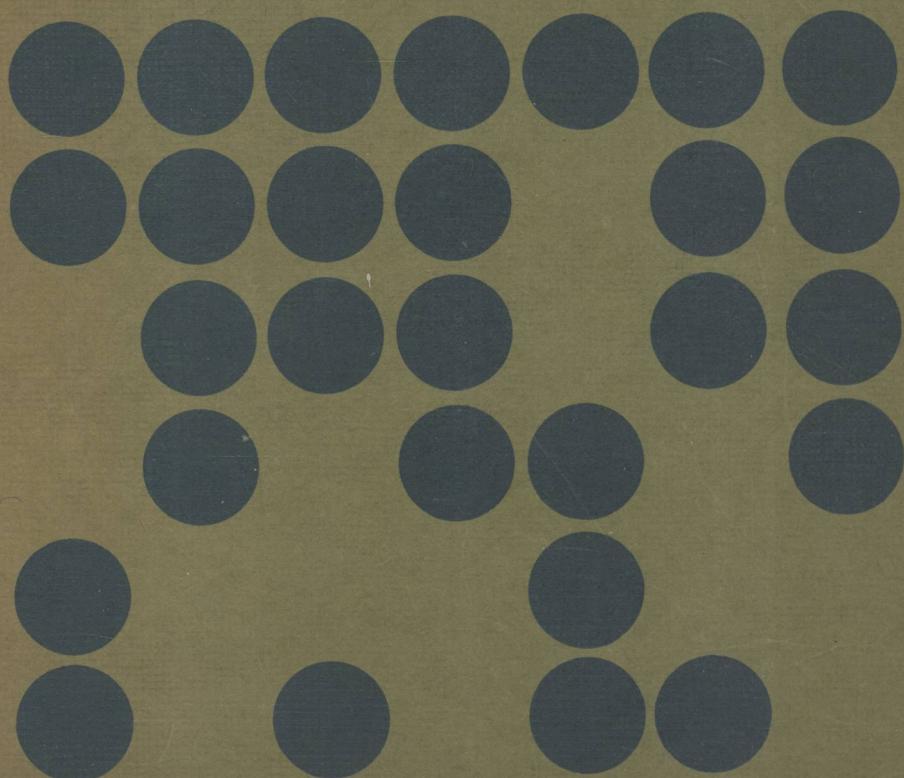


Jacques Louis Lions

KT

**Sur quelques questions  
d'analyse,  
de mécanique  
et de contrôle optimal**



LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL





Sur quelques questions  
d'analyse,  
de mécanique  
et de contrôle optimal

## COLLECTION DE LA CHAIRE AISENSTADT

*Fondateur : Lucien Le Cam, Université de Berkeley*

*Directeur : Anatole Joffe, directeur du Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal*

### *Dans la même collection*

Robert Hermann, *Physical Aspects of Life Group Theory*, 1974

Mark Kac, *Quelques problèmes mathématiques en physique statistique*, 1974

S. R. de Groot, *la Transformation de Weyl et la fonction de Wigner : une forme alternative de la mécanique quantique*, 1975

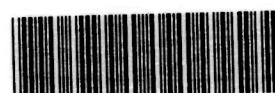
Cette collection est consacrée à la publication des conférences données, depuis 1970, au Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, dans le cadre de la Chaire Aisenstadt. C'est grâce à la générosité de Monsieur André Aisenstadt, docteur en physique théorique de l'Université de Zurich, que le Centre de recherches mathématiques peut inviter des chercheurs prestigieux et publier, aux Presses de l'Université de Montréal, le texte de leur conférence.

TP273  
L2

7862610

# Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal

Jacques Louis Lions



E7862610



1976

Les Presses de l'Université de Montréal  
C.P. 6128, succ. «A», Montréal, Qué., Canada H3C 3J7

ISBN 0 8405 0339 3

Dépôt légal, 3<sup>e</sup> trimestre 1976 — Bibliothèque nationale du Québec  
*Tous droits de reproduction, d'adaptation ou de traduction réservés*  
©Les Presses de l'Université de Montréal, 1976

## INTRODUCTION

De nombreuses questions en Mécanique et en Contrôle Optimal conduisent à des *Inéquations aux Dérivées Partielles*. Citions, par exemple, pour la *Mécanique*:

- les problèmes de Mécanique unilatérale,
- les problèmes d'elasto-plasticité,
- les écoulements de fluides non newtoniens,

• les problèmes à frontière libre du type de Stefan ou de certaines questions d'infiltration dans les milieux poreux etc. Pour le *contrôle optimal* indiquons le contrôle de systèmes distribués, et toutes les questions de temps d'arrêt optimaux et de contrôle impulsional.

