高等师范院校教学参考书

复变函数论

李锐夫　程其襄 编

人民教育出版社

内 容 提 要

本书第二版对1960年第一版作了少量修改。前三章是准备知识。第四至十章是复变函数论的基础及其应用。第十一章讨论整函数和半纯函数。第十二、十三章讨论解析开拓与多值函数。附录叙述物理应用、史略并给出部分习题答案。可作高等师范院校数学专业教学参考书之用。

高等师范院校教学参考书

复 变 函 数 论

李锐夫　程其襄 编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海日历印刷厂印装

*

开本 787×1092　1/32　印张 7 10/16　字数 183,000

1960年3月第1版

1979年10月第2版　1980年3月第3次印刷

印数 28,001—78,000

书号 13012·0392　　定价 0.56 元

目　　录

第一章　复　数

1.1. 复数 在数学分析中读者已经知道实数系统。有理数的建立方法是最初引出自然数，然后把分数 p/q 作为具有顺序的一对自然数，定义出有理数的算术运算法则。十九世纪 40 年代，数学家汉弥尔敦 (Hamilton) 利用实数，依类似的方法建立复数理论的基础。

具有一定顺序的一对实数 a 和 b 的组合叫做一个复数。设 A 表这个复数，则用符号 $A=(a,b)$ 表示。当 $b=0$ 时，$(a,0)$ 定义为实数 a，即 $(a,0)=a$。因此全部实数是全部复数的一部分。

对于这样建立起来的复数，我们必须规定其运算方法。由于实数是复数的特例，规定复数算术运算的一个基本问题是要求复数运算的结果如推到实数特例时，能够和实数运算的结果相符合，同时也要求复数算术运算能够满足实数算术运算的一般公理以构成复数体。

1.2. 复数的算术运算 1. 设

$$A=(a,b),\quad B=(c,d)$$

是任意两个复数，则当而只当

$$a=c,\quad b=d$$

时，A 和 B 叫做相等，写为

$$A=B。$$

如 $A=B$，则 $B=A$；若 C 是另一个复数，而 $A=B$，$B=C$，则 $A=C$。

任意两个复数间是没有大小关系的，但如两个复数 A 和 B 不

相等，则写为

$$A \neq B。$$

2．所谓两个复数的算术运算是一种结合，由它可以产生第三个复数。

设　　　$A=(a, b), B=(c, d), C=(e, f), \cdots$

为任何复数。第一种结合是 $A+B$，叫做 A 加 B，其结果命为 $(a+c, b+d)$，叫做 A, B 的和。所以

$$(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d) \tag{1}$$

求和的方法叫做加法。

显然加法是可能且唯一的。它是适合于下列两个运算律：

Ⅰ．交换律：$A+B=B+A$；

Ⅱ．结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$。

加法的反运算叫做减法。设由 A，B 两个复数求另一个复数 $X=(x, y)$，使满足方程

$$A+X=B。$$

这个方程是相当于下列两个方程：

$$a+x=c, \quad b+y=d。$$

因此 X 是存在且唯一的，其结果写为

$$X=B-A,$$

就是

$$(c, d)-(a, b)=(c-a, d-b)。\tag{2}$$

如 $A=B$，则等式(2)的右端是$(0, 0)$，这个数叫做零，用符号 0 表示，即 $0=(0, 0)$。零在加法运算中有以下的性质：

$$A+0=0+A=A。$$

零的存在是唯一的；因为有一个 0，且

$$A+0=A,$$

已如上面所说，假定另有一个零 $0'$ 存在，则应有

$$A+0'=A,$$

在这两个方程中分别令 $A=0'$ 和 $A=0$，得

$$0'+0=0' \quad 和 \quad 0+0'=0,$$

由加法交换律

$$0+0'=0'+0,$$

得

$$0'=0,$$

所以只能有一个零。

对每一个复数 $A=(a, b)$ 有一个而只有一个复数 $(-a, -b)$ 和它对应，这叫做负 A，写为 $-A$；就是

$$-A=(-a, -b)。$$

A 和 $-A$ 满足下列关系式：

$$A+(-A)=0=(-A)+A。$$

不难证明一个复数的负数是该数本身的必要和充分条件是该数为 0。

3．两个复数 A 和 B 的第二种结合是 $A\cdot B$，或写为 AB，这叫做 A 乘 B，其结果命为 $(ac-bd, ad+bc)$，叫做 A 和 B 的积。所以

