

应用带电粒子光学

YINGYONG DAIDIANLIZI
GUANGXUE

A·赛普蒂 主编 原子能出版社

第一卷



891/112/09

应用带电粒子光学

Applied Charged Particle Optics

PART A

Edited by A. SEPTIER

(Advances in Electronics and Electron Physics)

刘 经 之 译

施 仕 潮

茅 乃 丰 校

陈 银 宝

原子能出版社

内 容 简 介

本书(第一卷)主编A·西波特是粒子束光学的权威,各章的编者也是粒子束光学方面的专家,他们结合实际装置阐述了带电粒子束技术的基本理论和方法并介绍了各种方法的最新成果和进展。全书共分五章,包括:计算静电场和磁场的数值方法,低强度束光学特性计算和象差校正方法,发射度、亮度的定义与测量,高分辨扫描透射低能离子显微镜和微量分析器,高能离子微探针。

本书可供粒子加速器、微电子学、电子显微镜、同位素分离器、电子束与离子束专业工作者及大专院校有关专业师生参考。

应用带电粒子光学

(第一卷)

A·赛普蒂 主编

刘 经 之 译

施 仕 潮

茅 乃 丰 校

陈 银 宝

责任编辑 刘荣久

原子能出版社出版

(北京2108信箱)

国防科工委印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

☆

开本787×1092 1/16·印张14.25·字数350千字

1987年8月北京第一版·1987年8月北京第一次印刷

印数1-1000册·统一书号:15175·830

定价:3.70元

序 言

我们以极其愉快的心情把 A. 赛普蒂教授主编的《应用带电粒子光学》在《电子学和电子物理进展》的增刊上发表。这一课题能十分恰当地表述电子物理在现代科学技术中的价值。关于这一点，已经在 A. 赛普蒂本人写的前言中作了详细的论述。因此，在这里，我们仅向写出这样有价值的著作的主编和各位作者，表示最良好的祝愿和最诚挚的谢意。

L. Marton

C. Marton

前 言

带电粒子光学是一门比较年轻的学科，1926年 Busch 首次证明，一个不均匀的轴向磁场可对电子束起聚焦作用，因而可将电子从一个“物”点会集到一个“像”点上。几年以后，大约是在1931—1932年期间，便出现了静电“透镜”，这到现在也不过刚刚五十年。

用于带电粒子的透镜，从某种意义上说，与聚焦可见光时所用的玻璃透镜很相似，这一发现促进了带电粒子光学这个新的光学分支的发展。仅在短短的几年内，就在理论和实际应用方面，尤其是在阴极射线管、质谱仪和电子显微镜的设计中，取得了令人瞩目的进步。

说也奇怪，从发现自由电子到制成第一批聚焦和分析带电粒子使用的装置竟会相隔好几十年，因为自十九世纪以来人们就已知道了那些描述电磁场对带电粒子作用的定律。但是，引起广大物理学家重视并重新唤起人们对高真空内自由传播粒子的兴趣的，无疑是 L. de Broglie 在1924—1925年发表的那篇有关粒子的波动特性的著作。另外，真空技术在这期间内所取得的进展也肯定会促使人们增强对粒子光学的兴趣。因为要保证粒子得到最初的加速所需要的电场不致击穿，就必须有良好的真空。对于静电聚焦单元或静电偏转单元，情况也同样是如此。

1927年，Davisson 和 Germer 首次对 L. de Broglie 于1924年提出的理论作了实验验证，他们观察了由晶体的原子形成的规则光栅所引起的电子衍射。如果能制造出分辨能力比最好的光学显微镜的衍射极限高 10^3 或 10^4 倍的透射式电子显微镜，那显然就会有很大可能用电子来直接研究固体。

除了计算电子显微镜的理论分辨本领这个具体问题之外，还在不涉及粒子波动性的情况下对带电粒子透镜和偏转器的所有光学性质从头作了研究。只要知道了电位分布和磁场分布，就可以计算粒子的轨迹并由此确定这一光学系统的基本性质；对系统中的各有关量，特别是它们的几何象差，都是通过与具有中央光轴的光学系统和棱镜等几何光学中熟知的量进行类比而予以定义的。

有关发展高放大倍数电子显微镜的问题，几家大的工业公司和很多大学的实验室都是很感兴趣的。由于人们对电子显微镜的新需求日趋明显（这导致了对粒子光学的一些新特性的研究），所以，与此有关的研究活动，在第二次世界大战期间也没有中断。如果要设计利用强流电子束的高频管和能够生产相当数量的铀-235的同位素分离器，那只有当解决与带电粒子之间相互作用有关的一些新问题之后才有可能；而在利用低电流密度束的装置中，对这样的效应一直是忽略不计的。