Ce sont *certaines* de ces questions que nous abordons ici, par les techniques des *Inéquations Variationnelles* (I.V.) ou des *Inéquations Quasi Variationnelles* (I.Q.V.), avec en outre l'étude, au Chapitre 3, de problèmes asymptotiques liés à des questions relatives aux *milieux composites* et qui conduisent à d'intéressantes questions en connection avec les problèmes de frontière libre.

Les Chapitres 1 et 2, après une rapide motivation, introduisent les outils principaux des I.V. stationnaires et d'évolution. On montre en outre au Chapitre 2 l'équivalence (en un sens convenable) entre les problèmes de Stefan et certaines

I.V. d'évolution. Le Chapitre 2 donne un théorème très général relatif aux solutions *faibles* d'I.V. d'évolution, théorème dû à F. Mignot et J.P. Puel: dans l'ensemble, en général non réduit à un élément, des solutions faibles, il existe une *solution maximum*. Presque tous les résultats des Chapitres 1 et 2 sont relatifs à des opérateurs elliptiques ou paraboliques du  $2^{\text{ème}}$  ordre.

Le Chapitre 3 donne une *introduction* aux méthodes asymptotiques d'*homogénéisation* d'opérateurs elliptiques à coefficients très rapidement oscillants de manière périodique. Ce Chapitre pourra servir d'*introduction* à la lecture du livre de Bensoussan, Papanicolaou et l'Auteur [1] sur ces sujets (où l'on trouvera également les questions analogues pour les problèmes d'évolution, non abordés ici); cf. aussi Bibliographie du Chapitre 3.

Le Chapitre 4 étudie les *temps d'arrêt optimaux*, à partir de l'observation (cf. Bensoussan et l'Auteur [1] et Bibliographie du Chapitre 4) que ces problèmes sont *équivalents* à des I.V. En particulier, dans le cas d'évolution, et avec des hypothèses de régularité réduites au minimum sur les données, on montre que la *solution maximum* dans l'ensemble des solutions faibles (Chapitre 2) coincide avec la *fonction coût optimale* du problème des temps d'arrêt optimaux.

Le Chapitre 5 étudie le *contrôle impulsional*, à partir de l'observation (cf. Bensoussan et l'Auteur, Bibliographie du Chapitre 5) que ces problèmes *équivalent* à des I.Q.V. Les I.Q.V. sont étudiées, au moins dans le cas stationnaire, dans le Chapitre 5. Il est intéressant de noter que des problèmes à frontière libre de la Physique Mathématique se réduisent, par des transformations convenables, à des I.Q.V.; cette observation est dûe à C. Baiocchi (cf. Bibliographie du Chapitre 5) à propos de problèmes à frontière libre de l'hydraulique. On donne au Chapitre 5 un autre exemple intéressant, dû à J.

Mossino, d'un problème de Physique des plasmas se ramenant à une I.Q.V.

Le Chapitre 6 donne une introduction aux méthodes numériques pour les I.V. et pour les I.Q.V. Pour les I.V., il s'agit d'une brève introduction au livre de Glowinski, Trémolières et l'Auteur sur ce sujet (cf. Bibliographie du Chapitre 6). Les résultats numériques présentés sur les I.Q.V. sont succincts, renvoyant pour les détails aux articles cités dans la Bibliographie.

Nous n'abordons pas ici toutes les questions d'I.V. ou d'I.Q.V. rencontrées dans le *contrôle des systèmes distribués*, renvoyant à Lions [1][2][3].

