间的点之间的距离的最一般性质．

以后，如果我们知道所说的是指那一个距离空间 X 的话，那么，我们将简单地用记号 $\rho(x, y)$ 代替 $\rho_X(x, y)$．距离空间的元也称为点．

最后，还应当提一下，如果对 X 的每一子集 Y，以 X 的距离来定义 Y 内的点的距离的话，那么 Y 也是一个距离空间并称它为 X 的子空间．

序列的极限 距离空间 X 的元 x 称为 X 中元的序列 x_1，$x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 的极限，如果 $n \to \infty$ 时，$\rho(x_n, x) \to 0$．

在这个情形下，我们记成

$$x_n \to x,$$

或

$$\lim_n x_n = x.$$

关于距离空间的收敛点列有下述几个一般定理．