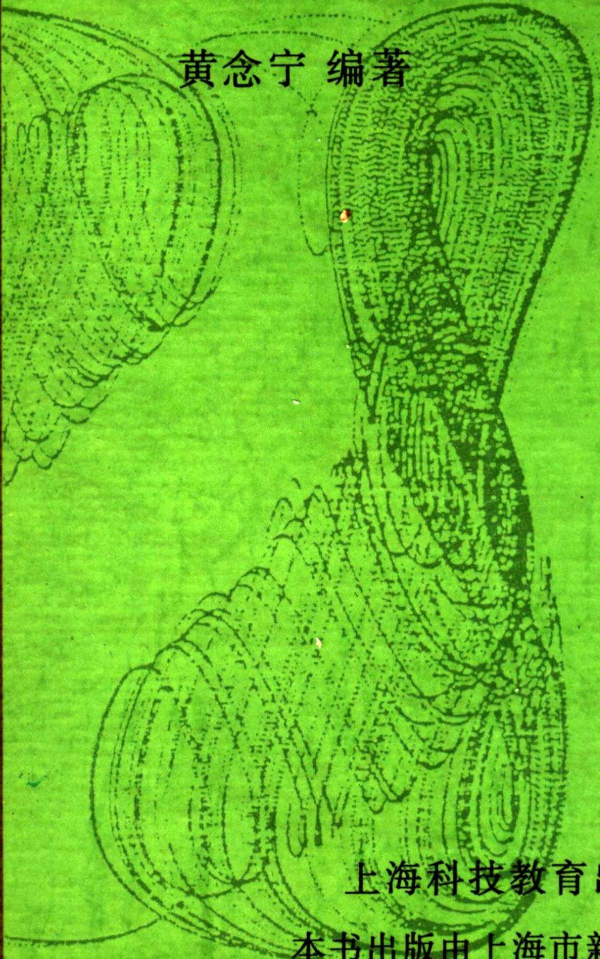
● 非线性科学丛书 ●

孤子理论和微扰方法

黄念宁 编著



上海科技教育出版社

本书出版由上海市新闻出版局
学术著作出版基金资助

非线性科学丛书

孤子理论和微扰方法

黄念宁　编著

上海科技教育出版社

内 容 提 要

本书是“非线性科学丛书”中的一种．本书讲解孤子理论的基本内容．包括求解最基本的非线性演化方程的反散射方法，哈密顿系统理论和以反散射变换为基础的微扰理论，还包括暗孤子的基本理论．本书不是一般介绍性的读物，而是为有关的读者提供一本系统的基本理论和实际研究工作中可以查阅的书．本书可供理工科大学教师、高年级学生、研究生、博士后阅读，也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考．

非线性科学丛书
孤子理论和微扰方法
黄念宁　编著
上海科技教育出版社出版发行
（上海市冠生园路393号　　邮政编码200233）
各地新华书店经销　　上海印刷六厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 8.125　字数 205,000
1996年10月第1版　1996年10月第1次印刷
印数 1－3200 本
ISBN 7－5428－1380－3/O・127　　定价：（精装本）14.60元

非线性科学丛书

出版说明

现代自然科学和技术的发展，正在改变着传统的学科划分和科学研究的方法．“数、理、化、天、地、生”这些曾经以纵向发展为主的基础学科，与日新月异的新技术相结合，使用数值、解析和图形并举的计算机方法，推出了横跨多种学科门类的新兴领域．这种发展的一个重要特征，可以概括为“非”字当头，即出现了以“非”字起首而命名的一系列新方向和新领域．其中，非线性科学占有极其重要的位置．这决非人们“想入非非”，而是反映了人类对自然界认识过程的螺旋式上升．

曾几何时，非线性还被人们当作个性极强，无从逾越的难题．每一个具体问题似乎都要求发明特殊的算法，运用新颖的技巧．诚然，力学和数学早就知道一批可以精确求解的非线性方程，物理学也曾经严格地解决过少数非平庸的模型．不过，这些都曾是稀如凤毛鳞角的“手工艺”珍品，人们还没有悟出它们的普遍启示，也没有看到它们之间的内在联系．

20世纪60年代中期，事情从非线性现象的两个极端同时发生变化．一方面，描述浅水波运动的一个偏微分方程的数值计算，揭示了方程的解具有出奇的稳定和保守性质．这启发人们找到了求解一大类非线性偏微分方程的普遍途径，即所谓“反散射”方法．反散射方法大为扩展了哈密顿力学中原有的可积性概念，反映了这类方程内秉的对称和保守性质．到了80年代，反散射方法推广到量子问题，发现了可积问题与统计物理中严格可解模型的联系．

60年代初期还证明了关于弱不可积保守系统普遍性质的KAM定理. 于是,非线性问题的可积的极端便清楚勾划出来,成为一个广泛的研究领域. 虽然这里的大多数进展还只限于时空维数较低的系统,但它对非线性科学发展的促进作用是不可估量的.