$$(a, b)(c, d)=(ac-bd, ad+bc)。\tag{3}$$

求积的方法叫做乘法。

显然乘法是适合于下列三个运算律：

Ⅰ．交换律：$AB=BA$；

Ⅱ．结合律：$A(BC)=(AB)C$；

Ⅲ．分配律：$(A+B)C=AC+BC$。

乘法的反运算叫做除法，就是已知两个复数 A 和 B，求一个复数 $X=(x, y)$，使满足方程：

$$AX=B。$$

如 $A\neq 0$，除法是可能且唯一的；因为以上方程相当于下列两

个方程:

$$ax-by=c, \qquad bx+ay=d。$$

这个方程组的系数行列式是$a^2+b^2\neq 0$,所以他们对x,y有唯一的解,就是

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \qquad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}。$$

因此,当$A\neq 0$, 我们用符号$\frac{B}{A}$代表X,就是

$$\frac{(c,d)}{(a,b)}=\left(\frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \ \frac{ad-bc}{a^2+b^2}\right)。 \tag{4}$$

在等式(4)中当$A=B$,命其结果为I,即

$$\mathrm{I}=(1,0)$$

这叫做单位数或一。它在乘法运算中有以下的性质:

$$A\cdot\mathrm{I}=\mathrm{I}\cdot A=A。$$

4. 由1.1节,我们定义$(a, 0)=a$,它包括$0=(0, 0)$和$\mathrm{I}=(1,0)$。就复数的观点说,我们将$(a,0)$叫做复数域中的实数。设$a=(a,0)$, $b=(b,0)$,则

$$a\pm b=(a\pm b,0),$$

$$ab=(ab,0),$$

$$\frac{b}{a}=\left(\frac{b}{a}, \ 0\right) \quad a\neq 0。$$

因此复数域中的实数四则运算的结果亦是复数域中的实数。所以复数域中的实数不但与实数是一一对应,而且在四则运算上亦成同构的。

5. 由乘法

$$(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1,$$

因此复数(0, 1)和$\sqrt{-1}$的性质相同,它是方程 $x^2+1=0$ 的一个根。命

$$(0,1)=i,$$

i 叫做虚数单位。

由于 $$(0,1)(b,0)=(0,b),$$

所以 $$(0,b)=ib。$$

因 $$A=(a,b)=(a,0)+(0,b),$$

我们将复数 A 写为

$$A=a+ib。$$

由以上的规定，复数的算术运算法则和实数的算术运算法则完全一致，只是将符号 i 看做一个数，而将其平方代以 -1。

当 $A=a+ib$，a 叫做 A 的实数部，b 叫做 A 的虚数部，写为

$$a=RA, \qquad b=IA。$$

1.3. 共轭复数，绝对值，不等式 1. 设 $A=a+ib$，则 $a-ib$ 叫做 A 的共轭复数。用符号 $\bar{A}$ 表示，即

$$\bar{A}=a-ib。$$

显然，$\bar{A}$ 的共轭复数是 A，所以 $\bar{\bar{A}}=A$。A 是实数的必要与充分条件是 $A=\bar{A}$。

容易证明

$$\overline{A+B}=\bar{A}+\bar{B} \tag{1}$$

及

$$\overline{AB}=\bar{A}\bar{B}。 \tag{2}$$

若 $AC=B$，因 $\bar{A}\bar{C}=\bar{B}$，得

$$\overline{\left(\frac{B}{A}\right)}=\frac{\bar{B}}{\bar{A}}。 \tag{3}$$

由此，设 $R(A,B,C,\cdots)$ 表示对复数 $A,B,C,\cdots$ 进行算术运算的结果，则

$$\overline{R(A,B,C,\cdots)}=R(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\cdots)。\tag{4}$$

作为一个应用，若 ζ 是方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n=0\tag{5}$$

的一个根，则 $\bar{\zeta}$ 是方程

$$\bar{a}_0z^n+\bar{a}_1z^{n-1}+\cdots+\bar{a}_n=0$$

的根。

特例，若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 是实数，则 ζ 与 $\bar{\zeta}$ 都是方程 (5) 的根。所以实系数整方程如有复数根，则其共轭复数亦是它的根。

