Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1455

J.-P. Françoise R. Roussarie (Eds.)

Bifurcations of Planar Vector Fields

Proceedings, Luminy 1989

Springer-Verlag

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold, B. Eckmann and F. Takens

1455

J.-P. Françoise R. Roussarie (Eds.)

Bifurcations of Planar Vector Fields

Proceedings of a Meeting held in Luminy, France, Sept. 18–22, 1989

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York London
Paris Tokyo Hong Kong Barcelona

Editors

Jean-Pierre Françoise
Université de Paris VI
U.F.R. 920, Mathématiques
45–46, 5ème étage
4 Place Jussieu
75252 Paris, France

Robert Roussarie
Université de Bourgogne
Laboratoire de Topologie
U.F.R. Sciences et Techniques
Bât. Mirande, BP 138
21004 Dijon, France

Mathematics Subject Classification (1980): 34CXX, 58F14, 32C05

ISBN 3-540-53509-8 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York
ISBN 0-387-53509-8 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Printing and binding: Druckhaus Beltz, Hemsbach/Bergstr
2146/3140-543210 – Printed on acid-free paper

Lecture Notes in Mathematics

For information about Vols. 1–1232 please contact your bookseller or Springer-Verlag

Vol. 1233: Stability Problems for Stochastic Models. Proceedings, 1985. Edited by V.V. Kalashnikov, B. Penkov and V.M. Zolotarev. VI, 223 pages. 1986.

Vol. 1234: Combinatoire énumérative. Proceedings, 1985. Edité par G. Labelle et P. Leroux. XIV, 387 pages. 1986.

Vol. 1235: Séminaire de Théorie du Potentiel, Paris, No. 8. Directeurs: M. Brelot, G. Choquet et J. Deny. Rédacteurs: F. Hirsch et G. Mokobodzki. III, 209 pages. 1987.

Vol. 1236: Stochastic Partial Differential Equations and Applications. Proceedings, 1985. Edited by G. Da Prato and L. Tubaro. V, 257 pages. 1987.

Vol. 1237: Rational Approximation and its Applications in Mathematics and Physics. Proceedings, 1985. Edited by J. Gilewicz, M. Pindor and W. Siemaszko. XII, 350 pages. 1987.

Vol. 1238: M. Holz, K.-P. Podewski and K. Steffens, Injective Choice Functions. VI, 183 pages. 1987.

Vol. 1239: P. Vojta, Diophantine Approximations and Value Distribution Theory. X, 132 pages. 1987.

Vol. 1240: Number Theory, New York 1984–85. Seminar. Edited by D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn and M.B. Nathanson. V, 324 pages. 1987.

Vol. 1241: L. Gårding, Singularities in Linear Wave Propagation. III, 125 pages. 1987.

Vol. 1242: Functional Analysis II, with Contributions by J. Hoffmann-Jørgensen et al. Edited by S. Kurepa, H. Kraljević and D. Butković. VII, 432 pages. 1987.

Vol. 1243: Non Commutative Harmonic Analysis and Lie Groups. Proceedings, 1985. Edited by J. Carmona, P. Delorme and M. Vergne. V, 309 pages. 1987.

Vol. 1244: W. Müller, Manifolds with Cusps of Rank One. XI, 158 pages. 1987.

Vol. 1245: S. Rallis, L-Functions and the Oscillator Representation. XVI, 239 pages. 1987.

Vol. 1246: Hodge Theory. Proceedings, 1985. Edited by E. Cattani, F. Guillén, A. Kaplan and F. Puerta. VII, 175 pages. 1987.

Vol. 1247: Séminaire de Probabilités XXI. Proceedings. Edité par J. Azéma, P.A. Meyer et M. Yor. IV, 579 pages. 1987.

Vol. 1248: Nonlinear Semigroups, Partial Differential Equations and Attractors. Proceedings, 1985. Edited by T.L. Gill and W.W. Zachary. IX, 185 pages. 1987.

Vol. 1249: I. van den Berg, Nonstandard Asymptotic Analysis. IX, 187 pages. 1987.

Vol. 1250: Stochastic Processes – Mathematics and Physics II. Proceedings 1985. Edited by S. Albeverio, Ph. Blanchard and L. Streit. VI, 359 pages. 1987.

Vol. 1251: Differential Geometric Methods in Mathematical Physics. Proceedings, 1985. Edited by P.L. García and A. Pérez-Rendón. VII, 300 pages. 1987.

Vol. 1252: T. Kaise, Représentations de Weil et GL_2 Algèbres de division et GL_n. VII, 203 pages. 1987.

Vol. 1253: J. Fischer, An Approach to the Selberg Trace Formula via the Selberg Zeta-Function. III, 184 pages. 1987.

Vol. 1254: S. Gelbart, I. Piatetski-Shapiro, S. Rallis. Explicit Constructions of Automorphic L-Functions. VI, 152 pages. 1987.

Vol. 1255: Differential Geometry and Differential Equations. Proceedings, 1985. Edited by C. Gu, M. Berger and R.L. Bryant. XII, 243 pages. 1987.

Vol. 1256: Pseudo-Differential Operators. Proceedings, 1986. Edited by H.O. Cordes, B. Gramsch and H. Widom. X, 479 pages. 1987.

Vol. 1257: X. Wang, On the C*-Algebras of Foliations in the Plane. V, 165 pages. 1987.

Vol. 1258: J. Weidmann, Spectral Theory of Ordinary Differential Operators. VI, 303 pages. 1987.

Vol. 1259: F. Cano Torres, Desingularization Strategies for Three-Dimensional Vector Fields. IX, 189 pages. 1987.

Vol. 1260: N.H. Pavel, Nonlinear Evolution Operators and Semigroups. VI, 285 pages. 1987.

Vol. 1261: H. Abels, Finite Presentability of S-Arithmetic Groups. Compact Presentability of Solvable Groups. VI, 178 pages. 1987.

Vol. 1262: E. Hlawka (Hrsg.), Zahlentheoretische Analysis II. Seminar, 1984–86. V, 158 Seiten. 1987.

Vol. 1263: V.L. Hansen (Ed.), Differential Geometry. Proceedings, 1985. XI, 288 pages. 1987.

Vol. 1264: Wu Wen-tsün, Rational Homotopy Type. VIII, 219 pages. 1987.

Vol. 1265: W. Van Assche, Asymptotics for Orthogonal Polynomials. VI, 201 pages. 1987.

Vol. 1266: F. Ghione, C. Peskine, E. Sernesi (Eds.), Space Curves. Proceedings, 1985. VI, 272 pages. 1987.

Vol. 1267: J. Lindenstrauss, V.D. Milman (Eds.), Geometrical Aspects of Functional Analysis. Seminar. VII, 212 pages. 1987.

Vol. 1268: S.G. Krantz (Ed.), Complex Analysis. Seminar, 1986. VII, 195 pages. 1987.

Vol. 1269: M. Shiota, Nash Manifolds. VI, 223 pages. 1987.

Vol. 1270: C. Carasso, P.-A. Raviart, D. Serre (Eds.), Nonlinear Hyperbolic Problems. Proceedings, 1986. XV, 341 pages. 1987.

Vol. 1271: A.M. Cohen, W.H. Hesselink, W.L.J. van der Kallen, J.R. Strooker (Eds.), Algebraic Groups Utrecht 1986. Proceedings. XII, 284 pages. 1987.

Vol. 1272: M.S. Livšic, L.L. Waksman, Commuting Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space. III, 115 pages. 1987.

Vol. 1273: G.-M. Greuel, G. Trautmann (Eds.), Singularities, Representation of Algebras, and Vector Bundles. Proceedings, 1985. XIV, 383 pages. 1987.

Vol. 1274: N. C. Phillips, Equivariant K-Theory and Freeness of Group Actions on C*-Algebras. VIII, 371 pages. 1987.

