期权定价的数学模型和方法

Mathematical Modeling and Methods of Option Pricing

姜礼尚 著

高等教育出版社
Higher Education Press

期权定价的数学模型和方法

姜礼尚 著

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

期权是风险管理的核心工具。对期权定价理论作出杰出贡献的 Scholes 和 Merton 曾因此荣获 1997 年诺贝尔经济学奖。

本书从偏微分方程的观点和方法，对 Black-Scholes-Merton 的期权定价理论作了系统深入的阐述。一方面，从多个角度、多个层面阐明期权定价理论的基本思路；另一方面，充分利用偏微分方程理论和方法对期权理论作深入的定性和定量分析，其中特别对美式期权，与路径有关期权以及隐含波动率等重要问题，展开了深入的讨论。另外，本书对所涉及的现代数学内容，都有专节介绍，尽可能作到内容是自封的。

本书可用作应用数学、金融、保险、管理等专业研究生教材，也可供有关领域的研究人员和工作人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

期权定价的数学模型和方法 / 姜礼尚著. —北京：高等教育出版社，2003.1
ISBN 7-04-011995-1

Ⅰ.期… Ⅱ.姜… Ⅲ.期权-数学模型-研究
Ⅳ.F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2002）第 107399 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街 55 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010-64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	国防工业出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003 年 1 月第 1 版
印　　张	21.5	印　　次	2003 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	370 000	定　　价	33.00 元

序　言

去年我曾相继在美国 Iowa 大学数学系和同济大学应用数学系讲授“金融衍生物数学理论”的研究生课程。作者开设这门课的意图是明确的，希望用偏微分方程的观点和方法，对 Black-Scholes-Merton 的期权理论作一个系统且深入的阐述。

期权作为一种金融衍生产品，它的定价模型取决于原生资产价格的演化模型。在连续时间情形，原生资产价格演化可以通过一个随机微分方程来描述，从而在此基础上，作为它的衍生物 —— 期权的价格适合的是一个偏微分方程的定解问题。因此把偏微分方程作为工具，利用偏微分方程的理论和方法，建立各种期权定价的数学模型，导出期权的定价公式，对期权的价格结构作深入的定性分析，以及利用偏微分方程数值分析方法给出求期权价格的算法等，这是一个合乎情理的学习和研究期权定价理论的思路。本书正是沿着这个思路展开的。

本书作为一本应用数学专业的研究生教材，必须严格把握它的深度和广度。首先我们必须把本书的起点，即对先修课程的要求，尽可能放得低一点，对所涉及的现代数学的内容，尽可能做到是自封的。事实上，我们只要求读者具有高等微积分、线性代数、初等概率论以及数学物理方程的初步知识。而有关随机分析，偏微分方程数值解以及自由边界问题等方面的知识，本书都有专门章节给与介绍；其次，对于所有的数学论证，在严密性方面和具体证明的深度方面都作了适度处理，尽可能不引进比较深奥的概念，对一些比较难的证明，有的采取述而不证，有的只讲证明的大意和思路，而不究其严密性和细节，列出参考文献，给读者进一步学习和研究提供线索。此外对金融内容的选材方面，我们把全部注意力集中在能够通过 Δ- 对冲原理，建立偏微分方程模型的期权定价问题。以使得我们的论题尽可能集中，内容尽可能精炼。

本书的内容是这样安排的：除第 1 章和第 4 章介绍有关金融衍生产品的基本概念以及随机分析的基础知识以外，第 2 章，第 3 章以及第 5 章是全书的基本内容。在这三章中，我们除了讲述期权定价的数学模型和期权定价的算法和公式以外，从多个角度，多个层面，阐明 Black-Scholes-Merton 的期权定价理论的基本思路：基于市场无套利假设，通过 Δ- 对冲原理，把人们