2. 因 $A\bar{A}=a^2+b^2\geqslant 0$, a^2+b^2 的算术平方根是非负实数，它叫做 A 的绝对值，或模，用符号 $|A|$ 表示，即

$$|A|=+\sqrt{a^2+b^2}。$$

由此

$$A\bar{A}=|A|^2。\tag{6}$$

应用等式(6)，对任何两个复数 A, B

$$|AB|^2=(AB)(\bar{A}\bar{B})=(A\bar{A})(B\bar{B})=|A|^2\cdot|B|^2,$$

由于绝对值不为负数，故得

$$|AB|=|A|\cdot|B|,\tag{7}$$

这个结果可以推广到任意有限个复数乘积的绝对值。

如 $A\neq 0$, $AB=C$, 由 $B=\dfrac{C}{A}$, 得

$$\left|\frac{C}{A}\right|=\frac{|C|}{|A|}。\tag{8}$$

对于复数相加的绝对值不如乘除的简单。因

$$|A+B|^2=(A+B)(\bar{A}+\bar{B})=A\bar{A}+(A\bar{B}+\bar{A}B)+B\bar{B},$$

故得

$$|A+B|^2=|A|^2+|B|^2+2R(A\bar{B})。\tag{9}$$

同样

$$|A-B|^2=|A|^2+|B|^2-2R(A\bar{B})。\tag{10}$$

(9)和(10)相加，又得

$$|A+B|^2+|A-B|^2=2(|A|^2+|B|^2)。\tag{11}$$

3．现在来导出几个重要不等式。因在复数域中没有大小的关系，所有不等式都是关于复数的绝对值的。

首先，由绝对值的定义

$$\begin{aligned}-|A|\leqslant RA\leqslant|A|,\\ -|A|\leqslant IA\leqslant|A|。\end{aligned}\tag{12}$$

将此结果应用到等式(9)，注意 $R(A\bar{B})\leqslant|A\bar{B}|=|A|\cdot|B|$ 得

$$|A+B|^2\leqslant(|A|+|B|)^2$$

即

$$|A+B|\leqslant|A|+|B|。\tag{13}$$

这叫做三角形不等式①。

因 $$|A|=|(A-B)+B|\leqslant|A-B|+|B|,$$

所以 $$|A-B|\geqslant|A|-|B|。$$

同样理由 $$|A-B|\geqslant|B|-|A|。$$

故得

$$|A-B|\geqslant||A|-|B||。\tag{14}$$

1.4．复数在平面上的表示 在平面上取一点 O 和一点 M，以 O 为原点，过 OM 的直线为 x 轴，OM 为单位长。于是任一复数 $a+ib$ 可以这个平面上以 a 为横坐标，b 为纵坐标的一点 A 来表示。反之，对平面上任一点 $A(a,b)$，我们可以有一个复数 $a+ib$ 和它相对应。因此全部

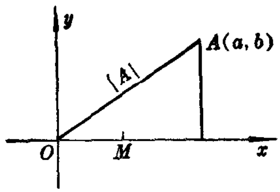

图 1.1.

① 在1.4节读者亦可用几何方法导出这个不等式，并且可以了解取名为三角形不等式的原因。这里等号只当$A\bar{B}\geqslant0$时成立。

复数和平面上所有的点成一一对应。x 轴叫做实轴，过 O 点和 Ox 垂直的 y 轴叫做虚轴(图 1.1)。这样规定的平面叫做复数平面①。

复数的这种几何表示法有很大的优点，它可以将许多关于复数的结果直接作几何的解释。例如复数域中的实数可用 Ox 轴上的点来表示，两个共轭复数可以用关于 x 轴成对称的两点来表示，复数 A 的绝对值 $|A|$ 表示平面上点 A 和原点的距离。若 $A=a+ib$，$B=c+id$，则

$$|A-B|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

是平面上表 A, B 两复数的点的距离。

以上这些简单例子说明了复数的几何表示法所起的作用。函数论的许多地方是由这样的表示法和几何联系起来。函数论中关于复数的若干非常重要的基本性质如不用几何观念，则将显示出非常的困难。

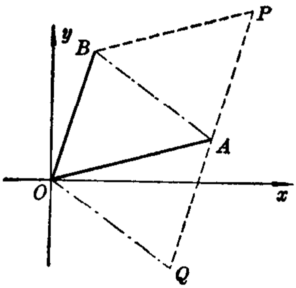

图 1.2.