到五十年代初，在这一领域中工作的专家们就已经掌握了旋转对称光学系统或有对称平面的光学系统的几何光学性质。由于大家都知道透镜和棱镜的两种基本象差（即孔象差和色象差）并不像玻璃透镜的情况那样可以消除掉，所以只能去寻求象差最小的系统。随着涉及机械部件和供电电源两方面的制作技术的逐步改进，市场上出现了分辨率优于 10 \AA 的高质量电子显微镜。这种仪器不仅能为极小的物体提供高放大倍数的象，而且还能给出电子束通过的那一区域的衍射图。

然而也出现了一些新的应用粒子光学的领域：大型的高能粒子加速器（它要求研制能给出几十兆瓦脉冲功率的射频发生器或微波发生器）和对固体样品进行定量分析的一系列新设备（由此超出了只作定性观察的范围）。带电粒子光学在高能加速器中的应用激起了一股积极研究强聚焦光学系统的热潮，其结果是使电子束或质子束聚焦并被加速到千兆电子伏量级成为可能。与此同时，即五十年代，又诞生了尺寸更小的新一代的仪器，这些仪器使分析技术起了巨大的变化。其中最早出现的是电子微探针，就是说，利用电子轰击固体时放出的特征X射线来研究某一特定的化学元素在这一固体表面上的分布；在第一批样机内，分析试样是在静止的探针下面移动的，但人们很快就认识到，让探针在静止的试样上面扫描会更有好处，且需增设扫描单元。因为这样能以很好的近似来估算欲测元素在1立方微米量级的体积之内的浓度。

为制造电子微探针（即把电子束会聚到一个很小的斑点）所作的努力很自然地导致了扫描显微镜向商品化方向发展。利用这种显微镜能在阴极射线管上显示出一块大型样品的表面图象；由试样上射出的二次电子用来产生信号，最后得到的象几乎具有无限的视野深度和几百埃量级的分辨率。

为了能在尽可能强的探针电流下减小束斑的尺寸，在那几年中又对这种探针装置作了改进。大家知道，电子源的亮度是透射式电子显微镜的一个重要参数，所以它成了改进中有待提高的一个关键量。另外，在提供超高真空所需要的设备出现后不久，又在探针装置上安装了场致发射针尖。所有这些改进，在能量分析器和过滤器的设计中，同样也起着推动作用。

通过在改进透射式电子显微镜（TEM）的光学系统及技术状况方面所作的不懈努力，并结合对成像过程的不断深入了解，逐步使利用100—200keV的电子时的分辨率极限降到了2—3Å。这样就使多少年来希望看到一个原子或至少是原子的“象”（那怕是不完善的象）的梦想似乎正在成为现实。为了进一步改善分辨率和有能力研究较厚的样品（微米量级的厚度，而不是几百埃），人们制造了电压很高的显微镜（最初是1MV，随后是3MV）。对于这样一些笨重的设备来说，要使实际分辨率达到埃的量级，则还需要解决很多与光学系统、寄生辐射和机械振动等有关的问题。

正是在这样的背景下，于60年代中期产生了制造探针直径为几埃（这种探针由场致发射枪提供）的扫描显微镜的想法。对于薄试样来说，这种显微镜几乎将与传统的TEM具有同样的分辨率并且是用透射过来的电子所传递的信息把象显示出来。关于扫描透射式电子显微镜（STEM）的优点，仅在几年前才开始被TEM的拥护者们所承认，但商品型的设备现在却已在寻求它们大量进入实验室的途径了，而且，有不少高压型的STEM目前也已在制造或设计之中。事实上，正是用STEM在1970年首次观察到了一种试样的原子，而类似的TEM显微照片却是在稍后（即1971年）得到的。

所有这些设备——各种电子显微镜、TEM和STEM，X射线微量分析器、中高能粒子加速器、质谱仪以及甚至像电视摄像机和摄像管这样一些较简单的装置，不仅对从事纯基础研究方面的物理学家、化学家和生物学家，而且对致力于发展新材料和新设备以及用于所有“应用”科学，特别是用于电子学方面的科学家和工程师们来说，都是必不可少的工具。一系列的国际会议以及实际工作中所得到的一些惊人的成果，已使这些设备通过各种通俗读物和电视广播被整个科学界，甚至事实上是更广大的公众所熟知了。

虽然评论这些设备的价值已经超出了我们的讨论范围，但这些颇享盛名的设备的确使很多其他利用低密度粒子束的装置略显逊色。在对薄膜或化学化合物作定量分析、对尺寸小于微米的电子器件进行微加工或者在光电子学中为肉眼看不到的辐射得到的象作象转换器时，都可以用这些设备来更好地了解表面的物理性质、电子学性质或化学性质。同样，对于高密度束，我们提请对前已提及的用于微波发生器的各种电子管、电子束焊机、供加速器用的电子束与离子束的源和注入器以及可实现受控聚变用的千兆瓦级的电子束予以注意。

