实变理论

M.R.施皮格尔 著
王　林　梁有雄 译
黄　践 校

湖南大学出版社

实变理论

THEORY AND PROBLEMS
OF
REAL VARIABLES

M.R. 施皮格尔 著
王 林 梁有雄 译
黄 践 校

湖南大学出版社

THEORY AND PROBLEMS
OF
REAL VARIABLES

MURRAY R. SPIEGEL, Ph.D.

实　变　理　论

M.R. 施皮格尔著
王　林　梁有雄 译
黄　毁　　　　校
责任编辑　朱　华

湖南大学出版社出版发行
（长沙岳麓山）
湖南省新华书店经销　　海南新华印刷厂印刷

787×1092　32开 11.375印张 225千字
1988年6月第1版　　1988年6月第1次印刷
印数：0001——2000册
ISBN 7—314—00221—5／O·7
定价：2.70元

说　明

实变函数论是高等院校数学专业开设的重要基础课程之一。M.R.施皮格尔所著的《实变理论》是一本很好的教学参考书。它对于从事科学、工程学和数学工作的读者，也将是一本有价值的读物。

本书内容丰富，叙述简明，与数学分析等课程联系紧密，范例也较多，有足够的补充题供练习时选用。

译稿的前言、目录及第一章由梁有雄译出，第二章至第八章以及附录A、B、C均为王林所译。译稿得到湖南大学黄践教授的严格审校，得到东北师范大学钱泽均副教授的支持和帮助，在此谨向二位先生致以谢意！

由于译者水平有限，没有经验，译稿可能有错漏，恳请读者和专家同志们指正。

译者　1986年6月

前　言

二十世纪初，对现代数学分析的一个最重大的贡献就是勒贝格发展的测度论和积分论。从应用及理论的观点看，勒贝格测度和积分比普通的黎曼积分有很多优越之处。它是建立各种数学分支，诸如概率与统计以及傅立叶级数理论等的必不可少的基础。

近年来，勒贝格理论已作为实变函数论（也称实变或实分析）的传统教程中的精华。这本书的目的是介绍勒贝格测度和勒贝格积分的基本知识以及应用中需要掌握的那些实变理论的重要内容。

本书作为实变理论的所有通用标准教科书或类似教程的一本补充参考书，它对于在教学中需要用到一些勒贝格理论知识的其他课程也将是很有用的。此外，它对于希望在这些重要理论方面能入门的科学、工程学与数学界的读者也是有价值的。

本书每章开始都对定义、原理、定理以及例证和其他必须说明的内容给予清楚的叙述，接着是解答题和附加题。解答题为例证和加强理论服务。基本原理的反复论证，对那些觉得自己基础不牢靠的学生来说是必需的和有效的。多数定理的证明及一些基本结论的推导都包括在习题解答之中。大多数的附加题则作为每章内容的复习和补充。

专题包含勒贝格测度论、可测函数、勒贝格积分及其性

质、微分法与积分法。特点是在平均收敛和傅立叶级数的应用等章节里，包含有重要的黎斯—费歇耳定理以及在三个附录中介绍的黎曼积分、傅立叶级数的可求和性及二重勒贝格积分与富比尼定理。在第一章里给出实变理论的基本概念，包括集合、函数、函数连续性以及按学生的具体情况认为需要补充的一些知识。

这本书包含的内容比其他同类教程多。这是一本对上述专题的证明及进一步的研究有用的参考书。

我借此机会向丹尼尔·施姆（Danid schaum）尼科拉·门弟（Nicola Monti）和享利·海登（Hemy Hayden）在编辑方面给予的协助表示感谢。

M. R. 施皮格尔
伦塞勒工业大学
1969年10月

目　录

第一章　基本概念

集　合

集合是数学中的一个基本概念。它可以看作一批事物的全体，这些事物称为集合的元素或元。除特别说明外，一般地，我们用大写字母表示集合，如A、B、X、S等，用小写字母表示元素，如a，b，x等。如果元素a属于集合S，就写作$a\in S$，如果a不属于S，就写作$a\notin S$，如果a与b属于S，就记为$a,b\in S$。