Les I.V. stationnaires ont été introduites dans Stampacchia [1], et les I.V. d'évolution dans Lions-Stampacchia [1]; la motivation était alors fournie par la Mécanique Unilatérale. D'autres exemples de Mécanique conduisant à des I.V., de type parfois nouveau, ont été étudiés ensuite dans le livre Duvaut-Lions [1], la théorie générale des I.V. étant développée par de nombreux auteurs, les questions les plus importantes étant liées à la *régularité* des solutions, question étudiée par Brézis-Stampacchia [1], Brézis [1] et de nombreux autres auteurs.

L'équivalence entre certains problèmes de frontière libre avec des I.V. *après transformation fonctionnelle* a été observée par C. Baiocchi [1], ce qui a donné lieu ensuite à de nombreux travaux. En particulier Duvaut [1] a montré (comme nous le présentons au Chapitre 2) l'équivalence entre le problème de Stefan et des I.V. d'évolution convenables.

L'équivalence entre les problèmes de temps d'arrêt optimaux et les I.V. a été observée par Bensoussan-Lions [1].

Compte tenu de l'équivalence signalée au Paragraphe précédent, on en déduit l'équivalence, après une transformation fonction-

nelle, entre les problèmes de temps d'arrêt optimaux et les problèmes de Stefan. Cette équivalence avait été antérieurement établie par plusieurs auteurs (cf. Chernoff [1] et la bibliographie de ce travail ainsi que celle du Chapitre 4) qui ne disposaient pas de l'outil des I.V. et qui donc faisaient porter tous leurs efforts sur la démonstration, après transformation (essentiellement la transformation *inverse* de celle du type de Baiocchi: on dérivait au lieu d'intégrer!), de l'équivalence avec le problème de Stefan, étudié depuis longtemps (bien avant les I.V.) par des méthodes directes, intéressantes mais techniquement assez compliquées.

L'équivalence entre les problèmes de contrôle impulsif et les I.Q.V. (d'ailleurs *introduites* à cet effet!) a été observée par Bensoussan-Lions [2][3] (cf. aussi Bibliographie du Chapitre 5). C'est encore C. Baiocchi [2] qui a observé que certains problèmes de frontière libre se ramenaient à des I.Q.V.

Des problèmes ouverts sont indiqués dans le texte ou à la fin de chacun des Chapitres (qui chacun contient la bibliographie correspondante).

On a fait un effort pour que ces Notes puissent être lues sans trop de connaissances techniques préliminaires et pour que les Chapitres puissent, au moins en partie, être lus indépendamment les uns des autres.

Ces Notes ont été rédigées dans le cadre très favorable offert par la Chaire Aisenstadt. L'Auteur remercie vivement le Centre de Recherches Mathématiques, son directeur A. Joffe, les chercheurs du Centre et l'Auditoire pour leur hospitalité et leur accueil.

L'Auteur remercie également Madame Micheline Marano et Mademoiselle Johanne Marcoux pour leur excellent travail typographique.

Bibliographie de l'Introduction

- C. BAIOCCHI [1], Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. Mat. P.A. (IV), XCII (1972), p. 107-127 et C.R.A.S. 273 (1971), p. 1215-1217.
- [2], Studio di un problema quasi-variazionale connesso a problemi di frontiera libera, Boll. U.M.I. 1975.
- A. BENOUSSAN et J.L. LIONS [1], Contrôle par temps d'arrêt, Applicable Analysis, 1973 et C.R.A.S. 276 (1973), p. 1411-1415.
- [2], Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsif et applications, C.R.A.S. 276 (1973), p. 1189-1192.
- [3], *Temps d'arrêt optimaux et contrôle impulsif*, Livre en cours de publication (3 volumes) chez Hermann, Paris.
- A. BENOUSSAN, J.L. LIONS et G. PAPANICOLAOU [1], *On some Asymptotics Problems, Homogenization, Averaging and Applications*, North Holland, à paraître.
- H. BREZIS [1], Problèmes unilatéraux, J.M.P.A. 1972.
- H. BREZIS et G. STAMPACCHIA [1], Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull. S.M.F. 96 (1968), p. 153-180.
- H. CHERNOFF [1], Optimal stochastic control, Sankhya 30 (1968), p. 221-252.
- G. DUVAUT [1], Résolution d'un problème de Stefan, C.R.A.S. 276 (1973), p. 1461-1463.
- G. DUVAUT et J.L. LIONS [1], *Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, 1972.
- R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TREMOLIERES [1], *Approximation numérique de l.V.*, (2 Vol.), Dunod, 1976.
- J.L. LIONS [1], *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier Villars, 1968.
- [2], Conférence au 14<sup>ème</sup> Congrès des Math. Canadiens, London, 1973. Lecture Notes in Economics and Math. Systems 105, Springer, 1974, p. 166-309.
- [3], Remarks on the theory of optimal control of distributed systems, Univ. of Maryland, 1976.

