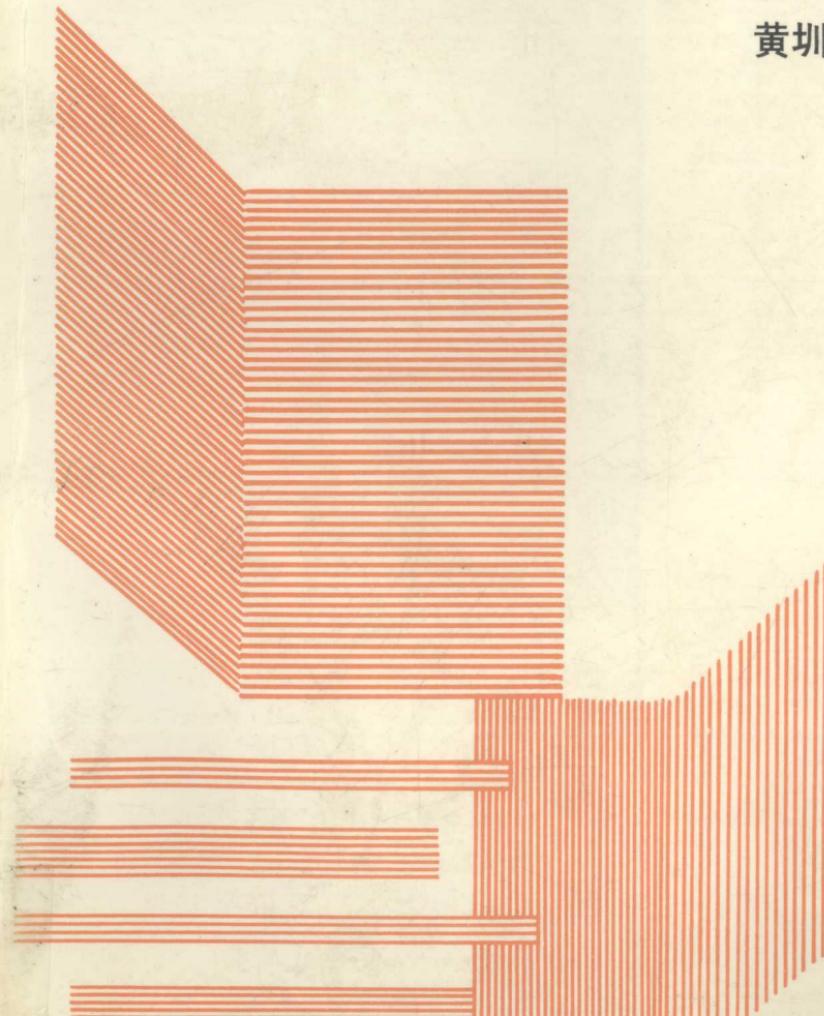


● 研究生教材 ● 研究生教材

航天器姿态动力学

黄圳圭 编著



V412.4
1010

V412.4
1010-1

景深(CP) 目錄存件圖

□ 研究生教材 □



30794634

黄坤圭 编著

航天器姿态动力学

国防科技大学出版社

元 00.81 价宝

794634

图书在版编目(CIP)数据

航天器姿态动力学/黄圳圭—长沙:国防科技大学出版社,
1997.11

ISBN7-81024-458-2

- I . 航天器姿态动力学
II . 黄圳圭
III . 航天器-姿态-飞行控制-动力学
IV . V41



国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4505241 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:张建军 责任校对:黄八一

新华书店总店北京发行所经销

湖南大学印刷厂印装

*

850×1168 毫米 1/32 印张:8.625 字数:216 千

1997年11月第1版第1次印刷 印数:1—2000 册

*

定价:12.00 元

内 容 简 介

本书系统地阐述受控航天器姿态动力学的基本概念、基本理论和基本方法。全书共分七章，分别介绍自旋稳定系统、双自旋稳定系统、引力梯度矩稳定系统、气动力矩稳定系统、太阳辐射压力矩稳定系统等被动控制系统和小推力器系统、飞轮系统、地磁力矩产生器等主动控制系统的工作原理和动力学特性，以及姿态敏感器、姿态确定和四元数分析法等有关内容。