复数的算术运算亦可用几何作图法来表示。现在先说明加和减的作图方法。

设 $A=a+ib$，$B=c+id$，在平面上作出代表 A，B 的两点。作平行四边形如图所示，则点 P 是 $A+B$，点 Q 是 $A-B$(图 1.2)。

1.5. 复数的幅角 1. 设 $A=a+ib$。由方程

$$a=|A|\cos\theta,\quad b=|A|\sin\theta$$

$\left(即\ \tan\theta=\dfrac{b}{a}\right)$所定的 θ 叫做复数 A 的幅角，写为

---

① 亦叫做埃根平面或高斯平面，用以纪念创始人埃根(Argand)和高斯(Gauss)。

$$\theta=\operatorname{Arg} A_{\circ}$$

由 1.4 节的图，读者可以了解 θ 是 OA 和 Ox 所夹的角。

如 $A\neq 0$，则 A 的幅角有无穷个；因为如 θ 是 $\operatorname{Arg} A$ 的一个值，则 $\theta+2n\pi$（n 为整数）亦为 $\operatorname{Arg} A$ 的值。满足

$$-\pi<\operatorname{Arg} A\leqslant\pi$$

的幅角叫做主值，记作 $\arg A$。

如 $A=0$，则 a, b 皆为 0；复数 O 的幅角是不定的。

设 $A\neq 0$，$|A|=r$，则复数 A 又可写为

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta)_{\circ}$$

2．设
$$A_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1);$$
$$A_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2),$$

则由平面三角公式，得

$$A_1A_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)],\qquad(1)$$

所以

$$\operatorname{Arg}(A_1A_2)=\operatorname{Arg} A_1+\operatorname{Arg} A_{2\circ}\qquad(2)$$

这个公式可以推广到任意有限个复数的相乘积。

注意，公式(2)中的等式应理解如下：对于 $\operatorname{Arg}(A_1A_2)$ 的任一值，必有 $\operatorname{Arg}A_1$ 与 $\operatorname{Arg}A_2$ 的值，使等式成立；反之亦然。其次，由于 0 的幅角是没定义，公式(2)只当 A_1 和 A_2 都不等于 0 时才有意义。

在相除时，如 A_1，$A_2\neq 0$，则

$$\operatorname{Arg}\frac{A_2}{A_1}=\operatorname{Arg} A_2-\operatorname{Arg} A_{1\circ}\qquad(3)$$

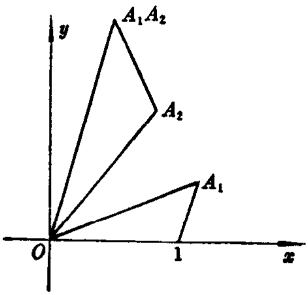

图 1.3.

3．由公式(2)和(3)，可以用几

何方法作出 A_1A_2 和 $\frac{A_2}{A_1}$。

因以 $O, 1, A_1$ 为顶点的三角形和以 O, A_2, A_1A_2 为顶角的三角形是相似的，所以已知 A_1, A_2，作相似三角形就可以得到代表 A_1A_2 的点(图 1.3)。

除法的作图是相同的，只是相似三角形的顶点是 $O, 1, A_1$ 和 $O, \frac{A_2}{A_1}, A_2$。

1.6. 复数的乘幂和方根 1. 设 A 为任何不为零的复数:

$$A=r(\cos\theta+i\sin\theta)。$$

由 1.5节，当 n 为正整数时

$$A^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)。\tag{1}$$

这个公式对 $n=0$ 时亦成立。我们定义 $A^{-1}=\frac{1}{A}$。因

$$A^{-1}=r^{-1}(\cos\theta-i\sin\theta)=r^{-1}[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)],$$

所以当 n 为负整数时，(1)亦成立。

当 $r=1$，得到德摩弗 (de Moivre) 公式:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta。\tag{2}$$

因此，$\cos n\theta$ 和 $\sin n\theta$ 可以用 $\cos\theta, \sin\theta$ 表达出来。

2. 当 $A\neq0$，求 A 的 n 次根是相当于解二项方程:

$$z^n=A。\tag{3}$$

令 $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$，则方程(3)化为

$$\rho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=r(\cos\theta+i\sin\theta)。\tag{4}$$

显然
$$\rho^n=r,\quad n\varphi=\theta,$$

故得
$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

其中 $\sqrt[n]{r}$ 表正数 r 的正 n 次根。