Vol. 1275: C.A. Berenstein (Ed.), Complex Analysis I. Proceedings, 1985–86. XV, 331 pages. 1987.

Vol. 1276: C.A. Berenstein (Ed.), Complex Analysis II. Proceedings, 1985–86. IX, 320 pages. 1987.

Vol. 1277: C.A. Berenstein (Ed.), Complex Analysis III. Proceedings, 1985–86. X, 350 pages. 1987.

Vol. 1278: S.S. Koh (Ed.), Invariant Theory. Proceedings, 1985. V, 102 pages. 1987.

Vol. 1279: D. Ieşan, Saint-Venant's Problem. VIII, 162 Seiten. 1987.

Vol. 1280: E. Neher, Jordan Triple Systems by the Grid Approach. XII, 193 pages. 1987.

Vol. 1281: O.H. Kegel, F. Menegazzo, G. Zacher (Eds.), Group Theory. Proceedings, 1986. VII, 179 pages. 1987.

Vol. 1282: D.E. Handelman, Positive Polynomials, Convex Integral Polytopes, and a Random Walk Problem. XI, 136 pages. 1987.

Vol. 1283: S. Mardešić, J. Segal (Eds.), Geometric Topology and Shape Theory. Proceedings, 1986. V, 261 pages. 1987.

Vol. 1284: B.H. Matzat, Konstruktive Galoistheorie. X, 286 pages. 1987.

Vol. 1285: I.W. Knowles, Y. Saitō (Eds.), Differential Equations and Mathematical Physics. Proceedings, 1986. XVI, 499 pages. 1987.

Vol. 1286: H.R. Miller, D.C. Ravenel (Eds.), Algebraic Topology. Proceedings, 1986. VII, 341 pages. 1987.

Vol. 1287: E.B. Saff (Ed.), Approximation Theory, Tampa. Proceedings, 1985–1986. V, 228 pages. 1987.

Vol. 1288: Yu. L. Rodin, Generalized Analytic Functions on Riemann Surfaces. V, 128 pages, 1987.

Vol. 1289: Yu. I. Manin (Ed.), K-Theory, Arithmetic and Geometry. Seminar, 1984–1986. V, 399 pages. 1987.

PREFACE

The meetin[redacted]d in Luminy in September 18-22, 1988 brought together most of the world's specialists in bifurcations of vector fields of the plane. The main subjects of the theory were discussed, including:

- Finiteness of the number of limit cycles of ordinary differential equations in the plane. The problem of Dulac is that of determining whether polynomial vector fields have a finite number of limit cycles. One solution is presented in this volume in the framework of new and much farther-reaching methods for the study of differential equations, such as accelero-summation.
- Multiplicity of polycycles. Their definition seems to be a first step towards the solution of Hilbert's 16th problem produced to prove the existence of a uniform bound, dependent only on degree, for the number of limit cycles.
- Zeroes of abelian integrals. This is a topic which links up directly to real algebraic geometry. It intervenes in an infinitesimal version of Hilbert's 16th problem, and also in the question of enumeration of critical points of the period for which is important in the study of bifurcations.
- Numerical simulation and symbolic computation on computer in the study of differential equations.
- The work (in particular of Chinese groups of researchers) on quadratic equations, that pick up again classical methods of bifurcation theory such as the method of rotations.
- Modelling of predator-prey ecological systems. The subject is in widespread use in biomathematics to describe biological cycles.
- The use of methods of non-standard analysis in the study of bifurcation with delay.

The articles in this volume will initiate the reader quickly to the most recent result in this field at the interface of fundamental mathematics and of its applications, currently in full development.

We enjoyed the support of the Centre National de la Recherche Scientifique, of the Ministère des Affaires Etrangères (Direction Générale des relations culturelles, scientifiques et techniques), of the Société Mathématique de France through the intermediary of the Centre International de Rencontre Mathématiques at Luminy, of the Union des Assurances de Paris and of the Université de Bourgogne.

We are grateful to Miss Courtial and Mrs. Gadenne for their assistance in the preparation of the manuscripts.

We thank Springer-Verlag for the care and competence shown in the publication of these proceedings.

Vol. 1290: G. Wüstholz (Ed.), Diophantine Approximation and Transcendence Theory. Seminar, 1985. V, 243 pages. 1987.

Vol. 1291: C. Mœglin, M.-F. Vignéras, J.-L. Waldspurger, Correspondances de Howe sur un Corps p-adique. VII, 163 pages. 1987

Vol. 1292: J.T. Baldwin (Ed.), Classification Theory. Proceedings, 1985. VI, 500 pages. 1987.

Vol. 1293: W. Ebeling, The Monodromy Groups of Isolated Singularities of Complete Intersections. XIV, 153 pages. 1987.

Vol. 1294: M. Queffélec, Substitution Dynamical Systems – Spectral Analysis. XIII, 240 pages. 1987.

Vol. 1295: P. Lelong, P. Dolbeault, H. Skoda (Réd.), Séminaire d'Analyse P. Lelong – P. Dolbeault – H. Skoda. Seminar, 1985/1986. VII, 283 pages. 1987.

Vol. 1296: M.-P. Malliavin (Ed.), Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paule Malliavin. Proceedings, 1986. IV, 324 pages. 1987.

Vol. 1297: Zhu Y.-l., Guo B.-y. (Eds.), Numerical Methods for Partial Differential Equations. Proceedings. XI, 244 pages. 1987.

Vol. 1298: J. Aguadé, R. Kane (Eds.), Algebraic Topology, Barcelona 1986. Proceedings. X, 255 pages. 1987.

Vol. 1299: S. Watanabe, Yu.V. Prokhorov (Eds.), Probability Theory and Mathematical Statistics. Proceedings, 1986. VIII, 589 pages. 1988.

Vol. 1300: G.B. Seligman, Constructions of Lie Algebras and their Modules. VI, 190 pages. 1988.

Vol. 1301: N. Schappacher, Periods of Hecke Characters. XV, 160 pages. 1988.

Vol. 1302: M. Cwikel, J. Peetre, Y. Sagher, H. Wallin (Eds.), Function Spaces and Applications. Proceedings, 1986. VI, 445 pages. 1988.

Vol. 1303: L. Accardi, W. von Waldenfels (Eds.), Quantum Probability and Applications III. Proceedings, 1987. VI, 373 pages. 1988.

Vol. 1304: F.Q. Gouvêa, Arithmetic of p-adic Modular Forms. VIII, 121 pages. 1988.

Vol. 1305: D.S. Lubinsky, E.B. Saff, Strong Asymptotics for Extremal Polynomials Associated with Weights on $\mathbb{R}$. VII, 153 pages. 1988.

Vol. 1306: S.S. Chern (Ed.), Partial Differential Equations. Proceedings, 1986. VI, 294 pages. 1988.

Vol. 1307: T. Murai, A Real Variable Method for the Cauchy Transform, and Analytic Capacity. VIII, 133 pages. 1988.

Vol. 1308: P. Imkeller, Two-Parameter Martingales and Their Quadratic Variation. IV, 177 pages. 1988.

Vol. 1309: B. Fiedler, Global Bifurcation of Periodic Solutions with Symmetry. VIII, 144 pages. 1988.

Vol. 1310: O.A. Laudal, G. Pfister, Local Moduli and Singularities. V, 117 pages. 1988.

Vol. 1311: A. Holme, R. Speiser (Eds.), Algebraic Geometry, Sundance 1986. Proceedings. VI, 320 pages. 1988.

Vol. 1312: N.A. Shirokov, Analytic Functions Smooth up to the Boundary. III, 213 pages. 1988.

Vol. 1313: F. Colonius, Optimal Periodic Control. VI, 177 pages. 1988.

Vol. 1314: A. Futaki, Kähler-Einstein Metrics and Integral Invariants. IV, 140 pages. 1988.

Vol. 1315: R.A. McCoy, I. Ntantu, Topological Properties of Spaces of Continuous Functions. IV, 124 pages. 1988.