所有这些设备都是近五十年来向着一个方向，即所谓使带电粒子为人类服务的方向，探求和努力的结果。

关于一些较熟悉的带电粒子装置，现在已经发表了大量的文献。我们的这部书可以看作是《带电粒子的聚焦》(Focusing of Charged Particles, A. Septier, ed., Academic press, New York, 1967) 一书第一、二两卷的续篇，在这里，我们力求把一些在表面研究、固体和气体的分析以及电子器件的微加工方面已被证明非常有用的设备包括在内，但仍没有超出几何光学的范围。

在本书的第一卷中，前三篇文章的目的是为了给出一些在《带电粒子的聚焦》中已经描述过，而到目前为止仍用以计算光学系统或粒子束性质的一般方法。第一篇文章描述了新近发展的解拉普拉斯方程和泊松方程的数值方法，由此可以非常精确地计算电位分布和磁场分布。后面一篇文章讨论了研究粒子轨迹和光学系统象差的一些技巧，并把重点放在计算各种具体情况下的轨迹和象的实用公式以及对复杂系统进行最佳化的方法上。在这组文章的第三篇中研究了一些发射度不等于零的实际束的基本特性，并认真评述了研究这些特性所用的各种诊断方法。

第一卷的最后两篇文章和第二卷的第一篇文章是描述在不同能量范围内工作和用于不同目的的离子探针的。最先讨论的是扫描透射式离子显微镜 (STIM)，这种显微镜的一台样机现已用 50keV 的质子投入运行，该显微镜用的是点发射源和场致发射离子源，只需很短时间就可以把这样的源准备好并装到任意高分辨率离子微探针系统中去，用以检验或制造微型电路。第二篇文章专门讨论离子微探针，其实质是用 2—3MeV 的离子轰击样品时发出的 X 射线来对固体表面作局部化学分析。这一新近发展起来的技术比电子探针要更灵敏一些。这组文章的最后一篇是研究低能扫描束和固定束离子微探针的；通过分析发射出来的二次离子，能以微米量级的分辨率确定某一特定元素的表面分布。我们认为，比较一下各种获得图象的方法和两种微探针系统的性能是很有用的。

随后又描述了在电子工业中用来生产器件，特别是实现超小型化的两项设备。首先讨论离子注入机，利用这种设备可对半导体作局部掺杂；文中还提到了很多有关离子的产生与纯化以及束流的传输与聚焦方面的问题，并且还讨论了这些问题的解决办法。在这之后，又描述了从 SEM 衍生出来的各种设备，它们用电子微探针去直接蚀刻对电子敏感的树脂；当所需器件的尺寸太小，以致不能为其掩膜时，就需要用这样的设备。这时，探针的扫描图形是由计算机控制的。

在第二卷最后的三篇文章中所描述的是分析质量或能量的装置。当需分析的物质——固体或气体——转换成离子时，要进行质量分析，而当把电子束作活性元素去激发、探测表面或气室中的原子或分子时，则要进行能量分析。所以，在这些文章的第一篇中叙述一下质谱仪和同位素分离器方面取得的最新进展，尤其是有关用加速器产生的粒子来轰击固体靶这样

用人工方法来获得一些寿命很短的放射性物质方面的最新进展，看来是比较合适的。对于用二次离子质谱仪 (SIMS) 所作的表面分析以及对超高真空室内的剩余气体的分析，目前广泛应用四极质量过滤器。因此，在第二篇文章中就叙述为了得到更高的分辨率和更好的穿透率而对这些设备所作的一系列改进。最后，在末尾一篇文章内，我们又回过头来研究低能电子。对慢电子束作能量分析以及使电子束变为单色束的需求，导致了很多设备的出现，且每种设备都有其特有的应用范围。所以，我们认为，对这些分析器所作的严格比较想必会受到面对广阔的选择范围而不知所措的用户们的欢迎。在最常见的应用中，有俄歇分析、化学分析电子能谱 (ESCA) 及低能电子能谱学。

我们并不想在这几卷书中讨论所有应用粒子束的设备，但即使这样，材料也仍然太多，以致不可能在一卷著作中全部包括进去。所以，我们就多少有点任意地把这些材料分成了一、二两卷。