引入一个风险中性世界，使得所有风险资产具有相同的期望回报率 —— 无风险利率，在那里期权作为一种未定权益，给出了一个独立于每个投资人风险偏好的“公平”价格。在连续时间情形，对于标准欧式期权这个定价公式就是著名的 Black-Scholes 公式。本书的第 6 章（包括第 7 章 §7.7）研究美式期权的定价理论。由于美式期权具有提前实施功能，因此持有人需要选取最佳的实施策略以取得满意的回报。这个问题在数学上表现为一类自由边界问题，在这里，自由边界就是美式期权的最佳实施边界。由于它是一个非线性问题，一般不可能得到解的明显表达式，因此定性的数学分析和定量的数值计算就显得尤为重要，它自然成为本书的重点和高潮，在那里偏微分方程理论和方法得到了充分的展示。第 7 ~ 9 章研究了多资产期权和各种与路径有关期权的定价模型和方法。在那里给出了一些新的偏微分方程定价模型以及相应求解方法。第 10 章作为本书的最后一章，我们研究了期权定价的反问题，即利用期权市场信息重构原生资产波动率 —— 隐含波动率问题。我们把它转化为一个最佳控制问题，并提出了一个适定的算法。

在本书的编写过程中，作者得到了很多方面的关心，支持和帮助。首先我要感谢同济大学应用数学系金融数学课题组的老师和研究生们，他（她）们不仅帮我校阅了书稿，并提出了很多有益的修改意见。其中，我特别要感谢我的两位研究生，罗俊和万凝，她们花了大量精力，本着一丝不苟、精益求精的态度，把本书打印出来。没有她们的辛勤劳动，本书是不可能如期付印的。

本书的出版得到了高教出版社张小萍同志的支持和帮助，并得到上海市学位委员会 2001 年度研究生教育专项经费的资助，在此一并表示感谢。

姜礼尚
2002 年 8 月于同济大学

目　录

第一章 风险管理与金融衍生物

本章作为全书的开篇，将对金融衍生物的一些基本概念、特性和定价原理作一个简明和直观的介绍，特别对本书研究的主要课题 —— 期权定价问题给出一个明确的表述.

§1.1 风险和风险管理

风险 (risk)—— 结果的不确定性.

风险可以使人们意外获益，风险亦可以使人们意外受损，甚至带来灾难.

在金融市场、商品市场上，风险无处不在：资产风险（股票……），利率风险，货币风险（汇率），信用风险，商品风险等.

面对风险有两种截然不同的态度：

1. **回避风险**：将已判明的风险量化，并加以控制，即构造一个方案将已暴露的风险进行管理，把它转化为所希望的形式. 这里大致有两种方案可供选择： a. *用确定性来代替不确定性.* 也就是，在消除由于风险带来不利的可能的同时，宁愿放弃由于风险带来的意外获益的机会. b. *消除不利的风险的同时，保留可能意外获益的有利机会，为此宁愿付出一定代价.*

2. **承担风险**：甘愿用资金去冒险，从风险资产价格的频繁变化中，期望通过投资去获取风险利润. 希望从市场价格的变动中获取风险利润的行为称为 **投机** (speculation).

金融衍生物 (financial derivatives) 是一种风险管理的工具，它的价值依赖于其他更基本的 **原生资产**（或称 **标的资产**） (underlying assets) 的价格变化.

在金融市场，商品市场有很多形式的金融衍生工具，但 **远期合约** (forward contracts)， **期货** (futures) 和 **期权** (options) 是三种最基本的金融衍生工具. 如果把原生资产设定为股票，债券，汇率或商品等，那么为了对这些原生资产进行风险管理，相应的有：股票期货（期权），债券期货（期权），货币期货（期权）以及商品期货（期权）等.

利用金融衍生物对原生资产进行风险管理的基本策略是套期保值（或对冲 hedging)，即交易者在现货市场和期货（权）市场同时构作两个数量相同、方向相反的 头寸 (positions). 制定这个风险管理策略的出发点是：人们认为在一般情况下，现货远期价格和期货价格的变动方向和幅度基本一致，现（期）货市场的亏损可以用期（现）货市场的盈利来补偿，从而达到防止或减少因价格波动造成的损失，转移和分散价格波动所带来的风险.

