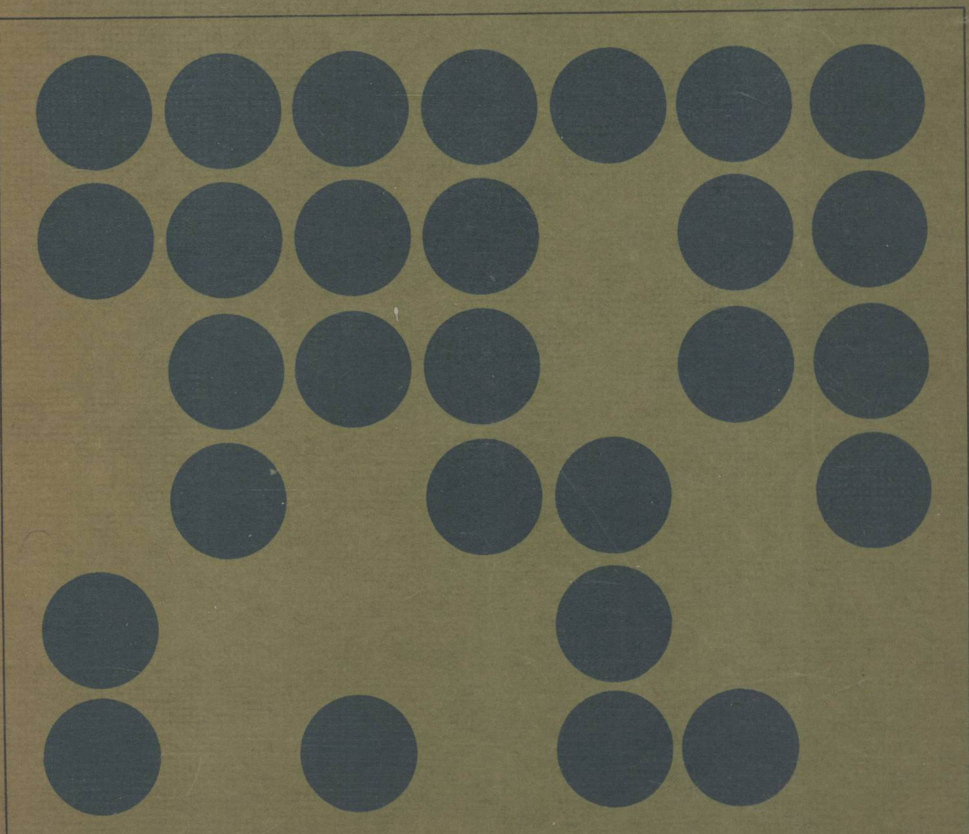
KT

Jacques Louis Lions

Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal



LES PRESSES DE L'UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal

COLLECTION DE LA CHAIRE AISENSTADT

Fondateur : Lucien Le Cam, Université de Berkeley

Directeur : Anatole Joffe, directeur du Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal

Dans la même collection

Robert Hermann, *Physical Aspects of Life Group Theory,* 1974

Mark Kac, *Quelques problèmes mathématiques en physique statistique,* 1974

S. R. de Groot, *la Transformation de Weyl et la fonction de Wigner : une forme alternative de la mécanique quantique,* 1975

Cette collection est consacrée à la publication des conférences données, depuis 1970, au Centre de recherches mathématiques de l'Université de Montréal, dans le cadre de la Chaire Aisenstadt. C'est grâce à la générosité de Monsieur André Aisenstadt, docteur en physique théorique de l'Université de Zurich, que le Centre de recherches mathématiques peut inviter des chercheurs prestigieux et publier, aux Presses de l'Université de Montréal, le texte de leur conférence.

Sur quelques questions d'analyse, de mécanique et de contrôle optimal

Jacques Louis Lions

1976
Les Presses de l'Université de Montréal
C.P. 6128, succ. «A», Montréal, Qué., Canada H3C 3J7

ISBN 0 8405 0339 3

Dépôt légal, 3e trimestre 1976 — Bibliothèque nationale du Québec

INTRODUCTION

De nombreuses questions en Mécanique et en Contrôle Optimal conduisent à des *Inéquations aux Dérivées Partielles.* Citons, par exemple, pour la *Mécanique:*

- les problèmes de Mécanique unilatérale,
- les problèmes d'élasto-plasticité,
- les écoulements de fluides non newtoniens,
- les problèmes à frontière libre du type de Stefan ou de certaines questions d'infiltration dans les milieux poreux etc.