我以愉快的心情向所有的作者表示感谢，因为他们在百忙中为本书写了这些论文，从而与读者分享了他们个人的见解以及在他们丰富的经历中所取得的成果。

A. Septier

目 录

序言	1
前言	2
第一章 计算静电场和磁场的数值方法	1
§1 引言	1
§2 静电透镜	1
一、静电学方程	1
二、电荷密度法	2
§3 真空静磁学和介质静磁学	3
一、基本方程	3
二、与电流相关联的系统	4
三、轴对称系统的方程	7
四、结论	8
§4 拉普拉斯方程和泊松方程的离散化以及网格的生成	8
一、网格法的原理	8
二、网格的生成	9
§5 差分方程	11
一、泰勒级数法	11
二、场方程的积分法	12
三、有限元法	18
§6 差分方程组的解法	23
一、迭代法	23
二、直接解法	25
§7 结果	25
参考文献	27
第二章 低强度束光学特性计算和象差校正的方法	28
§1 引言	28
§2 运动方程的数值解法	29
一、运动方程的形式	29
二、轨迹跟踪的数值方法	35
三、一些典型的应用	37
§3 象差系数的结构	38
一、象差多项式	38
二、象差矩阵	46
三、部件的组合	50
四、计算机代数系统与象差系数	54
§4 最佳化与象差的部分校正	58

一、系统的最佳化	58
二、象差的校正	69
三、达姆斯特丹的高分辨率方案	82
§5 结束语	86
一、专用数字处理设备	87
二、最后按语	88
参考文献	88
第三章 发射度、亮度的定义与测量	100
§1 引言	100
§2 定义与基本性质	102
一、哈密顿表示法与刘维定理	102
二、发射度与亮度、基本定义	110
三、发射度概念的改进	119
§3 发射度和亮度的测量	124
一、关于粒子束诊断的一般说明	124
二、积分径迹-空间密度分布	126
三、四维径迹空间密度分布	132
四、真实空间密度剖面图:“非破坏性方法”	147
五、发射度测量的改进	141
§4 结束语	152
符号与规定	154
参考文献	155
第四章 高分辨扫描透射低能离子显微镜和微量分析器	160
§1 引言	160
§2 纳米级微探针的形成	161
一、亮度以及有关的一些束流量	161
二、对束斑尺寸的影响	162
三、用光学系统的象差表示的最佳设计参数	163
四、受探针电流限制的分辨率:亮度要求	164
§3 高比亮度的源	166
一、场致电离源	166
二、用于 STIM 的场致离子发射器	171
三、电流体动力学离子源	174
§4 SIM 和 STIM 光学系统的设计、象差	174
一、场致离子枪	177
二、有两个或更多个光学单元的系统	180
§5 利用各工作系统得到的结果	184
一、采用 FI 源的枪式显微镜	185
二、采用 EHD 源的枪式显微镜	191
三、多元镜筒	193
§6 将来的发展	194

附注	195
参考文献	196
第五章 高能离子微探针.....	199
§1 用高能离子进行表面分析	199
§2 兆电子伏能区离子的光学系统	200
一、一般考虑	200
二、准直器系统	203
三、聚焦元件	204
四、微探针装置	206
§3 研究结果选摘	212
§4 将来的发展	214
参考文献	215

第一章 计算静电场和磁场的数值方法

P. BONJOUR

法国, 奥赛, 巴黎大学

基础电子学研究所

§1 引言

本文的目的是研究如何利用数字计算机对电子光学系统中的场进行数值计算。我们所考虑的主要是那些必须要解泊松方程的磁系统。关于静电透镜的问题, 已在《带电粒子的聚焦》(Weber, 1967) 一书中论述过了。这里介绍的一些方法也完全适用于拉普拉斯方程的数值解法。计算是这样完成的, 光使得到的方程便于处理轴对称系统, 器后只需稍加改变, 就可建立起对其他系统(如平移对称系统)也有效的方程。

首先, 我们在第§2节中简要地回顾一下静电学方程, 并且介绍一种专门计算静电透镜的方法; 通过解一个积分方程组, 算出导体所带的电荷, 并由此导出透镜内的电位。在第3节中, 我们讨论静磁学的基本方程, 然后列出各种适于计算的函数及相应的偏导数方程。第4节讨论网格法的原理、使用的各种网格以及生成网格的方法。在这一方法中, 把偏导数方程换成了差分方程, 而这种方程则如第§5节所示, 可以用好几种方法来建立。既可以象在有限差分法中那样利用未知函数的局部展开, 也可以从对能量作总估算开始, 利用变分原理导出微分方程。这些差分方程可用迭代法来解(这种方法用得最早, 而且在理论方面已作了充分的研究), 也可以用最近提出的一些直接解法来解。

在第§6节中, 我们要讨论这些方程的解法, 由于磁导率的局部变化造成的非线性, 使方程的解法变得复杂了些。最后, 在第§7节中, 我们举了两个计算超导透镜中轴向通量密度的实例来阐明前面研究过的计算方法。