金融衍生物定价以及利用套期保值对风险进行管理是本书研究的对象.

§1.2 远期合约与期货

远期合约 —— 在未来确定时间，以确定价格购（销）一定数量和质量的某原生资产的协议.

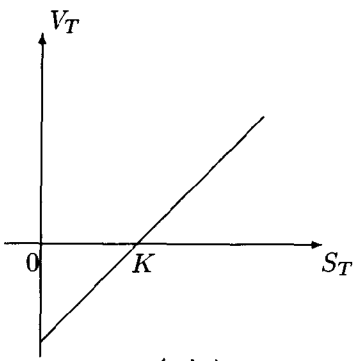
远期合约是一张用确定性来代替风险的协议.

合约的购入方称为 **多头** (long position)，销售方称为 **空头** (short position). 合约中标明的确定价格和确定时间称为 **交割价** (delivery price) 和 **交割日** (maturity).

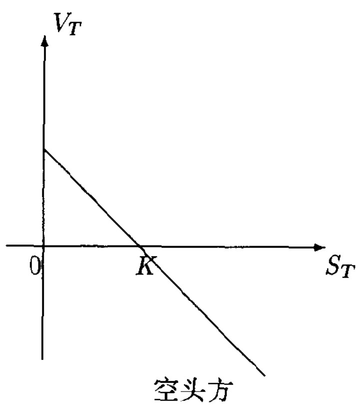
设 K—— 交割价格，T—— 交割日，则远期合约在交割日的 **收益** (payoff) V_T：

$$V_T = S_T - K, \quad (\text{多头方})$$
$$V_T = K - S_T, \quad (\text{空头方})$$

这里 S_T 表示原生资产在交割日 $t = T$ 的价格.



多头方



空头方

远期合约一般都在 场外交易（ over-the-counter, 简写为 OTC ）.

期货—— 与远期合约相同也是一张在未来的确定时间，按确定价格购（销）一定数量和质量的原生资产的协议，但它是由远期合约逐步标准化而形成的. 它们之间的区别在于：

a. 期货交易通常是在交易所进行，

b. 期货合约具有标准化条款，

c. 期货合约上的交割价格（期货价格）通常是由场内交易决定，它依赖于供求关系.

§1.3 期权

期权 —— 持有人在确定时间，按确定价格向出售方购（销）一定数量和质量的原生资产的协议，但他不承担必须购入（销售）的义务.

期权持有人具有按协议条款在确定时间实施这个协议的权利，但不负有必须实施这个协议的义务. 在期权合约中，确定价格称为 **实施价格** (exercise price) 或 **敲定价格** (strike price)，确定日期称为 **到期日** (expiry date)，按期权合约规定执行购入或销售原生资产称为 **实施** (exercise).

期权按合约中购入和销售原生资产来划分：

看涨期权 (call option) 是一张在确定时间，按确定价格有权购入一定数量和质量的原生资产的合约.

看跌期权 (put option) 是一张在确定时间，按确定价格有权出售一定数量和质量的原生资产的合约.

期权按合约中有关实施的条款来划分：

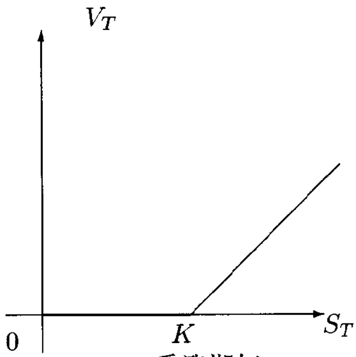
欧式期权 (European options) 只能在合约规定的到期日实施.

美式期权 (American options) 能在合约规定的到期日以前(包括到期日）任何一个工作日实施.