一个集合可以用逗号把它的元素分开列举在大括号内，倘若这样做不行，则可用所有元素的某些性质来表示。第一种表示集合的方法称为列举法，第二种表示法称为性质法。

例1．英语字母中所有元音字母组成的集可用列举法表示为$\{a,e,i,o,u\}$或可用性质法表示为$\{x：x$为元音字母$\}$，读作“满足x是元音字母的所有元素x组成的集”。注意，冒号“：”读作“满足”。

例2．集合$\{x：x$为平面内的三角形$\}$是平面内所有三角形组成的集合。注意，列举法在这里不能使用。

子　集

如果集合A的每个元素也是集合B的元素，我们就称A是B的一个子集．记为$A\subset B$或$B\supset A$．分别读作“A包含于B”或“B包含A”．如果$A\subset B$且$B\subset A$，我们则称A与B相

等且记为$A=B$。

如果A不等于B，则记为$A\neq B$。

如果$A\subset B$，但$A\neq B$，则称A为B的真子集。

显然，对任意的集合A都有$A\subset A$。

例3．$\{a,i,u\}$是$\{a,e,i,o,u\}$的一个真子集。

例4．$\{i,o,a,e,u\}$是$\{a,e,i,o,u\}$的一个子集但不是真子集。事实上，这两个集是相等的。注意，这仅是元素的重排，而并不改变集合。

对任意集合A、B、C，下面的定理是正确的。

定理1－1，若$A\subset B$、$B\subset C$，则$A\subset C$。

全集与空集

在许多情况下，我们只限于讨论某特殊集合的子集，这个特殊集称为讨论的全集〔或简称为全集〕全集或空间表示为U，一个空间的元素通常称为空间的点。

考虑一个元素也没有的集合是有用处的。这样的集合称作空集，用ϕ表示，它是任意集合的子集。

实　数

就本书来说，大多数场合用到一个重要的集合是实数集R，假定学生在微积分学中已经掌握了许多实数的性质。在几何直观上，常常用直线上的点来表示每一个实数，反之亦然。这样的直线称为实轴〔见图1－1〕，值得一提的是点组成的集或更确切地说点集就是实数集，反之亦然。

例如$\{x: a<x<b\}$是R中一个开区间，通常简单地表示为$a<x<b$或(a,b)；$\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$是R中一个闭区间，

简记为$a\leqslant x\leqslant b$或$[a,b]$；$\{x: a<x\leqslant b\}$或$\{x: a\leqslant x<b\}$是R中半开（或半闭）区间。

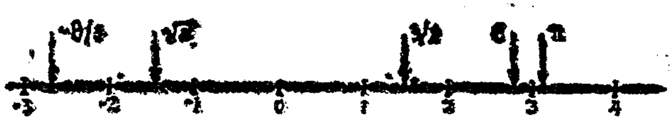

图 1—1

为方便起见，我们通常把实数集扩大到包括$-\infty$与$+\infty$或∞，于是$\{x: -\infty<x<\infty\}$可简记为$-\infty<x<\infty$或$(-\infty, \infty)$就是R。

下面是同学们熟悉了的实数集R的重要子集。

1. 自然数集$\{1, 2, 3, \cdots\}$在计数里使用，这个集通常叫做正整数集，记为N。

2. 整数集包含元素$0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$，记为Z。这个集合是由正整数集$\{1, 2, 3, \cdots\}$、负整数集$\{-1, -2, -3, \cdots\}$及零元素组成的集合$\{0\}$组成。注意，$N\subset Z$。