§2 静电透镜

静电透镜的性质可以从势函数 V 导出。这里的势可用两种方法建立:(1)通过具有已知恒定电位的导体来建立, 在这种情况下需要解拉普拉斯方程; 或(2)通过导体上的电荷来建立, 在这种情况下要采用电荷密度法。

一、静电学方程

具有恒定电位的若干导体产生一个电场 E , 而 E 由电位 V 导出。各个导体被真空区或不

同的材料分隔开来。从静电学的观点来看，这些介质的特征由其介电常数来表示（真空的介电常数为 ϵ_0 ，第 i 种材料的介电常数为 ϵ_i ）。另外，对于处理强流束的透镜来说，还必须考虑被聚焦粒子的电荷的影响，在这里，我们把束流的体密度叫做 ρ 。

在导体以外，电位满足泊松方程

$$\nabla^2 V = -\rho/\epsilon \quad (1)$$

或者，如果束流的电荷可忽略不计，则电位满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 V = 0 \quad (2)$$

方程(1)和(2)的解还必须满足一些所谓边界条件，这些条件如下：

1) 在电位为 V_i 的导体 i 上，我们必须有

$$V(x, y, z) = V_i$$

2) 在两种介质 i 和 j 的界面上，要有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_j - \mathbf{E}_i) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\epsilon_j \mathbf{E}_j - \epsilon_i \mathbf{E}_i) = \sigma \quad (3)$$

其中 σ 是该处可能具有的面电荷密度， \mathbf{n} 是由 i 指向 j 的单位法向矢量。

3) 如果已知的是某些导体的表面电荷密度 σ ，而不是导体的电位，那么，上列方程给出

$$\epsilon_i \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{n} = \sigma \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}_i = 0$$

这里的 \mathbf{n} 指向导体的外面。

方程(1)和(2)(用柱坐标系书写)以及方程(3)具有与方程(14)–(16)相同的数学形式，而方程(14)–(16)是用磁标量势来表示某一电流与介质组成的系统的静磁特性。可以把这些方程写成普遍的形式(19)，下面描述的解方程(19)的一些方法可以不受限制地用于静电势的情况。

二、电荷密度法

这种方法是由 Read 等人 (1971) 开创的，在这一方法中，未知量是导体上的表面电荷，而每一点的电位则由一个对全部电荷求积的积分方程给出。这方法的特点是：算得的电位，在每个导体上必须是常数。为了说明这种方法，让我们来看一种简单的情况。

图 1 表示一个双圆筒透镜。设圆筒的厚度可以忽略不计。从数学的观点看，圆筒内壁和外壁上的电荷可以看作是一种特殊的电荷，其数值等于内电荷和外电荷的和。把每个圆筒分成 $n/2$ 个圆环，并假设每个圆环上的表面电荷密度是均匀的。这些环具有不同的

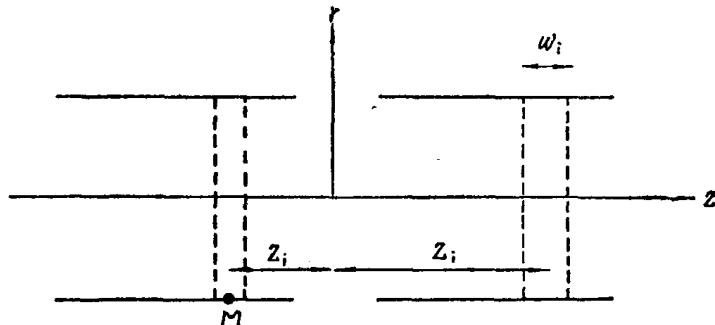


图 1 双圆筒透镜和在用 Read 法时的坐标轴。把圆筒分成了宽度为 ω_i 的一个个的环，并对 M 上的电位作了计算

宽度，在靠近缝隙的地方，电荷密度的变化极快，所以环要窄一些。每一个环产生的电位类似于一个半径为 R 且带有相同电荷的圆圈产生的电位。如果在平面 $z=z_i$ 上有一个半径为 R 的圆圈，则由均匀分布在这一圆圈上的电荷 q_i 在坐标为 (r, z) 的点上产生的电位 V_i 即

为 (Durand, 1964),

$$V_i(r, z) = \frac{q_i k_i}{4\pi^2 \epsilon_0 \sqrt{Rr}} K(k_i) \quad (4)$$

其中

$$k_i^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + (z-z_i)^2}$$

$K(k)$ 是第一类全椭圆积分。将上式用于平面 $z=z_i$ 内的第 j 个圆环上的某一点 M , 并引入表面面积为 s_i 的第 i 个圆环的内外表面密度 σ_i , 我们即得

$$V_i(R, z_j) = (s_i \sigma_i k_i / 2\pi^2 \epsilon_0 R) K(k_i)$$

于是, 由两圆筒所含各圆环的贡献而在点 M 上形成的电位即为

$$V(R, z_j) = (1/2\pi^2 \epsilon_0 R) \sum_i^n s_i \sigma_i k_i K(k_i) \quad (5)$$