Vol. 1316: H. Korezlioglu, A.S. Ustunel (Eds.), Stochastic Analysis and Related Topics. Proceedings, 1986. V, 371 pages. 1988.

Vol. 1317: J. Lindenstrauss, V.D. Milman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Seminar, 1986–87. VII, 289 pages. 1988.

Vol. 1318: Y. Felix (Ed.), Algebraic Topology – Rational Homotopy. Proceedings, 1986. VIII, 245 pages. 1988

Vol. 1319: M. Vuorinen, Conformal Geometry and Quasiregular Mappings. XIX, 209 pages. 1988.

Vol. 1320: H. Jürgensen, G. Lallement, H.J. Weinert (Eds.), Semigroups, Theory and Applications. Proceedings, 1986. X, 416 pages. 1988.

Vol. 1321: J. Azéma, P.A. Meyer, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXII. Proceedings. IV, 600 pages. 1988.

Vol. 1322: M. Métivier, S. Watanabe (Eds.), Stochastic Analysis. Proceedings, 1987. VII, 197 pages. 1988.

Vol. 1323: D.R. Anderson, H.J. Munkholm, Boundedly Controlled Topology. XII, 309 pages. 1988.

Vol. 1324: F. Cardoso, D.G. de Figueiredo, R. Iório, O. Lopes (Eds.), Partial Differential Equations. Proceedings, 1986. VIII, 433 pages. 1988.

Vol. 1325: A. Truman, I.M. Davies (Eds.), Stochastic Mechanics and Stochastic Processes. Proceedings, 1986. V, 220 pages. 1988.

Vol. 1326: P.S. Landweber (Ed.), Elliptic Curves and Modular Forms in Algebraic Topology. Proceedings, 1986. V, 224 pages. 1988.

Vol. 1327: W. Bruns, U. Vetter, Determinantal Rings. VII,236 pages. 1988.

Vol. 1328: J.L. Bueso, P. Jara, B. Torrecillas (Eds.), Ring Theory. Proceedings, 1986. IX, 331 pages. 1988.

Vol. 1329: M. Alfaro, J.S. Dehesa, F.J. Marcellan, J.L. Rubio de Francia, J. Vinuesa (Eds.): Orthogonal Polynomials and their Applications. Proceedings, 1986. XV, 334 pages. 1988.

Vol. 1330: A. Ambrosetti, F. Gori, R. Lucchetti (Eds.), Mathematical Economics. Montecatini Terme 1986. Seminar. VII, 137 pages. 1988.

Vol. 1331: R. Bamón, R. Labarca, J. Palis Jr. (Eds.), Dynamical Systems, Valparaiso 1986. Proceedings. VI, 250 pages. 1988.

Vol. 1332: E. Odell, H. Rosenthal (Eds.), Functional Analysis. Proceedings, 1986–87. V, 202 pages. 1988.

Vol. 1333: A.S. Kechris, D.A. Martin, J.R. Steel (Eds.), Cabal Seminar 81–85. Proceedings, 1981–85. V, 224 pages. 1988.

Vol. 1334: Yu.G. Borisovich, Yu. E. Gliklikh (Eds.), Global Analysis – Studies and Applications III. V, 331 pages. 1988.

Vol. 1335: F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual-Gainza, F. Puerta, Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique. XII, 192 pages. 1988.

Vol. 1336: B. Helffer, Semi-Classical Analysis for the Schrödinger Operator and Applications. V, 107 pages. 1988.

Vol. 1337: E. Sernesi (Ed.), Theory of Moduli. Seminar, 1985. VIII, 232 pages. 1988.

Vol. 1338: A.B. Mingarelli, S.G. Halvorsen, Non-Oscillation Domains of Differential Equations with Two Parameters. XI, 109 pages. 1988.

Vol. 1339: T. Sunada (Ed.), Geometry and Analysis of Manifolds. Procedings, 1987. IX, 277 pages. 1988.

Vol. 1340: S. Hildebrandt, D.S. Kinderlehrer, M. Miranda (Eds.), Calculus of Variations and Partial Differential Equations. Proceedings, 1986. IX, 301 pages. 1988.

Vol. 1341: M. Dauge, Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains. VIII, 259 pages. 1988.

Vol. 1342: J.C. Alexander (Ed.), Dynamical Systems. Proceedings, 1986–87. VIII, 726 pages. 1988.

Vol. 1343: H. Ulrich, Fixed Point Theory of Parametrized Equivariant Maps. VII, 147 pages. 1988.

Vol. 1344: J. Král, J. Lukeš, J. Netuka, J. Veselý (Eds.), Potential Theory – Surveys and Problems. Proceedings, 1987. VIII, 271 pages. 1988.

Vol. 1345: X. Gomez-Mont, J. Seade, A. Verjovski (Eds.), Holomorphic Dynamics. Proceedings, 1986. VII, 321 pages. 1988.

Vol. 1346: O. Ya. Viro (Ed.), Topology and Geometry – Rohlin Seminar. XI, 581 pages. 1988.

Vol. 1347: C. Preston, Iterates of Piecewise Monotone Mappings on an Interval. V, 166 pages. 1988.

Vol. 1348: F. Borceux (Ed.), Categorical Algebra and its Applications. Proceedings, 1987. VIII, 375 pages. 1988.

Vol. 1349: E. Novak, Deterministic and Stochastic Error Bounds in Numerical Analysis. V, 113 pages. 1988.

Vol. 1350: U. Koschorke (Ed.), Differential Topology. Proceedings, 1987. VI, 269 pages. 1988.

Vol. 1351: I. Laine, S. Rickman, T. Sorvali, (Eds.), Complex Analysis, Joensuu 1987. Proceedings. XV, 378 pages. 1988.

Vol. 1352: L.L. Avramov, K.B. Tchakerian (Eds.), Algebra – Some Current Trends. Proceedings, 1986. IX, 240 Seiten. 1988.

Vol. 1353: R.S. Palais, Ch.-l. Terng, Critical Point Theory and Submanifold Geometry. X, 272 pages. 1988.

Vol. 1354: A. Gómez, F. Guerra, M.A. Jiménez, G. López (Eds.), Approximation and Optimization. Proceedings, 1987. VI, 280 pages. 1988.

Vol. 1355: J. Bokowski, B. Sturmfels, Computational Synthetic Geometry. V, 168 pages. 1989.

Vol. 1356: H. Volkmer, Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems. VI, 157 pages. 1988.

Vol. 1357: S. Hildebrandt, R. Leis (Eds.), Partial Differential Equations and Calculus of Variations. VI, 423 pages. 1988.

Vol. 1358: D. Mumford, The Red Book of Varieties and Schemes. V, 309 pages. 1988.

Vol. 1359: P. Eymard, J.-P. Pier (Eds.), Harmonic Analysis. Proceedings, 1987. VIII, 287 pages. 1988.

Vol. 1360: G. Anderson, C. Greengard (Eds.), Vortex Methods. Proceedings, 1987. V, 141 pages. 1988.

Vol. 1361: T. tom Dieck (Ed.), Algebraic Topology and Transformation Groups. Proceedings, 1987. VI, 298 pages. 1988.

Vol. 1362: P. Diaconis, D. Elworthy, H. Föllmer, E. Nelson, G.C. Papanicolaou, S.R.S. Varadhan. École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XV–XVII, 1985–87. Editor: P.L. Hennequin. V, 459 pages. 1988.

Vol. 1363: P.G. Casazza, T.J. Shura. Tsirelson's Space. VIII, 204 pages. 1988.

Vol. 1364: R.R. Phelps, Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability. IX, 115 pages. 1989.

Vol. 1365: M. Giaquinta (Ed.), Topics in Calculus of Variations. Seminar, 1987. X, 196 pages. 1989.

Vol. 1366: N. Levitt, Grassmannians and Gauss Maps in PL-Topology. V, 203 pages. 1989.