- J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA [1], Variational Inequalities,  
Comm. P.A.M., XX (1967), 493-519.
- G. STAMPACCHIA [1], Formes bilinéaires coercitives sur les en-  
sembles convexes, C.R.A.S. 258 (1964), p. 4413-4416.

## TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION . . . . .	7
Bibliographie de l'Introduction . . . . .	11
CHAPITRE 1 - Introduction aux I.V. stationnaires <sup>(1)</sup>	19
1. Exemple "modèle" . . . . .	19
1.1. Notations . . . . .	19
1.2. Premier énoncé du problème . . . . .	20
1.3. Motivation (I). Problèmes à frontière libre . . . . .	20
1.4. Motivation (II). Problèmes de temps d'arrêt optimal . . . . .	21
2. I.V. Enoncé des premiers résultats . . . . .	24
2.1. Espaces de Sobolev . . . . .	24
2.2. Forme bilinéaire $a(u,v)$ . . . . .	25
2.3. Dualité . . . . .	26
2.4. Formulation en I.V. de (1.4)(1.5) . . . . .	26
2.5. Remarque sur les I.V. "générales" . . . . .	27
2.6. Les problèmes . . . . .	27
2.7. Unicité . . . . .	28
2.8. Orientation . . . . .	29
3. Pénalisation . . . . .	30
3.1. Équation pénalisée . . . . .	30
3.2. Résolution du problème pénalisé . . . . .	31
3.3. Résolution de l'I.V. . . . .	35
4. Notions sur la régularité . . . . .	36
4.1. Régularité dans les espaces de Sobolev construits sur $L^2(\Omega)$ . . . . .	36
4.2. Régularité de la solution dans les espaces de Sobolev construits sur $L^p(\Omega)$ . . . . .	38
4.3. Etude directe de la continuité . . . . .	41
5. Propriétés de monotonie de la solution . . . . .	44

<sup>(1)</sup> I.V. = Inéquations Variationnelles.

6. Extensions et problèmes . . . . .	45
Bibliographie du Chapitre 1 . . . . .	46
<b>CHAPITRE 2 - Introduction aux I.V. d'évolution . . . . .</b>	<b>49</b>
1. Le problème modèle . . . . .	49
1.1. Notations . . . . .	49
1.2. Le problème modèle . . . . .	50
1.3. Motivation (I). Problèmes à frontière libre . . . . .	50
1.4. Motivation (II). Problèmes de temps d'arrêt optimal . . . . .	51
2. Solutions fortes et solutions faibles . . . . .	53
2.1. Notations . . . . .	53
2.2. Solutions fortes . . . . .	54
2.3. Solutions faibles . . . . .	56
2.4. Théorèmes . . . . .	57
3. Démonstration du Théorème 2.1 (Solutions fortes) . . . . .	59
3.1. Unicité . . . . .	59
3.2. Problème pénalisé . . . . .	59
3.3. Estimations à priori . . . . .	60
3.4. Passage à la limite . . . . .	62
4. Démonstration du Théorème 2.3 (Solutions fortes) . . . . .	63
5. Démonstration du Théorème 2.2 (Solutions faibles) . . . . .	65
5.1. Propriété de monotonie des solutions du problème pénalisé . . . . .	65
5.2. Démonstration du Théorème 2.2 . . . . .	66
6. Propriétés de monotonie de la solution maximum . . . . .	69
7. Problème de Stefan (1 phase) . . . . .	70
7.1. Formulation du problème . . . . .	70
7.2. Transformation du problème . . . . .	71
8. Remarques générales sur les conditions aux limites et les opérateurs . . . . .	75
8.1. Conditions aux limites . . . . .	75
8.2. Opérateurs . . . . .	75

