球面三角学

張楚宾 編

人民教育出版社

球　面　三　角　学

張楚賓編

人民教育出版社

本书是针对测量学上的应用而写的，凡是与测量学无关的材料都没有列入。全书共分五章，內容主要介紹了球面三角形的几何性质、边和角的函数关系、通过实例来叙述球面三角形的解法以及球面三角形的面积和球面角超的各种公式的推証与应用等。叙述簡明浅近，尽量避免高深的数学理論与多余的严格性，而着重于实际的运算。因此它适合于工业大学测量专业和中等测量技术学校教学参考之用，对于測繪工作者也有参考价值。

本书原由高等教育出版社出版。自 1960 年 4 月 1 日起，高等教育出版社奉命与人民教育出版社合并，統称“人民教育出版社”。因此本书今后用人民教育出版社名义繼續印行。

球面三角学

张楚宾 编

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門内承恩寺7号

北京市书刊出版业营业許可証出字第2号

京华印书局印装 新华书店发行

統一书号 13010·553 开本 850×1168 1/32 印张 2 2/16

字数 50,000 印数 17,501—27,000 定价 (6) ¥0.24

1959年2月第1版 1961年3月北京第5次印刷

序

本书在編写过程中，参考了下列书籍：

陈家賢編：三角学（測繪学院中等科讲义）；

邓茹刚編：球面三角（測繪丛书）；

李光蔭編：球面三角术；

Ф.Ф.巴甫洛夫和В.П.馬希克維奇著：球面三角学（刘亚星譯）；

М.К.ВЕНТЦЕЛЬ:Сферическая тригонометрия;

Н.Н.СТЕПАНОВА:Сферическая тригонометрия;

徐韞知編：球面三角法球面几何学合編。

其中尤以陈家賢、邓茹刚二同志所編的书及巴甫洛夫和馬希克維奇所著的书为主要依据。

本书是針对測量学上的应用而編写的，凡是与測量学无关的材料，都沒有列入。同时，为了不使本节篇幅过大而能用很短的时間把它学完，在理論闡述和文字叙述方面，力求簡单明确，而且尽可能地利用直观的和平面三角学的知識来証明定理和公式，尽量避免高深的数学理論和多余的严格性，而着重于实际运算。因此，本书适合于工业大学測量专业和中等測量技术学校教学参考之用；对于社会上的广大測繪工作者，也有参考价值。

本书共分五章，第一章介紹球面三角形的几何性质；第二章是推証球面三角形边和角的各种公式（函数关系）；第三章是用实例来叙述球面三角形的解法；第四章为直角球面三角形，第五章是球面三角形的面积和球面角超的各种公式的推証及运算。如果按照运算的繁簡，直角球面三角形应放在任意球面三角形之前，但考慮到直角球面三角形只不过是任意球面三角形的一个特例，因此本

书把它放在任意球面三角形之后，这可以大大精簡篇幅和減少讀者的学习时間。

本书每章都附有习題，这些习題一般說来是实用的，也是不太困难的。

本书在編写过程中，得到編者所在数学教研組同志們的指导和帮助，并由田守拙、程貞芳两同志制图，謹此致謝。

由于編者的数学和測量学知識都很差，更缺乏实际工作經驗，这本书的缺点和錯誤是很多的，但本着敢想敢干的精神，还是使这本书与讀者見面了，希望讀者提出意見，以便改进。

編　者

1958.10.12于北京

目　录

引 言

球面上三个大圓弧所构成的閉合图形，叫做球面三角形。球面三角学就是研究球面三角形的解法，也就是說，依照球面三角形的已知元素（边、角），来解算其他未知元素。无論在理論上或者在实用上，球面三角学都有重要的价值；如在天文学和测量制图学等方面都有广泛的应用，因为天球和地球虽然不是眞正的球形，但在符合一定要求的条件下，我們常把天球和地球看作圓球，于是在天文学和测量制图学中有很多問題，是应用球面三角学来解决的。

根据历史考察，球面三角学比平面三角学要出現得早一些。当球面三角形的球半徑变为无穷大时，这球面三角形就变为平面三角形了。然而，球面三角学与平面三角学还是有所不同的；如球面三角形的边，为研究便利起見，我們用角度来表示，而平面三角形的边，以长度为单位；又如当球的半徑一定时，知道了球面三角形的三个角，便可确定这球面三角形的三个边，而平面三角形則沒有这样的性質。