在这一表达式中, $i=j$ 的项必须单独计算, 因为这时 $K(1)$ 变为无限大。如果对环的宽度不能看作无限小, 也就是说, w_i 与 $(z_j - z_i)$ 相比还不是一个足够小的量, 那就要把方程 (4) 换成一个比较复杂的方程 (Durand, 1964), 这个方程用第三类椭圆积分来表述 $V_i(r, z)$ 。整个透镜是由 n 个圆环组成的, 对于每个圆环, 我们都可以写出一个如 (5) 这样的方程。于是就得到, 由 n 个方程组成的线性系统, 在这一方程系统中, 右边的项是已知的, 因为 $V(R, z_j)$ 按照 z_j 的值分别等于左面或右面那一圆筒的电位。最初, 这个方程系是用迭代法求解的, 即用算得的电位和外加电位之间的误差来改进对表面电荷密度的估算。随后, Harting 和 Read (1976) 又用经典的高斯三角形化法解出了它。

曾经用这种电荷密度法计算过膜片透镜 (Read, 1970)、双圆筒透镜 (Read 等, 1971) 和三圆筒透镜 (Adams 和 Read, 1972)。在这些文章中, 他们都给出了算得的基点参数和球面像差系数。在 Harting 和 Read (1976) 合写的一本数据手册中也曾讨论过这些类型的透镜, 而且还讨论过不同直径的双圆筒透镜、双矩形管和三矩形管透镜、双缝和三缝透镜以及厚壁双圆筒透镜。

§3 真空静磁学和介质静磁学

一、基本方程

让我们来研究一些可磁化材料的体积 V_1, V_2, \dots , 这些材料位于一个体积为 V_0 的磁场内, V_0 中的体电流密度为 \mathbf{J}_0 , 面电流密度为 \mathbf{K}_0 。在局部磁感应强度 \mathbf{B} 的作用下, 体积为 dV 的每一个材料单元变成一个偶极子, 其磁矩等于 $\mathbf{M}dV$, 而且

$$\mathbf{M} = (\mu_0^{-1} - \mu^{-1}) \mathbf{B} \quad (6)$$

其中 μ 是材料的磁导率, 比值 μ/μ_0 是它的相对磁导率。在铁磁性材料中, 当场强很高时, \mathbf{B} 和 \mathbf{M} 间的关系就不再是线性的了。磁导率仍将由方程 (6) 确定, 不过, 这时 μ 是 \mathbf{B} 的函数。

矢量 \mathbf{B} 满足下列两个关系式 (Durand, 1968)

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{J}_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7)$$

在两种介质 i 和 j 之间的表面上, 边界条件为

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_j / \mu_j - \mathbf{B}_i / \mu_i) = \mathbf{K}_{ij} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_j - \mathbf{B}_i) = 0$$

其中 \mathbf{K}_{ij} 是在介质 i 和 j 之间的交界面上循环流动的表面电流。

将方程 (7) 中的 $\nabla \times \mathbf{B}$ 展开, 我们有

$$\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{B} + \nabla(\mu^{-1}) \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_0$$

引入矢量势 \mathbf{A} , 我们最终得

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \mu^{-1} (\nabla \mu \times (\nabla \times \mathbf{A})) = -\mu \mathbf{J}_0 \quad (8)$$

当介质为均匀介质时, 方程 (8) 简化为

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}$$

对于 \mathbf{A} , 边界条件为

$$\mathbf{n} \times [(\nabla \times \mathbf{A}_j) / \mu_j - (\nabla \times \mathbf{A}_i) / \mu_i] = \mathbf{K}_{ij} \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_j - \mathbf{A}_i) = 0 \quad (9)$$

二、与电流相关联的系统

如果我们象 Durand (1955) 首先提出的那样, 研究一个与电流相关联的系统, 则矢量方程 (8) 的解法就会大大简化。

1. 定义

让我们把假想的点磁荷 q 作为计算中的一个辅助性的参量。根据这些磁荷, 可以得出面密度 σ^* 和体密度 ρ^* 。再让我们来研究磁矩为 \mathbf{P} 的磁偶极子, 其面密度和体密度相应为 τ^* 和 \mathbf{P}^* 。为了叙述简便, 我们将称其为极化面和极化体。

这些磁荷和偶极子建立磁场 \mathbf{E}^* , \mathbf{E}^* 可以由磁标量势 V^* 导出, 而且, 一般说来, 我们对所有带星号的量都能写出静电学的方程。例如,

$$\mathbf{E}^* = -\nabla V^* \quad \mu_0 \nabla^2 V = -\rho^*$$

如果在空间中的每一个点上都可写出

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{E}^* + \mathbf{P}^* \quad (10)$$