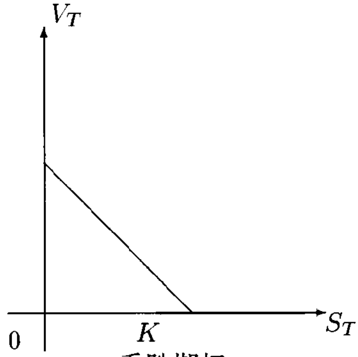
设 K—— 敲定价格， T—— 到期日，则在到期日期权的收益（即期权的价值） V_T：

$$V_T = (S_T - K)^+, \qquad \text{(看涨期权)}$$
$$V_T = (K - S_T)^+, \qquad \text{(看跌期权)}$$

这里 S_T 表示原生资产在到期日 $t = T$ 的价格.



看涨期权



看跌期权

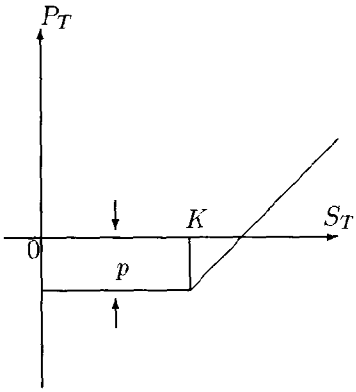
期权是一种未定权益 (contingent claim). 以看涨期权为例, 在未来的期权到期日若当原生资产价格 S_T 大于敲定价格 K , 则合约赋予期权持有人利用敲定价 K 购入原生资产的权利 (从而获得利益), 否则期权一文不值等于一张废纸. 因此期权定价本质上就是对这一类未定权益定价. 这件事的意义将远远超出衍生物证券定价的范围, 可以在很多其他领域如投资、保险等找到应用.

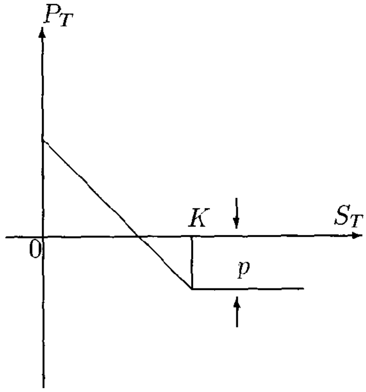
为了取得这个未定权益所需要付出的代价称为 **期权金** (premium). 由于客户的需要是千变万化的, 因此金融机构为此设计出的金融产品 —— 期权亦是多种多样的, 每一种期权都需要定价. 期权定价就是本书需要讨论的主要内容. 考虑到期权金 p 的存在, 因此在期权到期日期权持有人的总收益 P_T 为

$$[\text{总收益}] = [\text{到期日期权的收益}] - [\text{期权金}],$$

即

$$\begin{aligned} P_T &= (S_T - K)^+ - p, \qquad && (\text{看涨期权}) \\ P_T &= (K - S_T)^+ - p. \qquad && (\text{看跌期权}) \end{aligned}$$





§1.4 期权定价

期权作为一种衍生证券，它的定价决定于原生资产价格的变化．由于原生资产是一种风险资产，因此它的价格变化是随机的．由此产生的期权的价格变化亦必是随机的．但是一旦原生资产价格确定下来，那么作为它的衍生证券（期权）的价格亦将随之确定．这就是说，若在 t 时刻原生资产价格为 S_t，期权价格为 V_t，则存在函数 $V(S,t)$ 使得

$$V_t = V(S_t, t),$$

这里 $V(S,t)$ 是一个确定的二元函数，我们的任务就是通过建立偏微分方程模型去确定这个函数．

在期权的到期日期权的价值 V_T 是确定的，它就是期权的收益:

$$V_T = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K - S_T)^+. & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

期权定价问题 就是求 $V = V(S,t), (0 \leq S < \infty, 0 \leq t \leq T)$，使得

$$V(S,T) = \begin{cases} (S_T - K)^+, & \text{(看涨期权)} \\ (K - S_T)^+. & \text{(看跌期权)} \end{cases}$$

特别是在期权生效日 $t = 0$，若股价为 S_0，问它的期权金

$$p = V(S_0, 0) = ?$$

因此期权定价问题是一个 **倒向问题**.