另一方面,在“不可积”的极端,对KAM定理条件的“反面文章”,揭示了保守力学系统中随机性运动的普遍性,而在耗散系统中则发现了一批奇怪吸引子和混沌运动的实例. 这些研究迅速地融成一片,一些早年被认为是病态的特例也在新的观点下重新认识. 原来不含有任何外来随机因素的完全确定论的数学模型或物理系统,其长时间行为可能对初值的细微变化十分敏感,同投掷骰子一样地随机和不可预测. 然而,混沌不是无序,它可能包含着丰富的内部结构.

同时,由于计算科学特别是图形技术的长足进步,人们得以理解和模拟出许多过去无从下手研究的复杂现象. 从随机与结构共存的湍流图象,到自然界中各种图样花纹的选择与生长,以及生物形态的发生过程,都开始展现出其内在的规律. 如果说,混沌现象主要是非线性系统的时间演化行为,则这些复杂系统要研究的是非线性地耦合到一起的大量单元或子系统的空间组织或时空过程. 标度变换下的不变性、分形几何学和重正化群技术在这里起着重要作用.

在由上述种种方面汇成的非线性科学洪流中,许多非线性数学中早已成熟的概念和方法开始向其他学科扩散,同时也提出了新的深刻的数学问题. 物理学中关于对称和守恒,对称破缺,相变和重正化群的思想,也在日益增多的新领域中找到应用. “非线性”一词曾经是数学中用以区别于“线性”问题的术语,非线性科学正在成为跨学科的研究前沿. 各门传统学科中都有自己的非线性篇章,非线性科学却不是这些篇章的总和. 非线性科学揭示各种非线性现象的共性,发展处理它们的普适方法.

这样迅猛发展的跨学科领域,很难设想用少数专著加以概括,

何况学科发展的不少方面还未成熟到足以总结成书的地步. 于是,有了动员在前沿工作的教学和研究人员,以集体力量撰写一套“非线性科学丛书”的想法. 在上海科技教育出版社的大力支持下,这一计划得以付诸实现.

这套“非线性科学丛书”不是高级科普,也不是大块专著. 它将致力于反映非线性科学各个方面的基本内容和最新进展,帮助大学高年级学生、研究生、博士后人员和青年教师迅速进入这一跨学科的新领域,同时为传统自然科学和工程技术领域中的研究和教学人员更新知识提供自学教材. 非线性科学的全貌将由整套丛书刻划,每册努力讲清一个主题,一个侧面,而不求面面俱到,以免失之过泛. 在写作风格上,作者们将努力深入浅出,图文并茂,文献丰富;力求有实质内容,无空洞议论,以真刀真枪脚踏实地武装读者. 从读者方面,自然要求具备理工科大学本科的数学基础,和读书时自己主动思索与推导的习惯.

“非线性科学丛书”的成功,取决于读者和作者的支持. 我们衷心欢迎批评和建议.

郝柏林

1992年4月30日于北京中关村

Abstract

This book is one of the advanced series in nonlinear science. Chios, fractals and solitons are basic branches of the nonlinear science. This book contains the main results of theory of solitons, namely, the method of inverse scattering transform for some basic nonlinear evolution equations, theory of Hamiltonian system and basic perturbation theory, as well as theory of dark solitons. This book is not a popular one, but one providing systematic basic theories and references for real researches.

目　　录

Contents

第 1 章

KdV 方 程

KdV 方程 (Korteweg-de Vries 方程) 是一个典型的非线性演化方程，它是由描述浅水波而导出的. 在 60 年代，求解非线性方程的反散射方法，是由噶德奈尔 (C.S.Gardner), 格林 (J.M.Greene), 克鲁斯卡 (M.D.Kruskal) 和谬拉 (R.M.Miura) 在求解 KdV 方程时创立的. 本章通过 KdV 方程的求解，介绍反散射方法.