Vol. 1367: M. Knebusch, Weakly Semialgebraic Spaces. XX, 376 pages. 1989.

Vol. 1368: R. Hübl, Traces of Differential Forms and Hochschild Homology. III, 111 pages. 1989.

Vol. 1369: B. Jiang, Ch.-K. Peng, Z. Hou (Eds.), Differential Geometry and Topology. Proceedings, 1986–87. VI, 366 pages. 1989.

Vol. 1370: G. Carlsson, R.L. Cohen, H.R. Miller, D.C. Ravenel (Eds.), Algebraic Topology. Proceedings, 1986. IX, 456 pages. 1989.

Vol. 1371: S. Glaz, Commutative Coherent Rings. XI, 347 pages. 1989.

Vol. 1372: J. Azéma, P.A. Meyer, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXIII. Proceedings. IV, 583 pages. 1989.

Vol. 1373: G. Benkart, J.M. Osborn (Eds.), Lie Algebras, Madison 1987. Proceedings. V, 145 pages. 1989.

Vol. 1374: R.C. Kirby, The Topology of 4-Manifolds. VI, 108 pages. 1989.

Vol. 1375: K. Kawakubo (Ed.), Transformation Groups. Proceedings, 1987. VIII, 394 pages, 1989.

Vol. 1376: J. Lindenstrauss, V.D. Milman (Eds.), Geometric Aspects of Functional Analysis. Seminar (GAFA) 1987–88. VII, 288 pages. 1989.

Vol. 1377: J.F. Pierce, Singularity Theory, Rod Theory, and Symmetry-Breaking Loads. IV, 177 pages. 1989.

Vol. 1378: R.S. Rumely, Capacity Theory on Algebraic Curves. III, 437 pages. 1989.

Vol. 1379: H. Heyer (Ed.), Probability Measures on Groups IX. Proceedings, 1988. VIII, 437 pages. 1989

Vol. 1380: H.P. Schlickewei, E. Wirsing (Eds.), Number Theory, Ulm 1987. Proceedings. V, 266 pages. 1989.

Vol. 1381: J.-O. Strömberg, A. Torchinsky. Weighted Hardy Spaces. V, 193 pages. 1989.

Vol. 1382: H. Reiter, Metaplectic Groups and Segal Algebras. XI, 128 pages. 1989.

Vol. 1383: D.V. Chudnovsky, G.V. Chudnovsky, H. Cohn, M.B. Nathanson (Eds.), Number Theory, New York 1985–88. Seminar. V, 256 pages. 1989.

Vol. 1384: J. Garcia-Cuerva (Ed.), Harmonic Analysis and Partial Differential Equations. Proceedings, 1987. VII, 213 pages. 1989.

Vol. 1385: A.M. Anile, Y. Choquet-Bruhat (Eds.), Relativistic Fluid Dynamics. Seminar, 1987. V, 308 pages. 1989.

Vol. 1386: A. Bellen, C.W. Gear, E. Russo (Eds.), Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. Proceedings, 1987. VII, 136 pages. 1989.

Vol. 1387: M. Petković, Iterative Methods for Simultaneous Inclusion of Polynomial Zeros. X, 263 pages. 1989.

Vol. 1388: J. Shinoda, T.A. Slaman, T. Tugué (Eds.), Mathematical Logic and Applications. Proceedings, 1987. V, 223 pages. 1989.

Vol. 1000: Second Edition. H. Hopf, Differential Geometry in the Large. VII, 184 pages. 1989.

Vol. 1389: E. Ballico, C. Ciliberto (Eds.), Algebraic Curves and Projective Geometry. Proceedings, 1988. V, 288 pages. 1989.

Vol. 1390: G. Da Prato, L. Tubaro (Eds.), Stochastic Partial Differential Equations and Applications II. Proceedings, 1988. VI, 258 pages. 1989.

Vol. 1391: S. Cambanis, A. Weron (Eds.), Probability Theory on Vector Spaces IV. Proceedings, 1987. VIII, 424 pages. 1989.

Vol. 1392: R. Silhol, Real Algebraic Surfaces. X, 215 pages. 1989.

Vol. 1393: N. Bouleau, D. Feyel, F. Hirsch, G. Mokobodzki (Eds.), Séminaire de Théorie du Potentiel Paris, No. 9. Proceedings. VI, 265 pages. 1989.

Vol. 1394: T.L. Gill, W.W. Zachary (Eds.), Nonlinear Semigroups, Partial Differential Equations and Attractors. Proceedings, 1987. IX, 233 pages. 1989.

Vol. 1395: K. Alladi (Ed.), Number Theory, Madras 1987. Proceedings. VII, 234 pages. 1989.

Vol. 1396: L. Accardi, W. von Waldenfels (Eds.), Quantum Probability and Applications IV. Proceedings, 1987. VI, 355 pages. 1989.

Vol. 1397: P.R. Turner (Ed.), Numerical Analysis and Parallel Processing. Seminar, 1987. VI, 264 pages. 1989.

Vol. 1398: A.C. Kim, B.H. Neumann (Eds.), Groups – Korea 1988. Proceedings. V, 189 pages. 1989.

Vol. 1399: W.-P. Barth, H. Lange (Eds.), Arithmetic of Complex Manifolds. Proceedings, 1988. V, 171 pages. 1989.

Vol. 1400: U. Jannsen. Mixed Motives and Algebraic K-Theory. XIII, 246 pages. 1990.

Vol. 1401: J. Steprāns, S. Watson (Eds.), Set Theory and its Applications. Proceedings, 1987. V, 227 pages. 1989.

Vol. 1402: C. Carasso, P. Charrier, B. Hanouzet, J.-L. Joly (Eds.), Nonlinear Hyperbolic Problems. Proceedings, 1988. V, 249 pages. 1989.

Vol. 1403: B. Simeone (Ed.), Combinatorial Optimization. Seminar, 1986. V, 314 pages. 1989.

Vol. 1404: M.-P. Malliavin (Ed.), Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin. Proceedings, 1987 – 1988. IV, 410 pages. 1989.

Vol. 1405: S. Dolecki (Ed.), Optimization. Proceedings, 1988. V, 223 pages. 1989.

Vol. 1406: L. Jacobsen (Ed.), Analytic Theory of Continued Fractions III. Proceedings, 1988. VI, 142 pages. 1989.

Vol. 1407: W. Pohlers, Proof Theory. VI, 213 pages. 1989.

Vol. 1408: W. Lück, Transformation Groups and Algebraic K-Theory. XII, 443 pages. 1989.

Vol. 1409: E. Hairer, Ch. Lubich, M. Roche. The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods. VII, 139 pages. 1989.

Vol. 1410: F.J. Carreras, O. Gil-Medrano, A.M. Naveira (Eds.), Differential Geometry. Proceedings, 1988. V, 308 pages. 1989.

Vol. 1411: B. Jiang (Ed.), Topological Fixed Point Theory and Applications. Proceedings, 1988. VI, 203 pages. 1989.

Vol. 1412: V. V. Kalashnikov, V. M. Zolotarev (Eds.), Stability Problems for Stochastic Models. Proceedings, 1987. X, 380 pages. 1989.

Vol. 1413: S. Wright, Uniqueness of the Injective III_1 Factor. III, 108 pages. 1989.

Vol. 1414: E. Ramírez de Arellano (Ed.), Algebraic Geometry and Complex Analysis. Proceedings, 1987. VI, 180 pages. 1989.

Vol. 1415: M. Langevin, M. Waldschmidt (Eds.), Cinquante Ans de Polynômes. Fifty Years of Polynomials. Proceedings, 1988. IX, 235 pages. 1990.

Vol. 1416: C. Albert (Ed.), Géométrie Symplectique et Mécanique. Proceedings, 1988. V, 289 pages. 1990.

Vol. 1417: A. J. Sommese, A. Biancofiore, E. L. Livorni (Eds.), Algebraic Geometry. Proceedings, 1988. V, 320 pages. 1990.