9. Problème de Stefan (2 phases) . . . . .	76
9.1. Orientation . . . . .	76
9.2. Formulation du problème . . . . .	76
9.3. Transformation du problème . . . . .	77
10. Compléments et problèmes . . . . .	81
Bibliographie du Chapitre 2 . . . . .	84
<b>CHAPITRE 3 - Quelques problèmes asymptotiques . . . . .</b>	<b>87</b>
1. Problème de l'homogénéisation . . . . .	87
1.1. Notations . . . . .	87
1.2. Position des problèmes . . . . .	88
1.3. Motivation . . . . .	89
1.4. Un exemple unidimensionnel . . . . .	90
2. Développements asymptotiques par échelles multiples . . . . .	92
2.1. Orientation . . . . .	92
2.2. Echelles multiples . . . . .	93
2.3. Calcul d'identification . . . . .	94
2.4. Le problème homogénéisé . . . . .	97
2.5. Le cas unidimensionnel . . . . .	99
3. Méthodes énergétiques . . . . .	100
3.1. Orientation . . . . .	100
3.2. Théorème d'homogénéisation . . . . .	100
3.3. Identité des formules . . . . .	105
3.4. Correcteurs . . . . .	106
4. Problèmes non linéaires . . . . .	109
4.1. Homogénéisation des I.V. . . . .	109
4.2. Estimation d'erreur dans la pénalisation . . . . .	110
4.3. Démonstration du Théorème 4.1 . . . . .	112
4.4. Remarque générale sur l'homogénéisation des I.V. . . . .	113
4.5. Opérateurs non linéaires . . . . .	114
5. Extensions et problèmes . . . . .	115
Bibliographie du Chapitre 3 . . . . .	117
<b>CHAPITRE 4 - Temps d'arrêts optimaux et I.V. . . . .</b>	<b>119</b>
1. Equations différentielles de Ito et problèmes de temps d'arrêt . . . . .	119
1.1. Equation différentielle stochastique . . . . .	119

1.2. Le problème de temps d'arrêt . . . . .	123
2. Equivalence entre problèmes de temps d'arrêt et I.V. . . . .	125
2.1. Enoncé du premier théorème d'équivalence . . . . .	125
2.2. Construction du temps d'arrêt optimal . . . . .	128
2.3. Calculs formels . . . . .	129
2.4. Remarques sur la régularité de la solution de l'I.V. . . . .	130
2.5. Démonstrations des Théorèmes 2.1 et 2.2 . . . . .	132
3. Interprétation en théorie du contrôle des problèmes pénalisés . . . . .	133
3.1. Orientation . . . . .	133
3.2. Problème pénalisé et contrôle . . . . .	134
4. Une remarque sur les propriétés de la solution . . . . .	136
5. Compléments et problèmes . . . . .	136
Bibliographie du Chapitre 4 . . . . .	138
<b>CHAPITRE 5 - Contrôle impulsional, I.Q.V. et applications<sup>(1)</sup></b> . . . . .	139
1. Contrôle impulsional . . . . .	139
1.1. Équations d'état. Variable de contrôle . . . . .	139
1.2. Exemple modèle . . . . .	141
1.3. Fonction coût . . . . .	141
1.4. Problème de contrôle . . . . .	143
1.5. Contraintes sur l'état . . . . .	143
1.6. Cas déterministe . . . . .	144
2. I.Q.V. (Introduction formelle) . . . . .	144
2.1. Les inéquations d'évolution . . . . .	144
2.2. Les conditions aux limites . . . . .	147
2.3. Le cas stationnaire . . . . .	148
2.4. Notations . . . . .	148
2.5. I.Q.V. stationnaires . . . . .	149
2.6. I.Q.V. d'évolution . . . . .	150
2.7. Un exemple simple d'I.Q.V. sta- tionnaire . . . . .	151
2.8. Frontières libres . . . . .	153

<sup>(1)</sup> I.Q.V. = Inéquations Quasi Variationnelles.