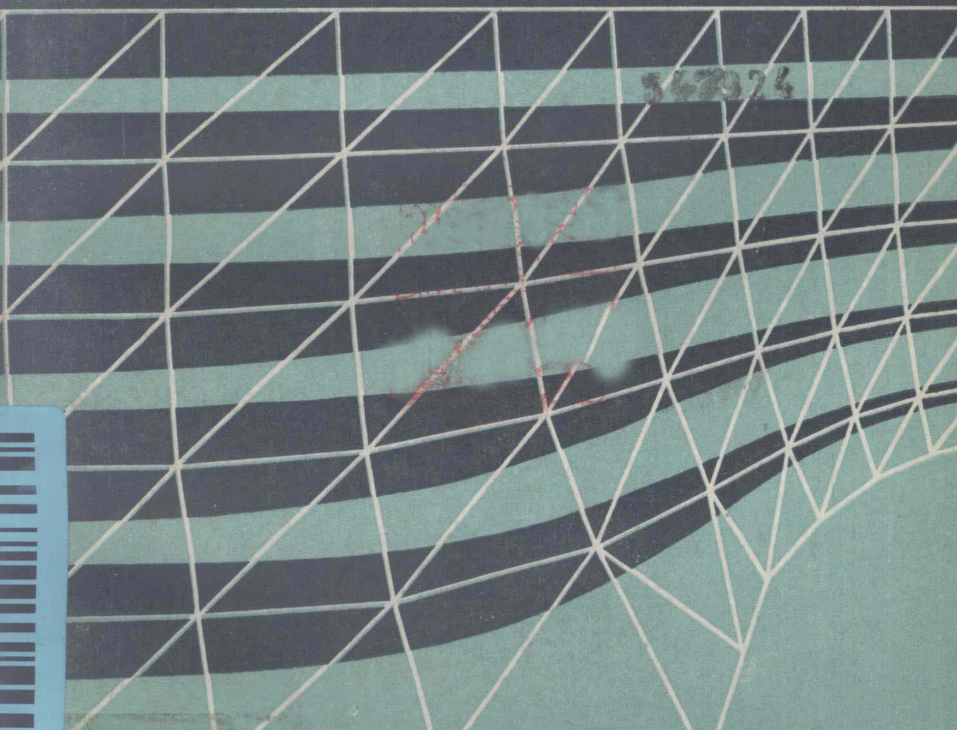
流体动力学的有限元分析

〔美〕T.J.Chung 著



水利电力出版社

流体动力学的有限元分析

[美] T. J. Chung 著

张二骏 龚崇准 王木兰
徐明全 张东生 张君伦 章迪明 译

张书农 审校

水利电力出版社

内 容 提 要

全书分七章论述了如何应用有限元法求解流体力学中的初、边值问题。第一章介绍了有限元法的两种基本途径——变分法和加权剩余法——和泛函分析；第二章论述了有限元法的基本逼近途径——插值函数；第三章讨论了求解方法和精度估计。第四章列述了流体力学的基本方程，并转化成便于有限元法引用的张量形式。其他三章为应用部分。其中第五章和第六章分别讨论不可压缩和可压缩流体的求解方法。第七章专题论述了扩散、磁流体动力学和稀薄气体动力学的求解。

本书主要特点是避免了过多地对抽象数学的探讨，同时也防止了只重视实际问题的求解而忽略基本理论的倾向。本书可供水利、造船、航空、宇航、海洋、气象、高能物理以及生化等领域的科技人员和高等院校师生参考。

Finite Element Analysis
in Fluid Dynamics
T.J. Chung
McGraw-Hill International Book Company 1978

流体动力学的有限元分析
[美] T.J. Chung 著
张二骏 龚崇准 王木兰 徐明全 张东生 张君伦 章迪明 译
张书农 审校
*
水利电力出版社出版
(北京三里河路6号)
新华书店北京发行所发行・各地新华书店经售
水利电力出版社印刷厂印刷
*
850×1168毫米 32开本 15印张 379千字
1980年11月第一版 1986年11月北京第二次印刷
印数5411—7670册 定价3.30元
书号 15143・6263