Vol. 1418: M. Mimura (Ed.), Homotopy Theory and Related Topics. Proceedings, 1988. V, 241 pages. 1990.

Vol. 1419: P. S. Bullen, P. Y. Lee, J. L. Mawhin, P. Muldowney, W. F. Pfeffer (Eds.), New Integrals. Proceedings, 1988. V, 202 pages. 1990.

Vol. 1420: M. Galbiati, A. Tognoli (Eds.), Real Analytic Geometry. Proceedings, 1988. IV, 366 pages. 1990.

Vol. 1421: H. A. Biagioni, A Nonlinear Theory of Generalized Functions. XII, 214 pages. 1990.

Vol. 1422: V. Villani (Ed.), Complex Geometry and Analysis. Proceedings, 1988. V, 109 pages. 1990.

Vol. 1423: S. O. Kochman, Stable Homotopy Groups of Spheres: A Computer-Assisted Approach. VIII, 330 pages. 1990.

Vol. 1424: F. E. Burstall, J. H. Rawnsley, Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces. III, 112 pages. 1990.

Vol. 1425: R.A. Piccinini (Ed.), Groups of Self-Equivalences and Related Topics. Proceedings, 1988. V, 214 pages. 1990.

Vol. 1426: J. Azéma, P. A. Meyer, M. Yor (Eds.), Séminaire de Probabilités XXIV 1988/89. V, 490 pages. 1990.

Vol. 1427: A. Ancona, D. Geman, N. Ikeda, École d'Eté de Probabilités de Saint Flour XVIII, 1988. Ed.: P. L. Hennequin. VII, 330 pages. 1990.

Vol. 1428: K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras. XV, 312 pages. 1990.

Vol. 1429: S. Homer, A. Nerode, R. A. Platek, G. E. Sacks, A. Scedrov, Logic and Computer Science. Seminar, 1988. Editor: P. Odifreddi. V, 162 pages. 1990.

Vol. 1430: W. Bruns, A. Simis (Eds.), Commutative Algebra. Proceedings, 1988. V, 160 pages. 1990.

Vol. 1431: J. G. Heywood, K. Masuda, R. Rautmann, V. A. Solonnikov (Eds.), The Navier-Stokes Equations – Theory and Numerical Methods. Proceedings, 1988. VII, 238 pages. 1990.

Vol. 1432: K. Ambos-Spies, G. H. Müller, G. E. Sacks (Eds.), Recursion Theory Week. Proceedings, 1989. VI, 393 pages. 1990.

Vol. 1433: S. Lang, W. Cherry, Topics in Nevanlinna Theory. II, 174 pages. 1990.

Vol. 1434: K. Nagasaka, E. Fouvry (Eds.), Analytic Number Theory. Proceedings, 1988. VI, 218 pages. 1990.

Vol. 1435: St. Ruscheweyh, E. B. Saff, L. C. Salinas, R. S. Varga (Eds.), Computational Methods and Function Theory. Proceedings, 1989. VI, 211 pages. 1990.

Vol. 1436: S. Xambó-Descamps (Ed.), Enumerative Geometry. Proceedings, 1987. V, 303 pages. 1990.

Vol. 1437: H. Inassaridze (Ed.), K-theory and Homological Algebra. Seminar, 1987–88. V, 313 pages. 1990.

Vol. 1438: P. G. Lemarié (Ed.), Les Ondelettes en 1989. Seminar. IV, 212 pages. 1990.

Vol. 1439: E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki. Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces: A Combinatorial Approach. XIII, 201 pages. 1990.

Vol. 1440: P. Latiolais (Ed.), Topology and Combinatorial Groups Theory. Seminar, 1985–1988. VI, 207 pages. 1990.

Vol. 1441: M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos. Géométrie et théorie des groupes. X, 165 pages. 1990.

Vol. 1442: L. Accardi, M. von Waldenfels (Eds.), Quantum Probability and Applications V. Proceedings, 1988. VI, 413 pages. 1990.

Vol. 1443: K. H. Dovermann, R. Schultz, Equivariant Surgery Theories and Their Periodicity Properties. VI, 227 pages. 1990.

Vol. 1444: H. Korezlioglu, A. S. Ustunel (Eds.), Stochastic Analysis and Related Topics II. Proceedings, 1988. V, 268 pages. 1990.

Vol. 1445: F. Schulz, Regularity Theory for Quasilinear Elliptic Systems and Monge – Ampère Equations in Two Dimensions. XV, 123 pages. 1990.

Vol. 1446: Methods of Nonconvex Analysis. Seminar, 1989. Editor: A. Cellina. V, 206 pages. 1990.

Vol. 1447: J.-G. Labesse, J. Schwermer (Eds.), Cohomology of Arithmetic Groups and Automorphic Forms. Proceedings, 1989. V, 358 pages. 1990.

Vol. 1448: S. K. Jain, S. R. López-Permouth (Eds.), Non-Commutative Ring Theory. Proceedings, 1989. V, 166 pages. 1990.

Vol. 1449: W. Odyniec, G. Lewicki, Minimal Projections in Banach Spaces. VIII, 168 pages. 1990.

Vol. 1450: H. Fujita, T. Ikebe, S. T. Kuroda (Eds.), Functional-Analytic Methods for Partial Differential Equations. Proceedings, 1989. VII, 252 pages. 1990.

Vol. 1451: L. Alvarez-Gaumé, E. Arbarello, C. De Concini, N. J. Hitchin, Global Geometry and Mathematical Physics. Montecatini Terme 1988. Seminar. Editors: M. Francaviglia, F. Gherardelli. IX, 197 pages. 1990.

Vol. 1452: E. Hlawka, R. F. Tichy (Eds.), Number-Theoretic Analysis. Seminar, 1988–89. V, 220 pages. 1990.

Vol. 1453: Yu. G. Borisovich, Yu. E. Gliklikh (Eds.), Global Analysis – Studies and Applications IV. V, 320 pages. 1990.

Vol. 1454: F. Baldassari, S. Bosch, B. Dwork (Eds.), p-adic Analysis. Proceedings, 1989. V, 382 pages. 1990.

Vol. 1455: J.-P. Françoise, R. Roussarie (Eds.), Bifurcations of Planar Vector Fields. VI, 396 pages. 1990.

LISTE DES ARTICLES

Retard à la bifurcation : du local au global

Bernard Candelpergher
Laboratoire de Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex

Francine Diener
Laboratoire de Mathématiques
Parc Valrose
06034 Nice Cedex

Marc Diener
U.F.R. de Mathématiques
Université Paris 7
75251 Paris Cedex 05

C'est Claude Lobry qui, lors d'un colloque en 1985 [8] avait attiré notre attention sur le phénomène de "retard à la bifurcation" par des expérimentations numériques où il devinait une intervention des canards. Nous abordons ici cette question sur une équation modèle dûe à G. Wallet, où le lien avec la question de sommation de séries divergentes apparait de manière remarquablement élémentaire, et à travers laquelles se profile la confirmation d'une très ancienne conjecture de J–P. Ramis sur le caractère Gevrey des séries intervenant dans diverses études de canards. Nous remercions vivement F. Pham et J. Ecalle pour nous avoir patiemment aidés à découvrir et appliquer les méthodes de sommation.