本书可作为飞行力学、飞行控制和飞行器总体设计等专业的本科生或研究生教材。对从事航天器研究与设计的专业人员也有参考价值。

序

本书是以受控航天器姿态动力学为研究内容,系统地阐述各种姿态控制系统的工作原理,分析航天器姿态在控制作用下的动力学特性。

全书共七章,分别介绍自旋稳定系统、双自旋稳定系统、引力梯度矩稳定系统、气动力矩稳定系统、太阳辐射压力矩稳定系统等被动控制系统和小推力器系统、飞轮系统、地磁力矩产生器等主动控制系统。在介绍各种系统的基础上,以小推力器系统对自旋稳定系统的章动阻尼、对自旋轴的机动控制、对飞轮系统的卸载等为例,讨论了联合系统的组成问题。并借以说明,如何发挥各种系统的优点,组合出具有更高性能的系统,是设计姿态控制系统时极为关心的问题。

另外,为了建立完整的姿态控制系统概念,还特在第三章介绍姿态敏感器的工作原理和姿态确定的基本方法;为了弥补欧拉角表示法的不足,又在第七章介绍了四元数分析法。关于结构振动和液体晃动的建模与控制的内容,已收在作者的另一著作《大型航天器动力学与控制》^[2]中,故对此内容本书未加涉入。

作者于1982年为国防科技大学飞行力学专业讲授航天器姿态动力学课程时,便完成了本书的初稿,并印成内部交流讲义。1994年进行了修改并胶印。在这次公开出版前又作了大幅度的修改和补充,希望能把航天器姿态动力学内容作一较为系统的阐述。

本书初稿印成讲义后,承蒙哈尔滨工业大学吴瑶华教授、杨涤教授和金永德教授的关注,曾将本书的初稿作为他们的研究生教材。国防科技大学任董教授和吴瑞林教授对本书的编写曾给予大力支持。在此一并表示衷心感谢。

黄训圭
1997.10.长沙

目 录

(SIS)	第六章 气动增益与综合控制系统的稳定性分析
(S12)	碰撞解脱 1.3
(S13)	器载计算机 3.3
(S14)	综合控制系统设计 3.3
(S15)	综合元四 章十
(S16)	惯性基准陀螺仪 1.3
(S17)	弹性力学模型 3.3
(S18)	最优化方法 3.3
(S19)	最优控制方法 3.3
绪 论	第一章 封闭式微弱信号检测 (1)
第一章 刚体动力学与航天器的自旋稳定	第二章 飞行力学 (7)
1.1 刚体动力学	1.1 刚体运动学 (7)
1.2 自由刚体自旋稳定	1.2 自由刚体运动 (14)
1.3 内能耗散对自旋稳定的影响	1.3 内能耗散 (17)
1.4 双自旋稳定	1.4 双自旋稳定 (25)
第二章 环境力矩稳定系统	第三章 姿态敏感器和姿态确定 (30)
2.1 引力梯度矩和引力梯度稳定系统	2.1 引力梯度矩 (30)
2.2 气动力和气动力矩稳定系统	2.2 气动力和气动力矩 (45)
2.3 太阳辐射压力和太阳辐射压力矩稳定系统	2.3 太阳辐射压力矩 (61)
第三章 姿态敏感器和姿态确定	第四章 小推力器系统 (71)
3.1 姿态敏感器	3.1 姿态敏感器 (72)
3.2 姿态确定	3.2 姿态确定 (91)
第四章 小推力器系统	第五章 飞轮系统 (103)
4.1 问题的一般提法	4.1 问题的一般提法 (104)
4.2 相平面和开关曲线	4.2 相平面和开关曲线 (107)
4.3 最优控制	4.3 最优控制 (115)
4.4 自旋轴的控制	4.4 自旋轴的控制 (128)
4.5 脉冲调制和变推力控制	4.5 脉冲调制和变推力控制 (143)
4.6 多推力器系统的结构与操作	4.6 多推力器系统的结构与操作 (151)
第五章 飞轮系统	第六章 气动增益与综合控制系统的稳定性分析 (167)
5.1 反作用飞轮系统	5.1 反作用飞轮系统 (169)
5.2 偏置动量矩轮系统	5.2 偏置动量矩轮系统 (184)
5.3 框架动量矩轮系统	5.3 框架动量矩轮系统 (189)
5.4 控制力矩陀螺系统	5.4 控制力矩陀螺系统 (197)
5.5 飞轮的斜装与操作	5.5 飞轮的斜装与操作 (204)