§ 1 KdV 方程和它的拉克斯对

KdV 方程是

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1.1}$$

这里 u 是实的. 它在零边值条件

$$u \to 0 \qquad \text{当 } |x| \to \infty \text{ 时} \tag{1.2}$$

下的求解，首先是用反散射方法才系统地解决的. 并且，显式地得到一种特殊形式的解，所谓孤子解. 这一解法的要点，按照拉克斯 (P.D.Lax) 的分析，首先是引入一对线性方程,

$$\hat{L}\Phi(x,t,E) = E\Phi(x,t,E) \tag{1.3}$$

和

$$\partial_t \Phi(x,t,E) = \hat{M}\Phi(x,t,E), \tag{1.4}$$

这里 (1.3) 中的 $\hat{L}$ 是一个线性算子，E 是它的本征值，$\Phi(x,t,E)$ 是相应的本征函数. (1.4) 中的 $\hat{M}$ 是另一个线性算子，这一方

程描写本征函数 $\Phi(x,t,E)$ 随时间的演化. 今后，我们往往略去 t, 有时也略去 x.

如果这一对方程是相容的，且 E 独立于 t, 即

$$E_t = 0, \tag{1.5}$$

则有

$$\hat{L}_t + [\hat{L}, \hat{M}] = 0, \tag{1.6}$$

式中

$$[\hat{L}, \hat{M}] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L}. \tag{1.7}$$

一般说来，(1.6) 是一个算子方程. 但是，如果对算子的形式作某些限制，可以使 $[\hat{L}, \hat{M}]$ 成为只含 x 的微分算子，u 和它对 x 的微商. 现在选取

$$\hat{L} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t) \tag{1.8}$$

和

$$\hat{M} = -4\frac{\partial^3}{\partial x^3} + 6u(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + 3u_x(x,t), \tag{1.9}$$

则 (1.6) 就等价于 KdV 方程 (1.1). 所以，如果 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解，(1.6) 就成立，于是，(1.5) 成立，E 独立于 t.

这时，我们把方程 (1.3) 改写为

$$\left\{\frac{d^2}{dx^2} + E - u(x)\right\}\Phi(x,E) = 0, \tag{1.10}$$

这里我们略去了 t, 把偏微商写成了微商. 方程 (1.10) 正好是一维薛定谔 (E.Schrödinger) 方程，E 是能量，$u(x,t)$ 是位. 我们注意，由于位依赖于 t, 本征值一般也依赖于 t, 但当 $u(x,t)$ 是 KdV 方程的解时，以上已经得到 E 独立于 t.

对于方程 (1.10), 通常是给定位 u, 在一定边界条件下来求本征值 E 和本征函数 $\Phi(x,E)$. 可是，在本世纪 50 年代，在处理

核物理问题时，却产生了从解 $\Phi(x,E)$ 求位 $u(x,t)$ 的反问题. 当时认为核力可以用量子力学中的位来描写，可是只知道它的一些一般的性质，具体的形式不知道. 但是，实验上可以定出，至少原则上可以定出，能级和散射相移等等，即本征值和渐近的波函数. 于是就产生了反问题. 可是，这一问题太困难. 自然在数学上首先讨论了一种最简单的情况，一维薛定谔方程. 这时得到许多有价值的结果. 但是，这些结果仍与核物理的实际要求相距太远，并未能用来解决核力的问题. 意料不到的是，若干年后，在 KdV 方程的反散射方法求解上却起了十分重要的作用.

方程 (1.8) 和 (1.9) 称为 KdV 方程的 **拉克斯对**, 以 (1.8) 和 (1.9) 代入后的 (1.3) 和 (1.4) 称为 KdV 方程的 **拉克斯方程**.

§ 2 正散射问题

假定 $u(x)$ 满足下列条件：

(1) $u(x)$ 是实的，连续可微的；

(2) 当 $|x| \to \infty$ 时， $u(x)$ 趋于 0, 且按照更严格的说法，有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|(1+|x|)dx < \infty. \tag{2.1}$$

由于 $\hat{L}$ 是自共轭算子， E 是实数. $E<0$ 相应于非简并的分离谱与平方可积的本征函数，即束缚态. $E>0$ 相应于二重简并的连续谱与非平方可积的 (在施瓦兹 (L.Schwartz) 意义下平方可积的) 本征函数，即散射态. 分离谱的项可有无穷多个，这时在 $E=0$ 的邻域内有无穷多个分离的本征值. 当 $|u(x)|$ 随 $|x| \to \infty$ 而缓慢地趋于 0 时，如一维库仑位 $u(x) \propto x^{-1}$ 时，就出现这种情况. 可以证明，以上条件 (2.1) 保证了 (1.10) 的分离谱只含有限项.