本书在研究球面三角学时，引用到平面三角学的一些基本公式，如 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin 2A=2\sin A\cos A$，$\cos A-\cos B=$ $=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$等等。这并不是說平面三角的公式与球面三角的公式可以通用，这是因为在平面三角学中的公式有恒等式和条件等式两种，前者如上面所提到的那些公式，系仅就某一元素或者两个元素的恒等关系式而言，根本与三角形沒有关系，当然可以应用到球面三角学中来；后者如正弦公式、余弦公式等等，是平面三角所特有的公式，不可应用到球面三角学中来。

第一章　球面三角形的几何性質

§1. 球面上两点之間的距离

球面上的圓　在高中的立体几何学中，我們已經知道，通过球心的平面截球所得的截口是一个圓，它叫做大圓。不通过球心的平面截球所得的截口也是一个圓，它叫做小圓。显然，大圓把球面分成相等的两部分。而通过球面上不在同一直徑两端的两个点，能作并且只能作一个大圓(图 1)。

球面上两点間的距离　球面上两点 A, B 間大圓弧（劣弧）的长叫做球面上两点 A, B 間的距离，通常以AB来記它。

我們可以証明：在球面上連接 A, B 两点的所有曲綫（弧）之长以距离 AB 为最短。

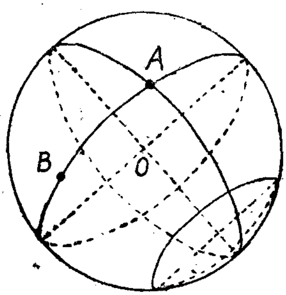

图 1.

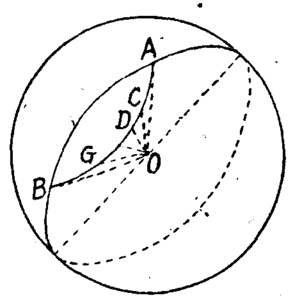

图 2.

事实上，过 A, B 两点作任意曲綫弧 $ACD\cdots\cdots GB$(图 2)，而以 C, D, $\cdots\cdots$, G 各点分这曲綫弧为无穷多个无穷小的弧 AC, CD, $\cdots\cdots$, GB。由于这些弧非常小，我們可以把它們看作是大圓弧。把 A, C, D, $\cdots\cdots G$, B 各点与球心 O 联結起来，于是我們便得到多面角 O-$ACD\cdots\cdots GB$。由立体几何知：

平面角 $\angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots\cdots + \angle GOB$,

由于圓的中心角与所对的圓弧同度，有：

$$圓弧 AB < AC + CD + \cdots\cdots + GB,$$

即　　　　大圓弧 $AB <$ 曲綫弧长 $ACD\cdots\cdots GB$.

这就是說，連接两点 A, B 的所有曲綫弧之长，以距离 AB 为最短①。

§2. 球面上的圓的极

設球面上一已知圓（不論大圓或小圓），垂直于这已知圓所在平面的球直徑的端点，叫做这个圓的极。

如图 3 中，圓 AB 的极是 P 与 P'，圓 CD 之极也是 P 与 P'；这就是說，P 和 P' 既是圓 AB 之极，也是圓 CD 之极。同时可以看出，一个圓有两个极，而这两个极的連綫就是球的直徑。

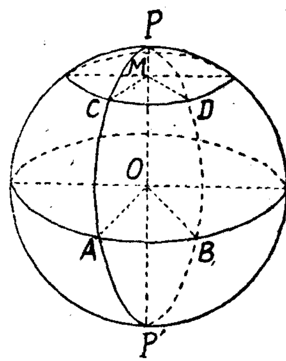

图 3.