第六章 地磁力矩器与联合主动控制系统	(212)
6.1 地球磁场	(212)
6.2 地磁力矩器	(218)
6.3 联合主动控制系统	(221)
第七章 四元数法	(238)
7.1 四元数的运算法则	(239)
7.2 用四元数表示旋转	(242)
7.3 四元数运动学方程	(252)
7.4 姿态机动控制	(255)
参考文献	(262)
符号表	(264)

(1)	宝慈慈自本源由自	3.1
(1A)	神源尚宝慈慈自扶端佛诵内	3.1
(32)	宝慈慈自又	4.1
(30)	慈乐宝慈歌大慈来 章二慈	4.2
(30)	慈乐宝慈真慈大得殊威震大同	4.3
(42)	慈乐宝慈歌大慈卢师氏施卢	4.3
(61)	慈乐宝慈歌大沮便辟固本疏氏丑襟辟固大	4.3
(41)	宝慈态萎味器慈慈态萎 章三慈	4.4
(45)	慈胞慈态萎	4.4
(41)	宝慈态萎	4.4
(103)	慈素器大卦小 章四慈	4.5
(104)	慈贵娘一也即问	4.5
(50)	慈尚关怀师昧面乎群	4.5
(102)	慈望卦景	4.5
(188)	慈冀尚慈源自	4.5
(103)	慈强大卦变味瞻逝书相	4.6
(101)	慈禹已辟慈初慈慈器式斯是	4.6
(105)	慈素卦大 章五慈	4.6
(106)	慈余卦汇用求足	4.7
(184)	慈柔卦承量如置缺	4.7
(186)	慈柔卦承量如聚缺	4.7
(185)	慈柔卦调聚大持坚	4.7
(304)	慈柔卦聚捺勿辨死	4.7

绪论

航天器，包括人造地球卫星、载人飞船、空间站、宇宙探测器等，要完成其特定的飞行任务（科学的、军事的和民用的），不但对飞行轨道有一定要求，而且对飞行姿态也有一定要求。例如天文观察站，要求星体对某一天体定向；太阳能电池阵，要求对太阳定向；地球观察站，要求对地球定向；空间对接，要求两星相互定向；轨道机动，要求制导发动机推力沿给定的方向等等。研究航天器姿态运动的理论，称为航天器姿态动力学。由于飞行任务要求航天器姿态要按照指定的规律运动，因此姿态动力学不只是简单地描述姿态如何运动，而且要进一步研究如何控制姿态的运动。因此，姿态动力学实质上是研究航天器姿态在控制作用下的动力学问题。

早期卫星规模小刚度大，可近似为六自由度运动的刚体。因此其姿态动力学的建模问题可直接应用经典的刚体动力学理论来研究，而且通常可得到满意的分析结果。本文主要是以刚体卫星为控制对象研究其姿态控制的机理与方法。