那么, 我们就说, 由 \mathbf{E}^* 、 V^* 、 \mathbf{P}^* 等量确定的磁荷与磁偶极子系统是一个与由 \mathbf{B} 、 \mathbf{A} 、 \mathbf{J} 等量确定的电流系统相关联的系统。

由此立刻可以看到, 尽管 \mathbf{E}^* 是从电位导出的, 但 \mathbf{P}^* 却与这一条件无关。所以, 矢量和 [式(10)] 可能变成螺旋矢量和, 以便在每一点上都等于 \mathbf{B} 。另外, 把安培定律用于式(10)以后表明, 我们必然有

$$\int_C \mathbf{P}^* \cdot d\mathbf{I} = \mu_0 I$$

2. 基本的关系统

具有正交磁偶极子的表面密度为

$$d\tau^* = \mu_0 K dx$$

的无限半平面可以作为宽度为 dx 、表面电流为 $K dx$ 的一条窄带的关系统 (图2)。

具有偶极子的体密度为 \mathbf{P}^* ($\mathbf{P}^* = \mu_0 \mathbf{K}$) 的半平行六面体是另一个关系统。

在复合系统中, 其组成是体密度为 \mathbf{P}^* 的极化体积加上表面密度为 $d\tau^*$ 的极化半平面。

电流管 $\mathbf{J} dx dy$ 可与偶极子体密度为 $d\mathbf{P}^* = \mu_0 \mathbf{J}$ 的单位长度的无限平行六面体相关联 (图

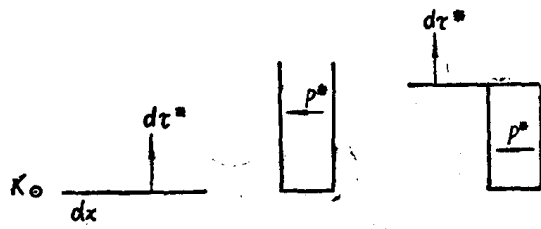


图2 与宽度为 dx 、电流为 Kdx 的窄带相关联的系统 (K 是指向本图平面外的)

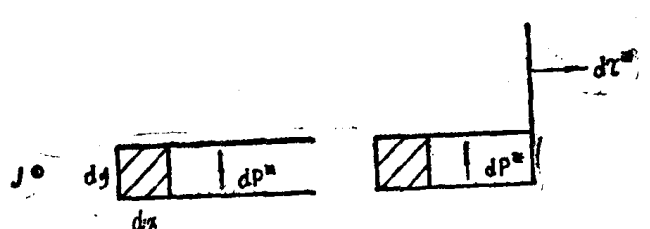


图3 与电流管 $J dx dy$ 相关联的系统 (J 指向本图平面外的)

3)。另一个系统是由极化体积加上表面密度 $d\tau^* = \mu_0 J dx dy$ 的半平面组成的。

与一个电流环相关联的系统 (图4) 是由垂直于边界表面 S 的偶极子组成的, S 以电流环为边界, 偶极子的密度为 $\tau^* = \mu_0 I$ 。

3. 与螺线管相关联的系统

上述结果使我们能描述与粗螺线管相关联的系统。

一个半径为 r 而体密度为

$$dP^* = \mu_0 J dr$$

的圆盘可与图5中强度为 $J dx dz$ 的电流管相关联。通过在内径 a 和外径 c 之间取积分, 我们把螺线管的体积分成两个以平面 $z = \pm b$ 为界且具有下列极化体密度的区域:

$$P^* = \mu_0 J (c - a), \quad 0 \leq r \leq a; \quad P^* = \mu_0 J (c - r), \quad a \leq r < c.$$

螺线管的长度为 $2b$ 。

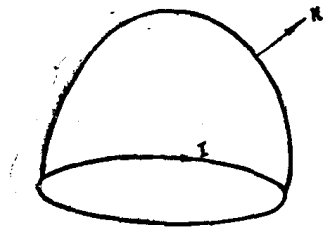


图4 与电流环相关联的系统

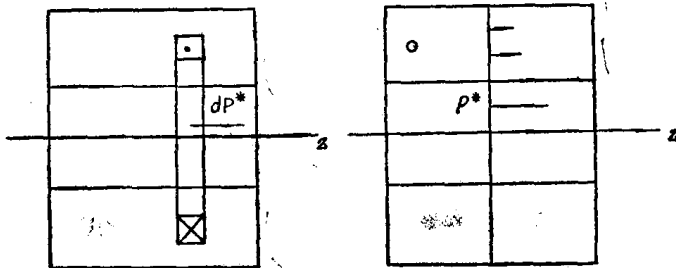


图5 与螺线管的电流管单元相关联的系统 (左) 和螺线管的总体系统 (右)