1 Etude numérique du retard à la bifurcation

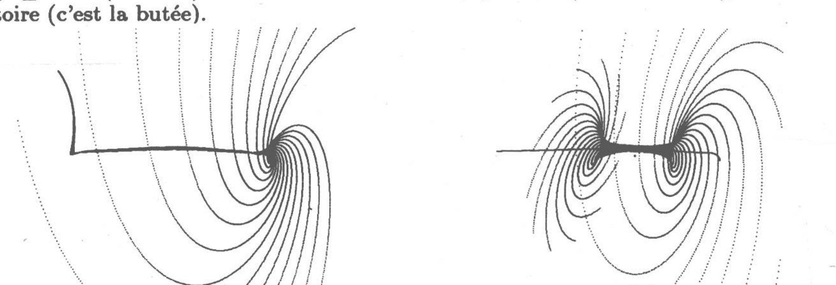
Considérons l'exemple de G. Wallet :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \mu' & = & \varepsilon \\ u_1' & = & \mu u_1 - u_2 + \varepsilon \\ u_2' & = & u_1 + \mu u_2 \end{array}\right. \tag{1}$$

pour $\varepsilon = 0.05$. Le terme de "retard à la bifurcation" est dû à l'écart entre le comportement des trajectoires d'un système tel que (1) et le raisonnement (heuristique et inapproprié) suivant :

Comme ε est petit, on étudie le système (1) pour $\varepsilon = 0$. Dans ce cas $\mu = Cste$ est un simple paramètre, et le système satisfait par $u = (u_1, u_2)$ présente un unique point stationnaire : $(0,0)$. Ce point stationnaire est un foyer stable pour $\mu < 0$ et instable pour $\mu > 0$. On peut penser que, si l'on choisit $\varepsilon = 0.05$, et une condition "initiale" (μ_-, u_-) telle $\mu_- = -1.3$, et $\|u_-\| = 1$ (Fig. 1), μ va croître lentement avec la variable indépendante, disons t ($' \;\; = d/dt$), u va s'enrouler rapidement vers le

Figure 1: **Trajectoires issues de points tels que $\|u\| = 1$, pour $\mu = -1.3$ et divers angles (à gauche), ou divers $\mu \leq -1.3$ (à droite). On observera la sortie en $\mu \approx +1$ (c'est le retard), commune à toutes ces trajectoire (c'est la butée).**



(a) (b)

Figure 2: **(a) Superposition de trajectoires d'un même point pour diverses valeurs petites de $\varepsilon > 0$: les comportements diffèrent appréciablement lors de la déstabilisation, qui a toutefois toujours lieu pour $\mu \approx +1$. (b) La relation entrée-sortie $\mu_+ = -\mu_-$ pour $|\mu_\pm| \ll 1$.**

"point stationnaire" $\left(-\frac{\mu\varepsilon}{1+\mu^2}, \frac{\varepsilon}{1+\mu^2}\right) \approx (0,0)$, tant que $\mu < 0$, puis se dérouler *dès que μ franchira la valeur de bifurcation* $\mu = 0$.

C'est cette dernière affirmation, en italiques, qui est démentie par l'expérience (et la théorie). L'erreur du raisonnement heuristique réside dans le fait que pour obtenir une portion de trajectoire correspondant à une variation appréciable de μ, il convient de faire parcourir à la variable t un intervalle de l'ordre de $1/\varepsilon$: pour le problème envisagé, le système (1) est une fausse perturbation régulière du cas $\varepsilon = 0$: on constate en effet un *retard dans la destabilisation de la solution*, qui ne quitte l'équilibre instable que pour μ voisin de $+1$ (Fig. 1).

Outre ce retard à la bifurcation, nous observons un second phénomène, nouveau à notre connaissance : toutes les trajectoires calculées se déstabilisent ensemble : bien qu'issues de points bien distincts , elles quittent l'équilibre pour une même valeur de μ et sous un même angle. C'est ce retard maximal, ou *butée*, que nous souhaitons également expliquer, d'autant que la valeur $\mu \approx +1$ est insensible au choix de $\varepsilon > 0$ petit. Observons toutefois que l'"angle de sortie" est, lui, sensible au choix de $\varepsilon > 0$ petit (Fig. 2.a).

Nous n'avons envisagé jusqu'ici que le cas de trajectoires telles que $\mu_- \ll -1$. Pour $-1 \ll \mu_- \ll 0$, on observe également un retard, mais celui-ci est modulé par la valeur de μ_- : il y a destabilisation pour $\mu_+ \approx -\mu_-$ (Fig. 2.b), et donc existence d'une fonction entrée-sortie : ceci sera facile à analyser en termes de canards dans le prochain

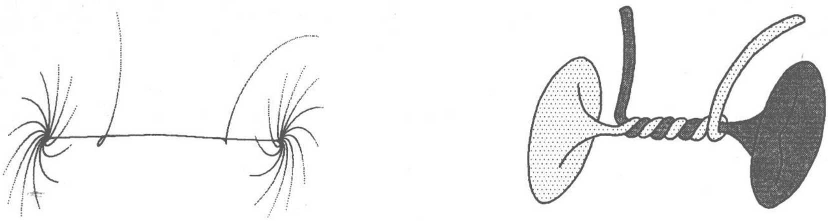


Figure 3: Trajectoires des deux cercles $\mu_\pm = \pm 1.3, \|u_\pm\| = 1$; à gauche le tracé "exact", à droite un schéma topologique.

paragraphe. Sur la figure 3 ont été représentées des trajectoires de points (μ_+, u_+) avec $\mu_+ = +1.3$ et toujours $\|u_+\| = 1$: on trouve une symétrie prévisible. On a également représenté schématiquement les "cylindres", réunion des trajectoires des deux cercles $\mu_\pm = \pm 1.3$, $\|u_\pm)\| = 1$: ils constituent deux "trompettes" enlacées ; ce schéma permet de comprendre qu'il n'y a aucune obstruction $\mathcal{C}^\infty$ pour que la torsade centrale soit de longueur infiniment petite, ce qui suggère le caractère analytique du phénomène de retard, que nous allons étudier maintenant sur un plan plus théorique.

2 Relation avec les canards

Posons dorénavant $x := \mu$ et supposons $\varepsilon > 0$ infinitésimal. Réécrivons le système (1), après changement de temps $t \mapsto \tau = \varepsilon t$, en

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1 \\ \varepsilon \dot{u_1} & = & x u_1 - u_2 + \varepsilon \\ \varepsilon \dot{u_2} & = & u_1 + x u_2 \end{array} \right. \tag{2}$$

où $\dot{} = d/d\tau$. C'est un champ lent-rapide de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R} \times \mathbf{C}$ [5] du type

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & 1 \\ \varepsilon \dot{u} & = & f(x,u) \end{array} \right. \tag{3}$$

dont les images des solutions sont des graphes de solutions de l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x,u) \tag{4}$$

où $u = u_1 + i u_1$, et où f est supposée $\mathcal{C}^1$ (donc analytique en u), et $\mathcal{S}^1$ en u (i.e. f'_u est S-continue). La courbe $\mathcal{L}$ de $\mathbf{R}_x \times \mathbf{C}_u$ d'équation ${}^o f(x,u) = 0$ est appelée la *courbe lente* de (3) ou (4) . Dans l'exemple (2) il s'agit de la droite $u = 0$. Un point standard (x_0, u_0) de $\mathcal{L}$ est dit *attractif* si la partie réelle de ${}^o f'_u(x_0, u_0)$ est strictement négative, et ***répulsif*** si cette même partie réelle est strictement positive. Dans l'exemple (2) les points de la courbe lente tels que $x < 0$ sont attractifs, et ceux tels que $x > 0$ sont répulsifs. On dit qu'une solution $x \mapsto \bar{u}(x)$ de (4) est *lente* sur l'intervalle $I =]x_-, x_+[$ si, pour tout $x \in I$, $f(x, \bar{u}(x)) \simeq 0$, c'est-à-dire si elle reste infiniment voisine de $\mathcal{L}$ sur cet intervalle. Enfin on dit que $\bar{u}$ est un *canard* sur I [2,14], si $\bar{u}$ est lente sur I, et s'il existe un x_0 standard, $x_- \ll x_0 \ll x_+$ tel que ${}^o\bar{u}(x)$ est attractif pour tout $x \ll x_0$ et répulsive pour tout $x \gg x_0$ $(x \in I)$. Si $u_0 = {}^o\bar{u}(x_0)$, on dit encore que $\bar{u}$ est un canard au point (x_0, u_0).