球面上某一个圓的极到这个圓周上任一点的距离，称为极距离。

可以証明：极到圓周上各点的距离都是相等的。

事实上，如图 3，設 CD 之极为 P 与 P'，直徑 PP' 交圓平面于 M，則两个平面直角三角形 PMC 和 PMD 就全等。因此

$$弦 PC = 弦 PD.$$

由于等圓內弦等則弧等，故

$$PC = PD.$$

同理　　　　$$P'C = P'D.$$

这就証明了极到圓周上各点的距离是相等的。

关于圓的极，我們还有下列重要定理。

---

①用微分几何中的大地綫原理来証明这个命题，則更为清楚。

定理 I 大圓的极距离为一象限(=90°)。反之，如果球面上一点至其他两点(不是直徑的端点)的距离都是一象限，則前一点必为通过后两点的大圓之极。

証 由图 3，对于大圓 AB，我們有

$$\angle POA=\angle P'OA=\angle POB=\angle P'OB=90°,$$

由于圓的中心角与所对之弧同度，故

$$PA=P'A=PB=P'B=90°.$$

逆定理的証明：因为

$$PA=PB=90°,$$

$$\therefore \quad \angle POA=\angle POB=90°.$$

因之 PO 垂直大圓 AB 之平面，即 P 为大圓 AB 之极。

§3. 球面角与球面三角形

球面角 两大圓相交所成之角，叫做球面角，其交点叫做球面角的頂点，大圓弧叫做这球面角的边。如图 4 中，球面角 APB 与 $AP'B$ (簡記为球面角 P 与 P') 的頂点为 P 与 P'，而 PAP'，PBP' 为其边。一般，球面角是以过頂点的圓弧的二切綫所夹的角来度量的。

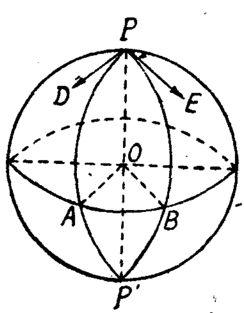

图 4.

在图 4 中，設以 P 为极的大圓与球面角之边交于 A, B，过 P 作 PA, PB 的切綫 PD, PE，則有

$$\angle DPE=\angle AOB,$$

即 $\qquad$ 球面角 $P=AB$.

这就是說，球面角与以其頂点为极而夹在两边間的大圓弧同度.

球面三角形 球面上相交于三点的三个大圓弧所圍成的球面上的一部分，叫做球面三角形。这三个大圓弧叫做球面三角形的

边。通常用小写拉丁字母 a, b, c 来表示。各大圓弧所成的球面角，叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A, B, C 来表示。这三个边与三个角統称为球面三角形的六个元素。

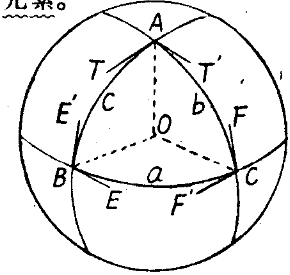

图 5.

将球面三角形 ABC 的各頂点与球心 O 連結，則构成球心三面角 $O—ABC$（图 5），显然由于圓的中心角与所对的弧同度，有

$$a=\angle BOC,$$
$$b=\angle AOC,$$
$$c=\angle AOB,$$

又 $A=\angle TAT'$； $B=\angle EBE'$， $C=\angle FCF'$.

这就是說，球面三角形的边与所对应的球心三面角之面角同度，而球面三角形的角与球心三面角的二面角同度。

今后，为了方便和切合实用，我們所討論的球面三角形，其边与角都限于小于 180°。

§4. 极三角形

設球面三角形 ABC 各边 a, b, c 的极分别为 A', B', C'（图6）；且 AA', BB', CC' 都小于 $90°$；过 A', B', C' 作大圓弧构成另一个球面三角形 $A'B'C'$，則这个球面三角形 $A'B'C'$ 叫做原球面三角形 ABC 的极三角形。

因为 B' 为 b 之极，C' 为 c 之极，由 §2 定理 I 的正定理得 $AB'==90°$，$AC'=90°$；从而再根据定理 I 的逆定理知：A 为 $B'C'=a'$ 之极（图 7），且 $AA'<90°$。

同理，B 为 $C'A'=b'$ 之极，且 $BB'<90°$；C 为 $A'B'=c'$ 之极，且 $CC'<90°$。

由此可知，球面三角形 ABC 也是球面三角形 $A'B'C'$ 之极三

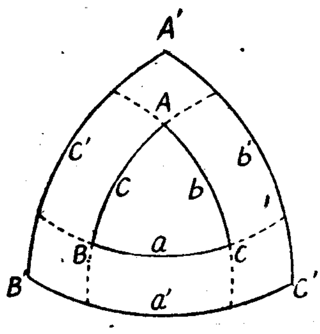

图 6.