译序

有限元法在流体力学上的应用，不仅为水利、造船、航空、气象、海洋、地理等领域里的流体力学计算开辟了新的途径，而且为宇航、高能物理、环境保护、生化等近代学科中许多复杂的流体力学问题提供了有效的计算方法。它的优点是：通用性好、适应性强、统筹处理综合问题的性能较好，又便于在电子计算机上解题。正由于有这些优点，某些用有限差分法难以处理或难以取得比较理想结果的问题，如冲击波等局部不连续问题、多重变量的非恒定流问题、河、海等一维、二维流动的联合运算问题以及复杂边界问题等等，应用有限元法，都有可能取得比较满意的结果，因此，引起国内外有关科技人员的重视。从六十年代后期，流体力学领域中已开始引入有限元法，最初还只限于线性问题，到了七十年代初期，已经推广到非线性问题的研究。当今，正在向应用的深度和广度发展。

我国在有限元法的发展方面有其历史贡献，早在五十年代，当国外还处于萌芽阶段，冯康同志就已经系统地提出了这一方法。多年来，有限元法在我国固体力学领域中已经得到了比较广泛的应用和推广。至于流体力学方面，也已开始应用和探讨，广大科技人员迫切要求能有所介绍，以便进一步探讨和解决我国生产、科研问题。

美国阿拉巴马州立大学工程力学教授T.J.Chung，长期从事超声速、磁流体力学以及稀薄气体动力学等方面的计算研究工作，并为该校研究生和高年级学生开设了“流体动力学的有限元分析”课程。在此基础上，于1978年出版了本书。本书比较重视基本理论的阐述和推导，易于为初学人员所接受，同时又综合概括了以前流体领域中有限元法的理论成就和重大突破，并可直接

引用以解决实际问题，因此很适用于从事计算流体力学人员的参考。我们结合自身业务工作的需要，翻译了此书，以期对推广流体有限元法能有所裨益。

参加本书翻译工作的有：第一章张二骏，第二章张君伦，第三、六、七章张东生，第四章章迪明，第五章龚崇准和王木兰。本书并由张二骏汇总定稿，龚崇准、王木兰、徐明全三人复核。最后由张书农教授审定。书中有关数学方面内容特请上海海运学院电子计算机教研室沈石山、蔡俊官两同志检验校正，以期不失原意。书中人名、术语较多，我们是以新英汉辞典（上海人民出版社）的附刊及英汉数学词汇（科学出版社）为基础进行定名的。书末附有汉-英译名、术语对照表以便查改。此外，书中的公式和图表，我们都尽可能进行了推导和订正，个别无法加以订正的图幅，特在译注中做了说明。本书涉及的学科范围较广，由于我们水平有限，错误难免，敬请指正。

译　者

序

本书是几年来在亨治威尔市阿拉巴马大学为研究生开设的一系列讲座的成果。它从数学预备知识入手，引入有限元分析，用以求解流体动力学中的边值和初值问题的偏微分方程。因此本书不仅适用于高年级学生，还可供科技工程人员参考。

连续介质的初、边值问题，是近百年来重点研究的课题。虽然已经提出了不少解析的和数值的解法，但至今，仍有相当数量的重要问题未能得到解决。在近代电子计算技术的推动下，近似理论出现了一些新的概念，随着计算机的使用，有限元法已迅速发展成为一种求解连续介质中复杂问题的强有力工具。

本书首要目的是使读者学会如何求解流体动力学中的实际问题。基于对某些精选命题求解过程的深刻理解，因而只要阐述问题的本质而毋需交代过多的细节，便可不解自明地通晓其余部分。有限元的数学特性，毋庸置疑地应是我们学习的一个重要部分。因此，本书的第二个目的是提供一定的数学论证，以便分析其计算的可靠性。