Le phénomène de retard à la bifurcation correspond donc précisément à l'existence de canards. Or cette existence pour des systèmes lents-rapides tels que (3) n'est pas élémentaire. Etablie sur un exemple par Shishkova [12], elle a été prouvée par Neishtadt [9,10], comme nous l'indiquons ci-dessous. Nous y reviendrons au prochain paragraphe. Notons que même pour le cas du système (2), où, en posant toujours $u = u_1 + iu_2$, les (images des) trajectoires satisfont à l'équation

$$\varepsilon \frac{du}{dx} = (x+i)u + \varepsilon \tag{5}$$

et ont donc pour expression

$$u(x) = e^{\frac{(x+i)^2}{2\varepsilon}} \left(K + \int_0^x e^{-\frac{(t+i)^2}{2\varepsilon}} dt \right) \quad , \quad K \in \mathbb{C}$$

il n'est guère plus simple de déduire l'existence de canards de cette quadrature que d'utiliser la sommation des séries divergentes que nous proposons ci-dessous.

Un point des théories existentes des canards s'adapte toutefois ici sans difficultés : c'est le calcul de la *fonction entrée-sortie* [1]. Comme pour toute solution lente, on peut [5] associer à chaque canard de (4) un *point* (standard) *d'entrée dans le halo* de la courbe lente, et un *point de sortie du halo*, caractérisés, dans le cas du système (2), par leur abscisse x_- et x_+ (éventuellement égales à $\pm\infty$). Voici comment sont réliées x_- et x_+ (pour le système (2) on aura $x_- = -x_+$) :

Proposition 2.1 (Fonction entrée-sortie)

On suppose que le système (2) possède un canard dont l'image est le graphe d'une fonction $x \mapsto \bar{u}(x)$ définie pour tout $x \in]a,b[$, a et b standard. Soient $x_-, x_+ \in]a,b[$ standard tels que

$$\int_{x_-}^{x_+} {}^of'_u(x, {}^o\bar{u})dx = 0.$$

Alors toute solution de (4) qui atteint le halo de $\mathcal{L}$ au point d'abscisse x_- en ressort au point d'abscisse x_+.

Preuve : Pour $r = |u|$, considérer la *loupe de Benoit* $R = \varepsilon \log r$. □

Application à l'exemple (1) : Ici ${}^of'_u(x, {}^o\bar{u}) = (x+i)$: la fonction entrée-sortie est une simple symétrie autour de l'origine des abscisses.

Notation : Soit $\varepsilon \neq 0$ infinitésimal. On dira que $\mu \in \mathbb{C}$ est un *ε-exponentiellement petit*, s'il existe $h \in \mathbb{C}$ de partie réelle positive non infinitésimale tel que $\mu = e^{-\left|\frac{h}{\varepsilon}\right|}$ ou si $\mu = 0$. On notera $\mathcal{M}_\varepsilon$ ou simplement $\mathcal{M}$ l'ensemble (externe) des ε-exponentiellement petits.

Proposition 2.2 (Stabilité des canards par microperturbation)

Soient f C^1 et S^1 en u, et l deux fonctions localement lipschitziennes. Supposons que l'équation $\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u)$ admette un canard $x \mapsto \bar{u}(x)$ au point (x_0,u_0) et que pour tout (x,u) infiniment proche du canard on ait $|l(x,u)| \in \mathcal{M}_\varepsilon$. Alors l'équation suivante admet un canard au point (x_0,u_0).

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u) + l(x,u).$$

Preuve : Considérons, pour (x,u) tel que $0 < |u-\bar{u}(x)| < 1$, le revêtement défini par

$$(x,U) = (x, \varepsilon\log(u-\bar{u}(x)))$$

à valeurs sur Re$U < 0$. L'équation $\varepsilon du/dx = f(x,u)$ devient

$$\frac{dU}{dx} = \frac{f(x,u)-f(x,\bar{u}(x))}{u-\bar{u}(x)} + \frac{l(x,u)}{u-\bar{u}(x)}$$

Or, pour Re$U < 0$ appréciable, on a $u = \bar{u}(x) + e^{U/\varepsilon} \simeq \bar{u}(x)$, et donc, comme $f'_u(x,u) \not\simeq 0$, $f(x,u) - f(x,\bar{u}(x)) = f'_u(x,\bar{u}(x))[u-\bar{u}(x)](1+\phi)$, avec $\phi \simeq 0$.

D'autre part, par le principe de Fehrele [6], il existe k réel positif non infiniment petit tel que $|l(x,u)| < e^{-\frac{k}{\varepsilon}}$ pour tout (x,u) infiniment voisin du graphe du canard. Donc, toujours pour Re$U < 0$,

$$\left|\frac{l(x,u)}{u-\bar{u}(x)}\right| = \left|\frac{l(x,u)}{e^{U/\varepsilon}}\right| \leq e^{-\frac{\mathrm{Re}U+k}{\varepsilon}}.$$

Donc, pour $-k \ll \mathrm{Re}U \ll 0$, $\frac{l(x,u)}{u-\bar{u}(x)} \simeq 0$ et finalement

$$\frac{dU}{dx} \simeq f'_u(x,\bar{u}(x))$$

d'où $U(x) \simeq U_0 + \int_{x_0}^{x} f'_u(\xi,\bar{u}(\xi))d\xi$ tant que cette expression garde sa partie réelle comprise entre $-k$ et 0, et non infiniment voisine de ces valeurs, ce qui est assuré sur tout un voisinage standard $[x_-,x_+]$ de x_0 pourvu que l'on choisisse U_0 satisfaisant à ces conditions. En revenant à l'échelle (x,u) initiale, on voit que la solution issue de $u(x_0) := \bar{u}(x_0) + e^{\frac{U_0}{\varepsilon}}$ est, sur $[x_-,x_+]$, le canard cherché. □

Remarque : On notera que l'équation $\varepsilon\frac{du}{dx} = (x+i)u + \varepsilon$ n'est pas une microperturbation (au sens de la proposition (2.2)) de l'équation linéaire $\varepsilon\frac{du}{dx} = (x+i)u$ qui, elle, possède bien un canard évident. La proposition (2.2) ne peut donc pas lui être appliquée. Cependant, le changement d'inconnue $\varepsilon u = u_1 - \frac{\varepsilon}{x+i}$ transforme cette équation en

$$\varepsilon\frac{du_1}{dx} = (x+i)u_1 - \frac{\varepsilon^2}{(x+i)^2}$$

dont le terme perturbatif $-\frac{\varepsilon^2}{(x+i)^2}$ n'est plus d'ordre ε, mais ε^2. Un nouveau changement d'inconnue $\varepsilon u_1 = u_2 + \varepsilon^2/(x+i)^3$ permettrait de diminuer encore l'ordre de grandeur du terme perturbatif. On comprend qu'il est ainsi facile de construire une suite (u_n) de changements de variables de telle sorte que l'équation obtenue après N changements d'inconnue soit une microperturbation de l'équation à canard évident $\varepsilon\frac{du}{dx} = (x+i)u$. Bien entendu, N sera infiniment grand : $N = \frac{1}{\varepsilon}$ par exemple convient. C'est à partir de cette remarque facile à comprendre que Neishtadt est parvenu à montrer l'existence de canards et expliquer le retard à la bifurcation.

J. Martinet a attiré notre attention sur le fait qu'un point de vue Gevrey sur la question permet d'obtenir cette existence des canards de manière très naturelle. C'est l'objet du prochain paragraphe.