由此可见, 这里的关联系统是由体极化度与 z 轴平行的两个圆柱组成的 (图5)。这是一个最简单的系统, 但也可以得到其他具有复合的面极化度和体极化度的系统。

与图6中的电流管 $J dx dz$ 相关联的系统是由体密度为 $dP^* = -\mu_0 J dr$ 的圆环 BA 组成的。

在 B 和 C 之间以及 C 和 D 之间, 面密度为 $d\tau^* = -\mu_0 J dr \cdot dz$ 。通过积分, 我们在体积 $ABCD$ 内得到

$$P^* = -\mu_0 J (r - a)$$

在横坐标 z 的侧表面的 B 点上有

$$\tau^* = -\mu_0 J (c - a) (b - z)$$

而在对称平面 CD 内,

$$\tau^* = 2\mu_0 J b (c - a)$$

螺线管的安匝数 NI 与 J 有关, 其关系式为

$$NI = 2Jb(c - a)$$

最后, 我们得到图6所示的系统。在 Durand (1955) 的文章中, 可以看到与粗细螺线管相关联

的其它系统。

4. 关于一个磁透镜的例子

让我们举一个关于对称磁透镜最后的例子，图7所示为该透镜的截面，图中的 AB 是对称轴， $IJKL$ 是一个极头， $MNPQ$ 是励磁线圈。关联系统是用上节阐述的方法得出的。由于在 $MNPQ$ 中流过的安匝数为 NI ，所以分布在这一体积内的密度即为

$$P^* = -\mu_0 J(r-a)$$

在整个 BH 和 HN 上，有一恒定的面极化度

$$\tau^* = \mu_0 NI$$

在整个 MN 上，极化度从 N 点的 $\mu_0 NI$ 线性地减弱到 M 点的零。

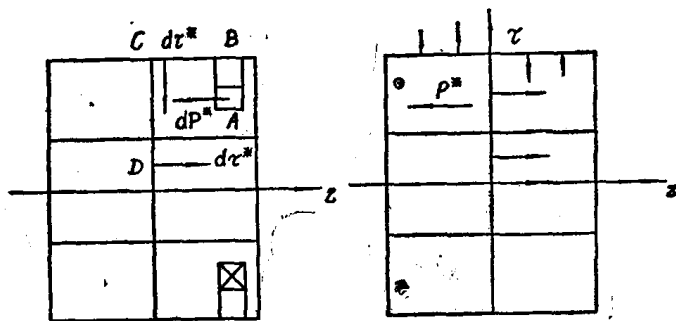


图6 另一种与电流管相关联的系统单元（左）和螺线管的总体系统（右）

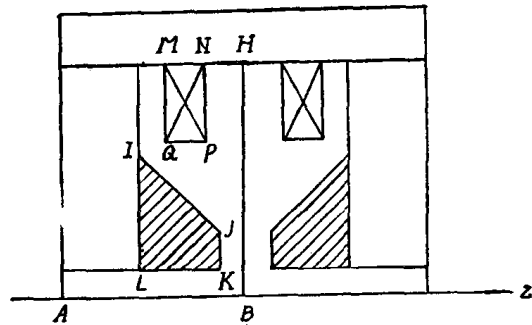


图7 一个对称磁透镜的截面： $IJKL$ 是极头， $MNPQ$ 是励磁线圈

5. 关联系统的应用

在利用关联系统时，我们就不必去解由方程(8)导出的三个偏导数方程，而只解一个方程就够了。

电流 J_0 和 K_0 的系统换成密度为 τ^* 和 P^* 的关联系统。体极化度 P^* 换成等效的质量系统

$$\rho^* = -\nabla \cdot P^*, \quad \sigma^* = n \cdot P^*$$

系统 τ^* 、 ρ^* 和 σ^* 是从标量势 V^* 导出的， V^* 与电流产生的磁感应强度 B_0 有关，这些量满足

$$B_0 = -\mu \nabla V^* + P^*$$

磁化介质产生一个磁场，该场由标量势 V^* 导出，所以作用在介质上的总磁场即为

$$B/\mu = -\nabla V^* + B_0/\mu = -\nabla V + P^*/\mu$$

其中 $V = V^* + V'$ 。我们还记得， B 的散度为零，由此给出，

$$\mu \nabla^2 V + (\nabla V) \cdot (\nabla \mu) = -\rho^* \quad (11)$$

这是 V 的偏导数方程，在均匀介质内，该式即变为泊松方程

$$\nabla^2 V = -\rho/\mu$$

由此可见，如何选择 P^* ，使 ρ^* 在各处皆为零，并使方程(11)变为拉普拉斯方程，这显