Pour le *contrôle optimal* indiquons le contrôle de systèmes distribués, et toutes les questions de temps d'arrêt optimaux et de contrôle impulsionnel.

Ce sont *certaines* de ces questions que nous abordons ici, par les techniques des *Inéquations Variationnelles* (I.V.) ou des *Inéquations Quasi Variationnelles* (I.Q.V.), avec en outre l'étude, au Chapitre 3, de problèmes asymptotiques liés à des questions relatives *aux milieux composites* et qui conduisent à d'intéressantes questions en connection avec les problèmes de frontière libre.

Les Chapitres 1 et 2, après une rapide motivation, introduisent les outils principaux des I.V. *stationnaires* et *d'évolution.* On montre en outre au Chapitre 2 l'équivalence (en un sens convenable) entre les problèmes de Stefan et certaines

I.V. d'évolution. Le Chapitre 2 donne un théorème très général relatif aux solutions *faibles* d'I.V. d'évolution, théorème dû à F. Mignot et J.P. Puel: dans l'ensemble, en général non réduit à un élément, des solutions faibles, il existe une *solution maximum*. Presque tous les résultats des Chapitres 1 et 2 sont relatifs à des opérateurs elliptiques ou paraboliques *du* $2^{ème}$ *ordre*.

Le Chapitre 3 donne une *introduction* aux méthodes asymptotiques *d'homogénéisation* d'opérateurs elliptiques à coefficients très rapidement oscillants de manière périodique. Ce Chapitre pourra servir d'introduction à la lecture du livre de Bensoussan, Papanicolaou et l'Auteur [1] sur ces sujets (où l'on trouvera également les questions analogues pour les problèmes d'évolution, non abordés ici); cf. aussi Bibliographie du Chapitre 3.

Le Chapitre 4 étudie les *temps d'arrêt optimaux*, à partir de l'observation (cf. Bensoussan et l'Auteur [1] et Bibliographie du Chapitre 4) que ces problèmes sont *équivalents* à des I.V. En particulier, dans le cas d'évolution, et avec des hypothèses de régularité réduites au minimum sur les données, on montre que la *solution maximum* dans l'ensemble des solutions faibles (Chapitre 2) coincide avec *la fonction coût optimale* du problème des temps d'arrêt optimaux.

Le Chapitre 5 étudie le *contrôle impulsionnel*, à partir de l'observation (cf. Bensoussan et l'Auteur, Bibliographie du Chapitre 5) que ces problèmes *équivalent à des* I.Q.V. Les I.Q.V. sont étudiées, au moins dans le cas stationnaire, dans le Chapitre 5. Il est intéressant de noter que des problèmes à frontière libre de la Physique Mathématique se réduisent, par des transformations convenables, à des I.Q.V.; cette observation est dûe à C. Baiocchi (cf. Bibliographie du Chapitre 5) à propos de problèmes à frontière libre de l'hydraulique. On donne au Chapitre 5 un autre exemple intéressant, dû à J.

Mossino, d'un problème de Physique des plasmas se ramenant à une I.Q.V.

Le Chapitre 6 donne une introduction aux méthodes numériques pour les I.V. et pour les I.Q.V. Pour les I.V., il s'agit d'une brève introduction au livre de Glowinski, Trémolières et l'Auteur sur ce sujet (cf. Bibliographie du Chapitre 6). Les résultats numériques présentés sur les I.Q.V. sont succints, renvoyant pour les détails aux articles cités dans la Bibliographie.

Nous n'abordons pas ici toutes les questions d'I.V. ou d'I.Q.V. rencontrées dans le *contrôle des systèmes distribués*, renvoyant à Lions [1][2][3].

Les I.V. stationnaires ont été introduites dans Stampacchia [1], et les I.V. d'évolution dans Lions-Stampacchia [1]; la motivation était alors fournie par la Mécanique Unilatérale. D'autres exemples de Mécanique conduisant à des I.V., de type parfois nouveau, ont été étudiés ensuite dans le livre Duvaut-Lions [1], la théorie générale des I.V. étant développée par de nombreux auteurs, les questions les plus importantes étant liées à *la régularité* des solutions, question étudiée par Brézis-Stampacchia [1], Brézis [1] et de nombreux autres auteurs.

L'équivalence entre certains problèmes de frontière libre avec des I.V. *après transformation fonctionnelle* a été observée par C. Baiocchi [1], ce qui a donné lieu ensuite à de nombreux travaux. En particulier Duvaut [1] a montré (comme nous le présentons au Chapitre 2) l'équivalence entre le problème de Stefan et des I.V. d'évolution convenables.