然而刚体模型的假设，不能完全揭示卫星姿态动力学特性。即使是早期卫星，采用刚体的假设，也可能是失败的。典型的例子是1958年美国发射的第一颗卫星探险者1号，卫星的姿态控制应用刚体自旋稳定的原理。卫星入轨后很快便失稳而翻倒，其根本原因就是：卫星带有四条鞭状天线，而仍然视卫星为刚体。因此建立在刚体模型上的控制方案就缺乏理论上的严密性，而存在失稳的可能性。后来人们提出了半刚体模型，用以修正刚体模型。用此模型

分析研究早期卫星的失稳问题,得到良好的效果。

随着空间事业的发展,航天器的规模越来越大,对姿态控制性能的要求也越来越高。由于航天器的质量受运载条件的限制,使得航天器的结构刚度很低,因此结构振动的影响不能忽略。同时航天器上携带有大量的液体燃料、生活用水等,使得贮箱内液体晃动的影响也不能忽略。因此当前面临的航天器结构,已是多柔体多贮箱组成的大型轨道复合体。其动力学特性非常复杂,其姿态运动同弹性振动、液体晃动等非刚性运动高度耦合。对这样复杂系统动力学的建模、编程、计算等软件的研制问题,通常需要采用计算机符号推演技术。这些内容已超出本书的阐述范围,有兴趣的读者请参看《大型航天器动力学与控制》一书^[2]。

航天器是在一定的空间环境之中飞行。空间环境中充满着各种物理介质,对航天器的姿态运动产生不同程度的影响。根据已有研究成果,其中影响较大的有:天体的引力作用、空气动力的作用、地球磁场的作用、太阳辐射压力的作用以及流星的碰撞等,这些作用称为环境作用力。环境作用力对航天器质心之矩称为环境力矩。环境力矩通常是一很小量,但是由于作用的持续性和长期性,因而对姿态运动会产生明显的影响。因此在建立精确的控制系统模型时,必须把环境力矩的影响考虑在内。另外,任何力矩只要利用得当,都可能成为控制力矩,因此环境力矩也是重要的潜在的控制力矩源。在设计姿态控制系统时,环境力矩也常常被列为候选的控制力矩源之一。

姿态控制的含义,通常包括如下几个具体概念:

- 1) 定向——卫星的主体或附属体(例如太阳能电池阵、观测设备、天线等),以单轴或三轴按一定精度保持在给定的参考方向上。此参考方向可以是惯性的,例如天文观察站;也可以是转动的,例如对地球观测。由于定向一方面要保持在参考方向上,另一方面又要克服干扰的影响,因此需要通过控制的方法加以保持。

再定向——星体从原来的参考方向定向,改变到新参考方向定向。这种参考方向的改变,是通过连续的姿态机动控制来实现。

捕获——星体从开始不确定的姿态角与姿态角速度进入定向状态所进行的机动控制。捕获又称为初始对准。例如航天器入轨时,运载火箭脱离,星体从旋转、翻滚等不确定姿态进入定向状态。为了使控制系统设计得更为合理,捕获通常分为两个阶段进行:

粗对准——指初步对准。通常用较大的控制力矩,以缩短机动的时间,但不要求过高的定向精度。

精对准——指粗对准或再定向后由于精度不够而进行的修正动机,以保证定向的精度要求。通常用较小的控制力矩。

跟踪——保持对活动目标的定向。

搜索——对活动目标的捕获。

从上述概念可以看出,定向属于姿态稳定问题,而再定向和捕获则属于姿态机动问题。姿态稳定要求控制系统在航天器整个工作中进行控制,这种控制一般是长期而持续的,所要求的控制力矩是较小的。姿态机动一般是一短暂过程,需要较大的控制力矩,使姿态在较短的时间内发生明显的改变。由于这两种控制目的有显著的差别,工程上往往采用两套系统来完成。