第一章回顾了有限元法的历史背景。对于作为有限元法误差估计基础的泛函分析，也作了一些初步的介绍。然而如果读者只想学习如何求解实际问题，那么这一部分并不是学习本书其余部分的先决条件。在讨论了变分原理和加权余数法后，我们论证了简单的一维有限元解，以便于高年级学生的学习。在第二章中，按局部的和总体的插值函数以及对偶空间，讨论了各种类型的有限单元，它们是按一维、二维、三维以及轴对称形态进行分类的。有关局部方程汇集为总体形式，边界条件的列入，非线性方程的求解以及不定常问题等等，都在第三章论述。线性问题的误差估计，也包括在本章之中。

有关流体动力学的课题，从第四章开始论述。该章对基本的流体动力学方程进行了回顾。不可压缩和可压缩流体，分列于第五、六两章。在这里，我们对二维域的拉普拉斯方程和轴对称情况下的斯托克方程，按三角形单元和等参数单元进行了详细的讨论。然后，列述了以速度、压强、流函数和涡度作为变量的有关不可压缩的定常和不定常状态的各种公式。并根据索波列夫空间的概念进行了误差分析。自由界面，波动的特征值和特征函数，紊流边界层，三维流动，边界的奇异性诸问题，以及若干有限元与有限差分对比的讨论也将在这里论述。以温度和密度作为附加变量的可压缩流，其处理方法与不可压缩流体类同。因此，略去了一些不必要的重复。此外，还讨论了可压缩流体中粘性和无粘性两种情况的运动，并就跨音速空气动力学的近代发展进行了概要阐述。最后，在第七章中，选择了一些具有各种特点的论题，诸如扩散，磁流体动力学和稀薄气体动力学等。

有限元法的应用领域正在迅速扩展。与此同时，数学家们，给有限元分析这一新的研究领域提供了很多新的见解、动力和信赖，使工程师们感到惊奇。统一数学家和工程师们的设想并进一步协同工作，也是本书的意图。

编书过程中，我曾从很多著者的先驱工作中自由摘抄了一些材料和观点，在此致以谢意。J.廷士来.沃登教授审阅了手稿并且提供了很有价值的建议，敬此表示诚挚的感谢。还得感谢一些我的过去的和现在的学生，他们协助完成了例题的解答工作。其中有J.K.李博士，C.G.胡克士，J.N.周以及R.H.拉什等。我要特别感谢巴巴拉.斯维尼夫人，她在计算程序方面提供了极好的协助。此外，我还得感谢S.T.吴教授为我审阅了部分手稿，以及外校的J.J.布朗纳德教授和C.C.薛教授所作的有益的讨论。

本书中的某些结果，摘自1974年与美国空军科学研究室协作时以及1975年以来与美国陆军研究室协作时的研究成果。对他们的支援一并致谢。

本书全部手稿，都是维雯.M.帕蒂森夫人打印的。她以高

度的热情和极大的耐心，自愿承担了校对和复制工作。谨致以诚挚的谢意。

T.J.钟

亨治威尔市，阿拉巴马大学

1977年3月

目　录

第一章

引言

1-1 概述

有限元法是一种近似方法，可用以求解工程和数学物理方面具有初、边值的微分方程。使用这一方法时，先将给定的连续介质划分成许多具有合适形状的微小单元，如三角形、四边形等等。在单元内，选定一些适当的点，称之为节点。将微分方程中的变量，改写成由各变量或其导数的节点值与所选用的插值函数组成的线性表达式。借助于变分原理或加权剩余法，将控制微分方程转换成控制所有孤立单元的“有限元方程”。最后，将所有局部单元上的方程汇集成总体的微分方程组或代数方程组，再拼上应有的边界和初始条件。于是，通过对方程组的求解，可以求得各节点的变量值。

有限元法，始于1950年，由一些飞机结构工程师首先提出，用以分析飞机的整体结构体系。特纳、克劳夫、马丁和托普[1956]发表了有关这一命题的第一篇报告。随后，克劳夫[1960]、阿基里斯[1963]等人相继提出了论述。这一方法在流体、电磁等非结构问题中的应用，始于申卡维茨[1965]，而应用于更广泛的非线性力学问题，是由沃登[1972]开始的。