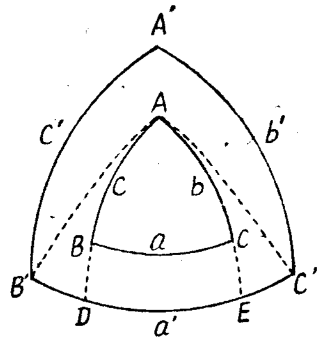

图 7.

角形。因之，我們有下列定理：

定理Ⅱ 若此球面三角形为彼球面三角形的极三角形，則彼球面三角形也为此球面三角形的极三角形。

又在图 7 中，延长 AB, AC 交 $B'C'$ 于 D, E，则有

$$
\begin{aligned}
a'+A &= a'+DE \qquad (\because A \text{ 为 } a' \text{ 之极})\\
&= B'D+DE+EC'+DE\\
&= B'E+DC'\\
&= 90^\circ+90^\circ \ (\because B' \text{ 为 } AE \text{ 之极，} C' \text{ 为 } AD \text{ 之极，据定理 I})\\
&= 180^\circ.
\end{aligned}
$$

同理：

$$b'+B=180^\circ, \qquad c'+C=180^\circ.$$

因之得

定理Ⅲ 极三角形的边与原三角形之对应角互补。同时由定理Ⅱ可以看出，极三角形的角与原三角形之对应边互补。

§5. 球面三角形的边和角的基本性质

性質Ⅰ 球面三角形两边之和大于第三边。

証 設球面三角形 ABC，将它的顶点与球心連結(图 8)，由立体几何知識，三面角的两个面角的和大于第三面角，即

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC.$$

故 $$c+a>b.$$

同理： $$a+b>c,\qquad b+c>a.$$

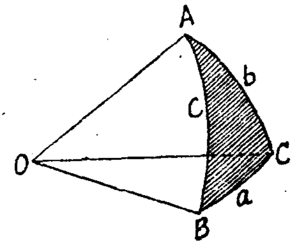

图 8.

推論 球面三角形两边之差小于第三边。

性質 II 球面三角形三边之和大于 $0°$ 而小于 $360°$。

証 因为 $a, b, c>0$，故 $a+b+c>0$。又因为由立体几何中凸多面角各面角之和小于 $360°$，故

$$\angle AOB+\angle BOC+\angle COA<360°,$$

因之 $$c+a+b<360°.$$

性質 III 球面三角形三角之和大于 $180°$ 而小于 $540°$。

証 我們来考察球面三角形 ABC 的极三角形 $A'B'C'$ (图7)。由定理 II 知

$$a'+A=180°,\quad b'+B=180°,\quad c'+C=180°.$$

然而由性質 II 知

$$0°<a'+b'+c'<360°,$$

将 $a'=180°-A,\ b'=180°-B,\ c'=180°-C$ 代入上式，则得

$$0°<180°-A+180°-B+180°-C<360°,$$

即 $$180°<A+B+C<540°.$$

性質 IV 球面三角形的两角之和减第三角小于 $180°$。

証 因为由性質 I 知

$$a'+b'>c',$$

$\therefore$ $$180°-A+180°-B>180°-C,$$

即 $$A+B-C<180°.$$

同理： $$A+C-B<180°,\qquad B+C-A<180°.$$

性质 V 若球面三角形的两边相等，則这两边的对角也相等。反之，若两角相等，則这两角的对边也相等。

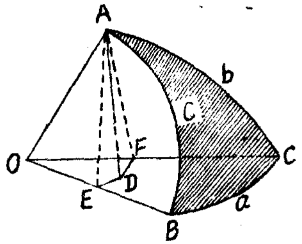

图 9.