L'équivalence entre les problèmes de temps d'arrêt optimaux et les I.V. a été observée par Bensoussan-Lions [1]. Compte tenu de l'équivalence signalée au Paragraphe précédent, on en déduit l'équivalence, après une transformation fonctionnelle, entre *les problèmes de temps d'arrêt optimaux* et *les problèmes de Stefan*. Cette équivalence avait été *antérieurement* établie par plusieurs auteurs (cf. Chernoff [1] et la bibliographie de ce travail ainsi que celle du Chapitre 4) qui ne disposaient pas de l'outil des I.V. et qui donc faisaient porter tous leurs efforts sur la démonstration, après transformation (essentiellement la transformation *inverse* de celle du type de Baiocchi: on dérivait au lieu d'intégrer!), de l'équivalence avec le problème de Stefan, étudié depuis longtemps (bien avant les I.V.) par des méthodes directes, intéressantes mais techniquement assez compliquées.

L'équivalence entre les problèmes de contrôle impulsionnel et les I.Q.V. (d'ailleurs *introduites* à cet effet!) a été observée par Bensoussan-Lions [2][3] (cf. aussi Bibliographie du Chapitre 5). C'est encore C. Baiocchi [2] qui a observé que certains problèmes de frontière libre se ramenaient à des I.Q.V.

Des problèmes ouverts sont indiqués dans le texte ou à la fin de chacun des Chapitres (qui chacun contient la bibliographie correspondante).

On a fait un effort pour que ces Notes puissent être lues sans trop de connaissances techniques préliminaires et pour que les Chapitres puissent, au moins en partie, être lus indépendamment les uns des autres.

Ces Notes ont été rédigées dans le cadre très favorable offert par la Chaire Aisenstadt. L'Auteur remercie vivement le Centre de Recherches Mathématiques, son directeur A. Joffe, les chercheurs du Centre et l'Auditoire pour leur hospitalité et leur accueil.

L'Auteur remercie également Madame Micheline Marano et Mademoiselle Johanne Marcoux pour leur excellent travail typographique.

Bibliographie de l'Introduction

C. BAIOCCHI [1], Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica, Ann. Mat. P.A. (IV), XCII (1972), p. 107-127 et C.R.A.S. 273 (1971), p. 1215-1217.

[2], Studio di un problema quasi-variazionale connesso a problemi di frontiera libera, Boll. U.M.I. 1975.

A. BENSOUSSAN et J.L. LIONS [1], Contrôle par temps d'arrêt, Applicable Analysis, 1973 et C.R.A.S. 276 (1973), p. 1411-1415.

[2], Nouvelle formulation de problèmes de contrôle impulsionnel et applications, C.R.A.S. 276 (1973), p. 1189-1192.

[3], *Temps d'arrêt optimaux et contrôle impulsionnel,* Livre en cours de publication (3 volumes) chez Hermann, Paris.

A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS et G. PAPANICOLAOU [1], *On some Asymptotics Problems, Homogeneization, Averaging and Applications,* North Holland, à paraître.

H. BREZIS [1], Problèmes unilatéraux, J.M.P.A. 1972.

H. BREZIS et G. STAMPACCHIA [1], Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques, Bull. S.M.F. 96 (1968), p. 153-180.

H. CHERNOFF [1], Optimal stochastic control, Sankhya 30 (1968), p. 221-252.

G. DUVAUT [1], Résolution d'un problème de Stefan, C.R.A.S. 276 (1973), p. 1461-1463.

G. DUVAUT et J.L. LIONS [1], *Inéquations en Mécanique et en Physique,* Dunod, 1972.

R. GLOWINSKI, J.L. LIONS et R. TREMOLIERES [1], *Approximation numérique de I.V.,* (2 Vol.), Dunod, 1976.

J.L. LIONS [1], *Sur le contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles,* Dunod, Gauthier Villars, 1968.

[2], Conférence au 14ème Congrès des Math. Canadiens, London, 1973. Lecture Notes in Economics and Math. Systems 105, Springer, 1974, p. 166-309.

[3], Remarks on the theory of optimal control of distributed systems, Univ. of Maryland, 1976.

J.L. LIONS et G. STAMPACCHIA [1], Variational Inequalities, Comm. P.A.M., XX (1967), 493-519.

G. STAMPACCHIA [1], Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, C.R.A.S. 258 (1964), p. 4413-4416.

TABLE DES MATIÈRES

(1) I.V. = Inéquations Variationnelles.

(1) I.Q.V. = Inéquations Quasi Variationnelles.