产生控制力矩的方法有两大类,一类是利用环境力矩,另一类是星上携带的控制力矩产生器。另外,由刚体力学知,高速自旋的自由回转体,其转轴在惯性空间中具有稳定的定向性,因此自旋稳定是控制航天器姿态的又一种原理。

根据上述的产生控制力矩的方法,及自旋稳定原理而发展起来的航天器姿态控制系统,有如下几种类型:

自旋稳定系统——星体为扁平的回转体形状,对称轴为最大惯量主轴,也为自旋轴。星体在入轨后起旋,并把转轴对准在预定方向上。从理论来说,这种稳定系统在起旋后就不需要另加控制,但是由于干扰的影响将造成自旋轴的进动与动量矩方向的漂移,

如果不加以校正，则定向精度将要下降，而不适于长期任务。自旋稳定的进一步发展，是双自旋稳定，即用一自旋体携带一消旋体，而消旋体的转速可根据需要来设计。

环境力矩稳定系统——根据各种环境力矩的性质，选择适当的轨道高度，设计一定的星体形状，使得作为控制力矩的某一环境力矩，其值远大于其余的环境力矩的值，使星体的姿态处于此控制力矩作用下运动，从而保持设计要求的姿态。但是，即使作了精心设计后，这种控制力矩仍是一很小的量，因此响应速度慢，精度低，而且由于力矩的大小与方向是由其固有的规律所确定，而不具有机动能力。由于环境力矩是取之不尽的力矩源，一旦发射成功，其工作寿命将是无限的。最具有实际意义的环境力矩稳定系统是引力梯度稳定系统和太阳辐射压力矩稳定系统。

可供航天器携带的控制力矩产生器，现已获得工程广泛应用的有推力器系统、飞轮系统与地磁力矩产生器等。

推力器系统——以推力器产生的推力对星体质心形成力矩为控制力矩。推力器可根据需要设计其推力大小，安装位置可以最佳选择，使用时可开可关，在任何环境下都能工作，精度高，可机动，因此推力器系统是用于姿态控制的主要手段。但是推力器系统所消耗的工质是由星上携带的，工作寿命是受到携带的工质数量所限制，在完成长期任务的航天器中，其使用受到限制。

飞轮系统——通过改变飞轮的动量矩来吸收星体的多余动量矩，从而通过控制星体的动量矩来控制星体的姿态。由于作用于星体上的干扰力矩通常包含有周期项，此周期项干扰力矩将造成星体动量矩作周期性地改变，这种改变反馈到飞轮转轴的电机上，使飞轮产生往复转动，从而消除星体姿态的扰动。用飞轮系统来消除星体姿态的周期性扰动，只需消耗很少的能量（电机的电功率），这一优点是推力器系统所不能比拟的。但是干扰力矩中通常还包含有阶跃项，这一干扰项将使飞轮向一个方向加速或偏转。当飞轮转

速达到某一极限状态时就不再吸收星体多余的动量矩,从而使系统失控。这种状态称为饱和。饱和是飞轮系统自身无法克服的缺点。为了克服这一缺点,必须另外考虑去饱和,即卸载的措施。因此在设计飞轮系统的同时,必须设计相应的卸载系统。飞轮系统可用于姿态机动控制与姿态稳定控制。飞轮系统,根据飞轮转速的标称值是否等于零,飞轮转轴是否固定及飞轮的数目与安装位置等而构成各种各样的飞轮系统。常见的飞轮有小飞轮零偏置的反作用飞轮,大飞轮非零偏置的动量矩飞轮及转轴装在一自由度或二自由度框架上的控制力矩陀螺等。

地磁力矩产生器——根据载流线圈在地球磁场作用下产生偏转力矩的原理来设计的力矩产生器。如果星体的三个体轴上都安装有线圈,则可以通过控制线圈上的电流来获得所需要的控制力矩的大小与方向。