証 (1)設球面三角形 ABC 中，$b=c$。过 A 作平面 OBC 的垂綫交平面于 D，再过 D 引 OB，OC 的垂綫 DE，DF；由于

$$\angle AOE=\angle AOF,\ (\because b=c)$$

則　平面rt.$\triangle AEO\equiv$平面rt.$\triangle AFO$，

$$\therefore \qquad AE=AF.$$

因而　　平面 rt.$\triangle ADE\equiv$平面 rt.$\triangle ADF$，

$$\therefore \qquad \angle AED=\angle AFD,$$

即　　$$B=C.$$

(2)若 $B=C$，則由定理 Ⅲ（考察$\triangle ABC$ 之极三角形）知

$$b'=c'.$$

于是根据(1)的証明

$$B'=C'.$$

再根据定理 Ⅲ，得

$$b=c.$$

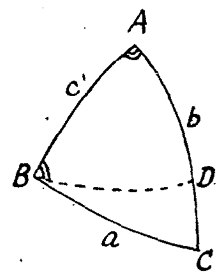

图 10.

性质 VI 球面三角形中，大角对大边，大边对大角。

証 (1)設在球面三角形 ABC 中，$B>A$（图 10）。作球面角$\angle ABC$，使其等于 A，則由性质 V，

$$AD=BD.$$

因之，根据性质 I，有

$$b=AD+DC=BD+DC>a.$$

(2)設 $b>a$，我們来求証 $B>A$，为了証明这点，采用反証法。

假定 $B\not>A$，則必$B<A$ 或 $B=A$，于是根据(1)之証明和性质 V，必有 $b<a$ 或 $b=a$，这都与原設条件 $b>a$ 矛盾，所以当 $b>a$ 时

必有 $B>A$。

以上所談的只不过是球面三角形边和角的几个主要性质，对于边和角的其他一些性質，这里就不研究了。

例 求証 $\cos(P-A)>0$， 此处 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$.

証 由性質Ⅳ，知 $P-A=\frac{1}{2}(B+C-A)<90°$。又由性質Ⅲ，$A+B+C>180°$，但 $2A<360°$，将这二不等式相减，得 $B+C-A>-180°$，或 $P-A=\frac{1}{2}(B+C-A)>-90°$。这就是說：

$$-90°<P-A<90°,$$

因之

$$\cos(P-A)>0.$$

§6. 全等球面三角形

在同球或等球上，两球面三角形的对应边和角分别相等，而且排列顺序相同，则称这两个球面三角形全等。

定理Ⅳ 在同球或等球上两个球面三角形，有下列条件之一，且相等部分排列顺序相同，则这两个球面三角形全等：

1. 两边及其夹角彼此相等。
2. 两角及其夹边彼此相等。
3. 三边彼此相等。
4. 三角彼此相等。

証 前三种情况可用重迭法从球心三面角之全等推出，这里就不必詳加叙述了。至于第四种情况，需要借助于极三角形而加以証明。現在証明如下：

設在球面三角形 ABC, DEF 中，已知

$$A=D,\quad B=E,\quad C=F.$$

且排列顺序相同，作它們的极三角形 $A'B'C'$, $D'E'F'$（图 11），則根

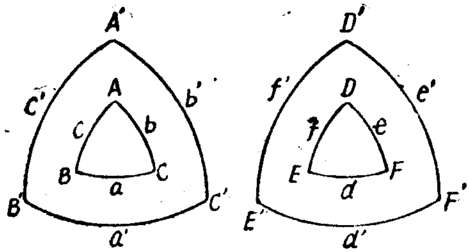

图 11.

据定理Ⅲ，有

$$A+a'=180^\circ=D+d',$$
$$B+b'=180^\circ=E+e',$$
$$C+c'=180^\circ=F+f'.$$

因为 $A=D$, $B=E$, $C=F$，所以

$$a'=d',\quad b'=e',\quad c'=f'.$$

于是根据本定理第三种情况，球面三角形 $A'B'C'$ 与球面三角形 $D'E'F'$ 全等。故

$$A'=D',\quad B'=E',\quad C'=F'.$$

再根据定理Ⅲ

$$A'+a=180^\circ=D'+d,$$
$$B'+b=180^\circ=E'+e,$$
$$C'+c=180^\circ=F'+f.$$

因而 $$a=d,\quad b=e,\quad c=f.$$

所以球面三角形 ABC 与球面三角形 DEF 全等，而定理証毕。

显然，由于全等球面三角形可以重合，它們的面积是相等的。

§7. 对称球面三角形

在同球或等球上两球面三角形的对应边和角分别相等，而其排列顺序不相同，則称这两个球面三角形互为对称三角形。