3 Le point de vue Gevrey

La difficulté dans la preuve du théorème de Neishtadt réside dans le fait que, très généralement, la suite des changements d'inconnue mentionnée conduit à une série divergente, et sa preuve a consisté à maîtriser par des majorations la somme des $\frac{1}{\varepsilon}$ premiers termes de cette série. Le fait que cela soit possible peut se comprendre, dans le cas analytique, par les propriétés du développement des solutions lentes au voisinage d'un point (x_0, u_0) où $\Re(f'_u)(x_0, u_0)$ est inversible : un tel développement est en effet Gevrey (d'ordre 1). Il est donc naturel d'appliquer des méthodes de sommation qui sont bien adaptées à une telle situation et d'obtenir une preuve par aveu spontané ...

Theorème 3.1 *Soit F : $\mathbf{R}\times\mathbf{C}\times\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$, $(x,u,\varepsilon) \mapsto F(x,u,\varepsilon)$, une fonction standard, analytique au voisinage d'un point standard $(x_0,u_0,0)$ tel que $F(x_0,u_0,0) = 0$. On considère la situation où la partie réelle de $F'_u(x,u_0,0)$ est du signe de $x - x_0$, et on suppose que la partie imaginaire $\omega(x_0)$ de $F'_u(x_0,u_0,0)$ est non nulle. Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal, et posons $f(x,u) := F(x,u,\varepsilon)$. Il existe $R \gg 0$ et une solution $\bar{u}$ de*

$$\varepsilon\frac{du}{dx} = f(x,u) \tag{6}$$

définie pour tout $|x - x_0| < R$, telle que $\bar{u}(x_0) \simeq u_0$ et $f(x, \bar{u}(x)) \simeq 0$ pour tout $|x - x_0| < R$.

Rappelons qu'un développement $\hat{u} = \sum_{p\geq 0} \hat{u}_p \varepsilon^{p+1}$, où les $\hat{u}_p$ appartiennent à une algèbre normée (ici les fonctions analytiques définies sur un voisinage de x_0 munies de la norme uniforme), est dit *Gevrey d'ordre k* (ici $k = 1$) si et seulement s'il existe des réels C et M tels que pour tout $p \geq 0$ on ait $|\hat{u}_p| \leq CM^p(p\,!)^k$ [11]. Une fonction $\tilde{u}(x,\varepsilon)$ définie pour $x \in I =]x_-, x_+[$ pour ε dans un secteur de sommet 0 (et, ici, contenant le demi-axe réel positif) est appelée une *solution-Gevrey* de $\varepsilon\frac{du}{dx} = F(x,u,\varepsilon)$ si $\tilde{\mu}(x,\varepsilon) := \varepsilon\frac{d\tilde{u}(x,\varepsilon)}{dx} - F(x,\tilde{u}(x,\varepsilon),\varepsilon)$ est *exponentiellement petite*, c'est-à-dire que pour elle et chacune de ses dérivées $\tilde{\mu}^{(n)}$ par rapport à x, il existe des constantes $h > 0$ et K telles que $\tilde{\mu}^{(n)}(x,\varepsilon) \leq Ke^{-h/\varepsilon}$. Supposons F standard et soit $\varepsilon > 0$ infiniment petit. Posons $\tilde{u}(x) = \tilde{u}(x,\varepsilon)$. On dira que la fonction $\tilde{u}$ est un *canard-Gevrey* au point standard

(x_0, u_0), $x_- \ll x_0 \ll x_+$ et $\tilde{u}(x_0) \simeq u_0$, si, de plus, la partie réelle de $F'_u(x, u_0, 0)$ est du signe de $x - x_0$ et $f(x, \tilde{u}(x)) \simeq 0$.

Preuve : Quitte à procéder au changement d'inconnue $v = u - \hat{u}_{-1}$ où $\hat{u}_{-1}$ est la fonction implicite locale definie par $F(x, \hat{u}_{-1}(x), 0) = 0$ telle que $\hat{u}_{-1}(x_0) = u_0$, on peut supposer que $F(x, u_0, 0) = 0$ pour tout x dans un voisinage de x_0, puisque $F'_u(x_0, u_0, 0)$ est inversible ($\omega(x_0) \neq 0$). Cette même hypothèse de régularité de F permet d'appliquer un théorème de Y. Sibuya [13] assurant que l'équation (6) $\varepsilon \frac{du}{dx} = F(x, u, \varepsilon)$ admet une solution formelle $\hat{u} = \sum_{p \geq 1} \hat{u}\varepsilon^p$, où les $\hat{u}_p$ sont des fonctions analytiques définies sur un même voisinage compact de x_0, et que cette solution formelle est Gevrey d'ordre 1.

On en déduit dès lors une solution–Gevrey $\tilde{u}(x)$ admettant $\hat{u}$ pour développement asymptotique, au moyen d'une sommation de Borel–Laplace-tronquée. Rappelons brièvement comment :

La transformation de Borel $\mathcal{B}$ convertit la série formelle $\hat{u}$ en la série

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathcal{B}\left(\sum_{p \geq 0} \hat{u}_p \varepsilon^{p+1}\right) := \sum_{p \geq 0} \hat{u}_p \frac{\lambda^p}{p\,!},$$

qui, du fait que $\hat{u}$ est Gevrey d'ordre 1, est une série convergente et définit donc une fonction $\mathbf{u}$ sur un voisinage de x_0 indépendant du choix de ε voisin de 0. Il est dès lors possible d'appliquer à $\mathbf{u}$ une transformation de Laplace-*tronquée*, c'est-à-dire étendue à un chemin d'intégration Γ (indépendant du choix de ε) joignant $\lambda = 0$ à un point non nul λ_0 dans le domaine de $\mathbf{u}$.

La transformation de Borel est un homomorphisme de l'algèbre des séries Gevrey d'ordre 1 (munie du produit formel des séries) dans l'algèbre des séries convergentes (munie du produit de convolution), et cet homomorphisme commute avec la dérivation par rapport au "paramètre" x : $\mathcal{B}\left(\frac{d\hat{u}}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\mathcal{B}(\hat{u})$ (puisque, par les formules de Cauchy, la dérivée en x d'une série Gevrey (en puissances de ε à coefficients analytiques) est encore Gevrey). La transformation de Laplace $\mathcal{L}$ ayant les mêmes propriétés (du produit de convolution vers le produit ordinaire cette fois), on est assuré que $\bar{u} := \mathcal{L} \circ \mathcal{B}(\hat{u})$ satisfait aux mêmes équations algébro–différentielles que $\hat{u}$, et, par densité, les mêmes équations analytiquo–différentielles. Toutefois, faute de pouvoir choisir $\lambda_0 = \infty$, la transformation de Laplace-tronquée n'est un homomorphisme qu'à exponentiellement petit près, et donc, si $\varepsilon \frac{d\hat{u}}{dx} - F(x, \hat{u}, \varepsilon) = 0$, on n'aura pour $\tilde{u} := \mathcal{L}_\Gamma \circ \mathcal{B}(\hat{u})$ que $\varepsilon \frac{d\tilde{u}}{dx} - F(x, \tilde{u}(x), \varepsilon) =:$ $\tilde{\mu}(x, \varepsilon)$ où $\tilde{\mu}$ est une fonction exponentiellement petite. Par transfert, on peut supposer que $\tilde{u}$ et $\tilde{\mu}$ sont standard et donc, si $\varepsilon > 0$ est infinitésimal, $\tilde{\mu}(x, \varepsilon) \in \mathcal{M}_\varepsilon$. La fin de la preuve est alors la conséquence du corollaire suivant de la proposition (2.2).

Corollaire 3.1 *Soit $\varepsilon > 0$ infinitésimal ; posons $f(x, u) := F(x, u, \varepsilon)$. Si l'équation $\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, u)$ admet un canard-Gevrey au point (x_0, u_0), alors elle admet également un canard en ce point.*

Preuve : Soit $\bar{u}$ le canard-Gevrey défini sur un voisinage standard $]x_-, x_+[$ de x_0 ; posons $(x, v) = (x, u - \bar{u}(x))$. Par hypothèse $\varepsilon \frac{du}{dx} = f(x, \bar{u}(x)) + \mu(x)$, où $\mu(x)$ est une