纵观上述的各种控制系统可知,自旋稳定系统和环境力矩稳定系统,不需要消耗星上的能源(从原理上说),且不具有机动能力,因此称之为无源系统或被动系统。而其余系统是由星上携带的控制力矩产生器作执行器,且须消耗星上能源,又都具有机动能力,因此称之为有源系统或主动系统。两类系统各有明显的优缺点,各种航天器通常根据任务要求,选择合适的控制系统。例如任务期限短、精度要求高、机动范围大的航天器,通常选用推力器系统或飞轮系统;任务期限长,精度要求低,不要求机动性,则可选用被动系统。还有许多飞行任务对控制性能要求取折衷水平,这类航天器往往根据两类系统的特点加以巧妙组合,扬长避短,组成新的控制系统,即所谓半主动系统或半被动系统。另外,有些航天器是由若干部分组成,每一部分所要求的姿态控制各不相同,因此每部分各有独立的控制系统,这种系统称为多体控制系统。

主动控制系统属于闭环控制系统,在系统中除了需要上述的执行器外,还需要相应的姿态敏感器及测量信息的处理、控制指令

的产生等一系列重要的环节。由于星载计算机的使用和发展使得姿态控制技术更臻完善。“阿婆罗”飞船、航天飞机、空间站等航天器的成就，说明人类已能运用自如地驾驭航天器在太空完成各种复杂的飞行任务。本书的任务是系统地阐述各种姿态控制系统的动力学与控制的基本原理，为进一步分析和设计航天器的动力学特性和控制系统提供必要的理论基础。

著者单位：中国科学院力学研究所，北京 100080
作者简介：李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

李振宇，男，1936年生，研究员，博士生导师，长期从事航天器姿态运动与控制的研究，发表论文50余篇，曾获国家科技进步二等奖、中科院科技进步一等奖、中科院青年科学家奖。

第一章 刚体动力学与航天器的自旋稳定

在航天器姿态控制系统的初步设计中,往往把航天器视为刚体,用以得到接近于星体运行情况的动力学模型,并且对这一模型进行充分研究,为精确模型的建立奠定基础。下面均设星体为刚体,或星体的壳体为刚体。如果是多体系统,则认为各体均为刚体或质点。

为了研究刚体航天器的姿态动力学,这一章先简单地概述刚体动力学的若干重要结论,然后讨论一种最简单的姿态控制方法,即自旋稳定。

1.1 刚体动力学

一、刚体相对于质心的动量矩

设刚体 B 相对于质心 O 的角速度为 $\bar{\omega}$,刚体内任一质点 M_i ,质量为 m_i ,相对于质心 O 的矢径为 \bar{r}_i ,则 M_i 相对

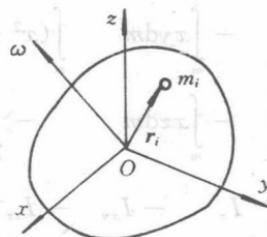


图 1.1-1 刚体相对质心动量矩

于质心 O 的速度 \bar{v}_i 为

$$\bar{v}_i = \bar{\omega} \times \bar{r}_i$$

刚体相对于质心 O 的动量矩 \bar{h} 为

$$\bar{h} = \sum m_i (\bar{r}_i \times \bar{v}_i) = \sum m_i [\bar{r}_i \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_i)]$$

对连续质量的刚体来说, 上式应写为积分形式:

$$\bar{h} = \int_m [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] dm \quad (1.1-1)$$

如以体坐标系 $Oxyz$ 为计算坐标系, 并采用矩阵记号:

$$\bar{r} = [x, y, z]^T, \quad \bar{\omega} = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$$

则式(1.1-1)可用矩阵形式表示为

$$\bar{h} = \int_m (\bar{r}^T \bar{r} \underline{E} - \bar{r} \bar{r}^T) \bar{\omega} dm = \underline{I} \bar{\omega} \quad (1.1-2)$$