§1.5 交易者的类型

参与衍生证券市场交易的人群有以下三类：

1. **套期保值者** (hedger).

套期保值 (hedging)：两面下注避免损失. 大多数生产商或贸易商参与衍生证券市场交易的目的是转移或减少现货市场的价格风险，确保本身获取预期利润.

例 某中国公司 90 天以后要支付英国供应商一百万英镑. 该公司面临汇率变动的风险. 如汇率上扬，则公司将增加支付成本，从而直接影响它的预期利润. 若当天的汇率是 12.5 元 / 英镑. 估计到汇率有上扬的可能性，该公司考虑以下套期保值的对策：

方案 1 购买一张远期合约保证在 90 天以后，以 12 625 000 元购入一百万英镑从而锁定了支付英镑的人民币成本.

方案 2 购买一张看涨期权保证在 90 天以后，以 12 500 000 元购入一百万英镑，为此该公司付出期权金（按 2% 计算）250 000 元.

现把采取不同避险策略所产生的效果列表于下：

即期汇率 (元 / 镑)	90 天后 汇率 (元 / 镑)	不采取 套期保值	远期合约 套期保值	购入看涨期权 套期保值
12.5	上扬 13	1 300 万元	1 262.5 万元	1 275 万元
	下跌 12	1 200 万元	1 262.5 万元	1 275 万元

从这个例子可以看出：该公司如不采取套期保值策略，则当汇率上扬时就会增加支付成本，影响公司的最终利润. 如采取签订远期合约，就锁定了 90 天以后支付的成本. 但它在回避汇率上扬所带来的不利风险同时，放弃了汇率可能下跌带来的意外获益的机会. 采取购入看涨期权，公司可以防止汇率上扬带来的损失，同时仍然可以从汇率下跌中获益，但为此必须支付期权金.

2. **投机者** (speculator)

投机 (speculation)：甘愿用资金去冒险，不断地买进卖出衍生证券（期货、期权），希望从市场价格的经常变化中获取利润的行为.

投机者承担了价格变动所带来的风险. 希望在交易中由于持有某种头寸（多头或空头），而获取风险利润.

投机的出现是套期保值业务存在的必要条件和业务发展的必然结果. 投机者恰好承担了套期保值者转嫁出去的价格变动风险，所以投机者是衍生证券市场风险的主要承担者，投机是衍生证券市场中不可缺少的润滑剂. 频繁的投机活动，活跃了市场，并使套期保值策略得以实施.

投资于期权与直接投资于原生资产相比具有 **高回报**、**高风险** 的特点. 其原因是：期权投资的 **杠杆作用** (leverage) 很大，投资人通过投入少量资金（支付期权金），而实际进行的是比它大十几倍甚至几十倍的原生资产的投机.

例 若某股票 4 月 30 日的股价为 666 元，考虑到该股票在 8 月份可能上扬，投资人可以采取两种投资策略：

A. 投资人在 4 月 30 日花费现金 666 000 买入 1000 股股票；

B. 投资人购入一张 8 月 22 日到期的看涨期权：以敲定价格 680 元购入 1000 股股票，假设为此投资人付出期权金 39 000 元.

现按这两种情形考察他的投资收益和 **回报** (return)（不考虑利率支付）.

情形 I 假如 8 月 22 日股价上扬到 730 元.

投资策略 A. 投资人在 8 月 22 日卖出的持有股票获得现金 730 000，它的回报率

$$\text{回报} = \frac{730\ 000 - 666\ 000}{666\ 000} \times 100\% = 9.6\%;$$

投资策略 B. 投资人实施他持有的期权，所取得的收益是

$$\text{收益} = 730\ 000 - 680\ 000 = 50\ 000\text{元}$$

$$\text{回报} = \frac{50\ 000 - 39\ 000}{39\ 000} \times 100\% = 28.2\%.$$

情形 II 假如 8 月 22 日股价非但没有上扬，反而下跌到 660 元.