有限元分析和瑞利-里兹法的经典变分概念[瑞利，1877；里兹，1909]或著名的伽辽金法[1915]的加权剩余法模式之间，存在着紧密联系。这使有限元法成为近似理论的一个重要分支。近年来，很多著者对有限元数学理论的发展作出了贡献。其中有：巴布斯卡和阿特兰[1972]，席尔莱特和慈维尔特[1972]，奥宾[1972]，斯特兰和费克斯[1972]，以及沃登和瑞德[1976]。这些

近代的发展都曾受到列昂士和马金内斯[1972，英译本]等先驱工作的巨大影响。

当今，有关流体性质的各种理论，在实际问题中都能得到应用。然而，在流体动力学方面，仍有大量重要问题没有解决，其原因在于难以按一般的解析法或数值法求解。在流体动力学中，选用欧拉坐标系所建立的控制方程，一般是非线型的，因而难以用解析法求解。为克服这类困难，使用最广泛的数值解法是有限差分法[里奇特迈尔和摩顿，1967；罗阿歇，1972]，即用有限差商取代控制方程中的偏导数。另一种使用不太广泛的数值法，是所谓在格网中的质点计算法[伊文士和哈尔罗1957]。它将流体分成一系列网格，用这些网格来定义流体质点的位置。每一网格用一组变量来表示它的平均的速度分量、内能、密度、压强等特征。其他通行的方法有变分法和加权剩余法[芬莱生，1972]。瑞利-里兹法应用的是变分原理。遗憾的是在一些工程问题中，特别当微分方程不能自伴时，往往找不到相应的变分原理。伽辽金法、最小二乘方法和配置法等都属于加权剩余法。所谓加权剩余法是利用了微分方程的剩余残差在某种加权函数生成的子空间上正交投影的概念。在有限元法中，我们既可以利用变分原理（当这一原理存在时），也可以采用加权剩余来逼近。当将这一方法应用于流体动力学时，由于伽辽金法不需要变分原理，因此往往是形成有限元模式的最方便的手段。至于最小二乘方法，通常需要高阶的插值函数才能适应，即使从该问题本身的物理性能考虑，只需要线性或低阶函数描述时也必须如此。基于这些原因，本书将以伽辽金法作为讨论的中心，至于变分原理和最小二乘方法、只做适当的阐述。

在本章的以下各节，我们将阐述一些基本的数学预备知识和符号。论述时，认为读者对向量分析和矩阵代数已经有所了解。全书的叙述中，都采用了张量方程或指标记号，但并不要求读者对张量代数有较深的知识。所有必需的数学预备知识，都作了比较详细的介绍，以便于初学者以及一些需要复习的人们学习。对

于泛函分析（包括索波列夫空间），也作了简要的讨论，这是误差估计和收敛的本质。我们分别论述了应用于经典的近似分析方法上的变分原理和加权剩余法，例如瑞利-里兹法和伽辽金法。并就这些经典方法和有限元法之间的关系作了说明。本章最后，我们通过简单的例题，对初学者阐明有限元逼近的基本含义，至于更详细的讨论，将在以后各章进行。

1-2 数学预备知识

1-2-1 向量及其指标记号

采用向量记号，可以更方便地表示力学中的某些基本关系。先说明笛卡尔坐标系中的向量表达式。设向量$\mathbf{A}=A_i\mathbf{i}_i$，$\mathbf{B}=B_i\mathbf{i}_i$，这两个向量之间的交角为$\alpha$。式中，$A_i$和$B_i$分别表示向量$\mathbf{A}$和$\mathbf{B}$的分量，$\mathbf{i}_i$表示单位向量，$i=1,2,3$。则向量的点积和叉积分别是

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=AB\cos\alpha=A_i\mathbf{i}_i\cdot B_j\mathbf{i}_j=A_iB_j\delta_{ij}=A_iB_i \quad (1\text{-}1a)$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|=AB\sin\alpha=|A_i\mathbf{i}_i\times B_j\mathbf{i}_j|=|A_iB_j\varepsilon_{ijk}\mathbf{i}_k| \quad (1\text{-}1b)$$