式中 \underline{I} 为刚体对质心 O 的惯量张量, 且有

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \int_m (\bar{r}^T \bar{r} \underline{E} - \bar{r} \bar{r}^T) dm \\ &= \begin{bmatrix} \int_m (y^2 + z^2) dm & -\int_m xy dm & -\int_m xz dm \\ -\int_m xy dm & \int_m (x^2 + z^2) dm & -\int_m yz dm \\ -\int_m xz dm & -\int_m yz dm & \int_m (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \quad (1.1-3) \end{aligned}$$

按转动惯量 I_x, I_y, I_z 和惯量积 I_{xy}, I_{yz}, I_{xz} 的定义知:

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm, I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm$$

$$I_{xy} = \int_m xy dm, I_{yz} = \int_m yz dm, I_{xz} = \int_m xz dm$$

把式(1.1-3)代入(1.1-2)后可得 \bar{h} 在体坐标系 $Oxyz$ 上的三分量 h_x, h_y, h_z 为

$$\begin{aligned} h_x &= I_x \omega_x - I_{xy} \omega_y - I_{xz} \omega_z \\ h_y &= -I_{xy} \omega_x + I_y \omega_y - I_{yz} \omega_z \\ h_z &= -I_{xz} \omega_x - I_{yz} \omega_z + I_z \omega_z \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

如果体坐标系 $Oxyz$ 的三坐标轴是刚体对 O 点的三惯量主轴, 即有

$$I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$$

则有

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (1.1-5)$$

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{bmatrix} \quad (1.1-6)$$

式中 I_x, I_y, I_z 分别称为刚体对 x, y, z 轴的主惯量。由于任一刚体对任一点 O 总是存在三互相垂直的惯量主轴, 因此刚体对点 O 的动量矩恒可表示为式(1.1-6)的形式。后面均设体坐标系的三轴为惯量主轴, 从而 \bar{h} 均取式(1.1-6)的形式。

二、刚体的动能

设刚体作一般运动, $O^{\circ}x^{\circ}y^{\circ}z^{\circ}$ 为惯性坐标系, $Oxyz$ 为体坐标系。质心 O 对 O° 的矢径为 \bar{R}_0 , 速度为 \bar{v}_0 。刚体内任一质量元 dm , 相对于质心 O 的矢径为 \bar{r} , 刚体角速度为 $\bar{\omega}$, 则质量元为 dm 的速度 \bar{v} 为

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}$$

刚体的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\text{m}} \bar{v} \cdot \bar{v} dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\text{m}} (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}) dm \\ &= \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \int_{\text{m}} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm + \int_{\text{m}} \bar{v}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \end{aligned}$$

注意到 \bar{v}_0 与 $\bar{\omega}$ 是与积分号无关, 而有

$$\int_{\text{m}} \bar{v}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \bar{v}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \int_{\text{m}} \bar{r} dm) = 0$$

因此得

$$T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} \int_{\text{m}} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$$

$$(1.1-7) \quad = T_r + T_r$$

式中

$T_r = \frac{1}{2} m v_0^2$ ——刚体随同质心平动动能;

$T_r = \frac{1}{2} \int_{\text{m}} (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$ ——刚体绕质心转动动能。

由式(1.1-7)知, 刚体作一般运动时, 其动能等于随同质心平动动能与绕质心转动动能之和。

注意到:

$$\begin{aligned} &(\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ &= \bar{\omega} \cdot [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})] \end{aligned}$$

因此 T_r 又可表示为

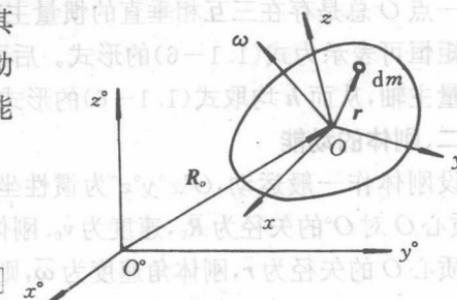


图 1.1-2 刚体动能