投资策略 A. 投资人的损失是

$$\text{损失} = 666\ 000 - 660\ 000 = 6000\text{元},$$

$$\text{回报} = \frac{660\ 000 - 666\ 000}{666\ 000} \times 100\% = -0.9\%;$$

投资策略 B. 投资人的收益是

$$收益 = (660\ 000 - 680\ 000)^{+} = 0,$$

投资人将失去全部投资 39 000 元，它的损失率是 100%.

3. **套利者** (arbitrageur)

套利 (arbitrage) ：基于对同一类风险资产的观察，利用市场价格的差异，在不同的市场同时进行交易，获取瞬时无风险利益. 套利与投机不同：投机是基于对未来价格水平的 **预测**，以牟取利润，这是 **有风险的**. 套利是利用不同市场在价格联系上的差异的 **现实**，以套取利润，这是 **无风险的**.

套利机会不可能持久，因为套利机会一旦出现，那么随着套利者的参与，不同市场价格必将趋于平衡，机会就随之消失. 因此本书的全部讨论都建立在不存在套利机会的基础上，这在金融学上是合理的.

第二章　无套利原理

中国民间有句谚语“天上不掉馅饼”，西方亦有一句谚语“ there's no such thing as a free lunch ”（世上没有免费的午餐）. 这两句谚语在金融上的意思：不承担风险就不存在瞬间获取利益的机会. 用一句金融术语，即 不存在套利的机会.

无套利原理 (arbitrage-free principle) 是期权定价理论的基础. 虽然由于本章没有对原生资产价格的演化给出一个模型，因此不可能对它的衍生物（期权）的价格给出定量的回答，但是基于无套利原理仍然可以导出一系列期权定价的性质，对期权定价给出十分深刻的定性刻画 ([30]).

§2.1　金融市场与无套利原理

考虑由无风险资产（国债）B 与 n 个风险资产（股票、期权⋯⋯）$S_i(i=1,\cdots,n)$ 构成的金融市场. 它们的价格都是时间的 t 函数，即 $B=B_t$ 和 $S_i=S_{it},(i=1,\cdots,n)$. 在时段 $[t_0,t_1]$ 内，它们的收益是 $B_{t_1}-B_{t_0}$ 和 $S_{it_1}-S_{it_0}$，它们的回报是 $\dfrac{B_{t_1}-B_{t_0}}{B_{t_0}}$ 和 $\dfrac{S_{it_1}-S_{it_0}}{S_{it_0}},(i=1,\cdots,n)$. 无风险资产与风险资产的基本区别在于：如果在 $t=t_0$ 时刻，考虑 $t=t_1$ 时刻投资的回报，那么对于 无风险资产的回报是确定的，而对于 风险资产的回报是不确定的，它是一个随机变量.

一个投资者采取的 **投资策略** (investment strategy)，它表现为选取一个适当的 **投资组合** (portfolio)Φ：

$$\Phi=\alpha B+\sum_{i=1}^{n}\phi_i S_i,$$

其中 $\{\alpha,\phi_1,\cdots,\phi_n\}\in\mathbf{R}^{N+1}.\alpha,\phi_i(i=1,\cdots,n)$ 表示投资于该资产的份额. 我们有时也把 $\{\alpha,\phi_1,\cdots,\phi_n\}$ 称为投资策略.

从严格的意义上来讲，这里 α 和 ϕ_i $(i=1,\cdots,n)$ 亦都是时间 t 的函数，这说明投资者是随时在调整他的投资策略. 但是在两个相邻的交易日 $t=t_m$ 和 $t=t_{m+1}$ 之间， $\alpha,\phi_i,(i=1,\cdots,n)$ 都是不变的.