式中的重复下标暗示叠加，δ_{ij}叫做克劳耐士克$\delta(delta)$，它的特性是：当$i=j$时$\delta_{ij}=1$，$i\neq j$时$\delta_{ij}=0$；ε_{ijk}叫做排列符号，定义为

$$\varepsilon_{123}=\varepsilon_{231}=\varepsilon_{312}=1 \quad （顺时针排列）$$

$$\varepsilon_{132}=\varepsilon_{213}=\varepsilon_{321}=-1 \quad （逆时针排列）$$

而当指标中出现两个以上重复值时，$\varepsilon_{ijk}=0$。排列符号和克劳耐士克$\delta(delta)$之间存在如下关系

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{mnp}=&\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kp}+\delta_{in}\delta_{jp}\delta_{km}+\delta_{ip}\delta_{jm}\delta_{kn}\\&-\delta_{im}\delta_{jp}\delta_{nk}-\delta_{in}\delta_{jm}\delta_{pk}-\delta_{ip}\delta_{jn}\delta_{mk}\text{❶}\end{aligned} \quad (1\text{-}1c)$$

向量的乘积分别是

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=A_iB_jC_k\varepsilon_{ijk}\text{❷} \quad (1\text{-}1d)$$

---

❶ 原文最后一项误排为$\delta_{ip}\partial_{jn}\delta_{mp}$，

❷ 原文误排为$A\times(B\times C)$，此处予以更正，译者。

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}=A_i B_j C_k \varepsilon_{jkl}\varepsilon_{ilm}\mathbf{i}_m$$
$$=A_i(C_i B_j-B_i C_j)\mathbf{i}_j \qquad (1\text{-}1e)$$

向量微分算子 ∇（简称*del*算子），定义为

$$\nabla=\mathbf{i}_i\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (1\text{-}2)$$

式中 $\mathbf{i}_i$表示单位向量的分量。于是

$$\nabla E=\mathbf{i}_i\frac{\partial E}{\partial x_i}=E_{,i}\mathbf{i}_i$$

其中E是一个标量，逗号表示偏导数。向量的散度和旋度分别为

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}=\frac{\partial A_i}{\partial x_i}=A_{i,i} \qquad (1\text{-}3)$$

$$\mathrm{curl}\ \mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}=\varepsilon_{ijk}A_{j,i}\mathbf{i}_k \qquad (1\text{-}4)$$

综合式（1-1）至（1-4）可得

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})+(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}+\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})$$
$$+(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} \qquad (1\text{-}5)$$

速度向量 $\nabla=V_i\mathbf{i}_i$。由式（1-5）得：

$$\nabla(\mathbf{V}\cdot\mathbf{V})=2\mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{V})+2(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} \qquad (1\text{-}6)$$

而 $$\nabla\times\mathbf{V}=\varepsilon_{ijk}V_{j,i}\mathbf{i}_k=\omega_k\mathbf{i}_k=\omega \qquad (1\text{-}7)$$

ω_k表示涡度向量ω的分量。涡度向量

$$\omega=\omega_1\mathbf{i}_1+\omega_2\mathbf{i}_2+\omega_3\mathbf{i}_3$$
$$=(V_{3,2}-V_{2,3})\mathbf{i}_1+(V_{1,3}-V_{3,1})\mathbf{i}_2$$
$$+(V_{2,1}-V_{1,2})\mathbf{i}_3 \qquad (1\text{-}8)$$

在二维情况下，便只有

$$\omega_3=V_{2,1}-V_{1,2} \qquad (1\text{-}9)$$

加速度向量可以写成如下形式

$$\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\cdot\nabla)\mathbf{V} \qquad (1\text{-}10a)$$

将式（1-6）代入式（1-10a），得

$$\mathbf{a}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mathbf{V}\times\omega \qquad (1\text{-}10b)$$

其中$V^2=\mathbf{V}\cdot\mathbf{V}=V_jV_j$。采用指标记号，有