3. 有理数集包含的元素如$\frac{2}{3}$，$-5/2$等等，是由整数P与不为零的整数g的商P/g构成的，这个集记为Q，注意$Z\subset Q$。

4. 无理数集，由不是有理数的实数组成，如$\sqrt{2}$，π，$\sqrt[3]{5}$，e等。

尽管几何直观在论及实轴上的点集时有一定的作用，但我们将会看到这个直观不可能总是可行的。

完备性或上确界公理

一个实数μ称为实数集S的上界是指，如果对所有$x\in$

S,都有$x \leqslant \mu$. 如果能找到一个上界P，使$P \leqslant \mu$，对所有上界μ成立，则P称为S的最小上界或上确界，简记为

l.u.b.S或supS。

以下公理把实数集的任何真子集区分出来（例如，有理数集）

完备性或上确界公理：如果一个非空实数集有上界，则必有上确界。

类似的方法，我们可以定义S的下界和最大下界或下确界，简记为g.l.b.S或infS,并且可以证明：如果一个非空实数集有下界，则它必有下确界。

如果一个集合既有上界又有下界，则称它是有界的。

文氏图

一个全集U可以用一个长方形内部的点构成的集合几何地表示出来。在这种情况下，U的子集〔如图1—2中阴影部分A与B〕可以用圆周内部的点所成的集合来表示，这样的图形称为文氏图，通常利用它的几何直观来证明集合间的关系。

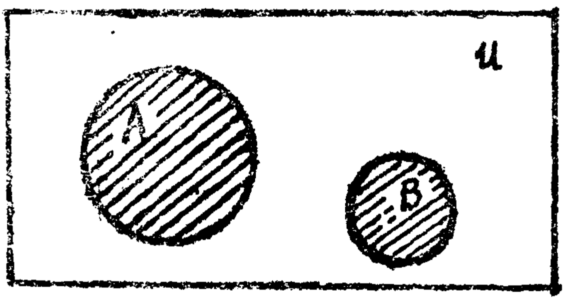

图1—2

集合的运算

1. **并集** 属于A或B或既属于A又属于B的所有元素（或点）组成的集合，称为A与B的并，记为$A\cup B$〔图1—3阴影部分〕

2. **交集** 属于A且属于B的所有元素组成的集合称为A与B的交，记为$A\cap B$〔图1—4阴影部分〕。

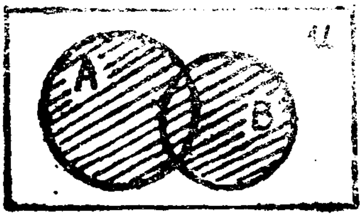

图1—3

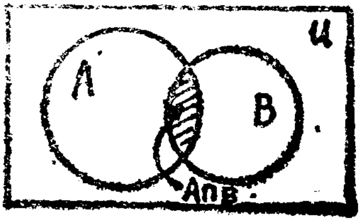

图1—4

两个集合A与B满足$A\cap B=\phi$，即没有共同的元素，称为不相交的集，图1—2中A与B不相交。

3. **差集** 含有A中所有不属于B的元素的集合称为A与B的差集，记为$A-B$〔图1—5阴影部分〕。

4. **余集** 如果$B\subset A$，则$A-B$称为B关于A的余集，记为$\widetilde{B}_A$〔图1—6中阴影部分〕.

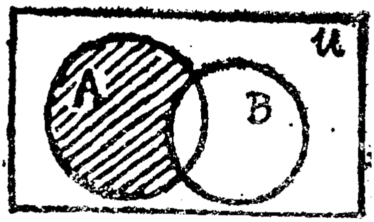

图1—5

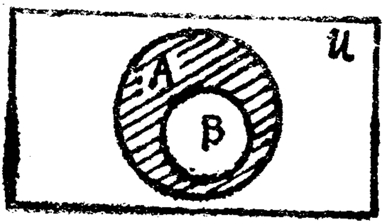

图1—6

如果$A=u$，u为全集，我们把$u-B$简称为B的余。记为$\tilde{B}$〔图1—7阴影部分〕，$A\cup B$的余记为$(A\cup B)^{\sim}$

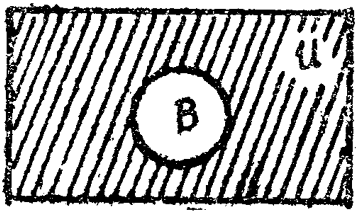

图1—7

集合的有关定理

定理1—2 $A\cup B=B\cup A$ 并的交换律

定理1—3 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$ 并的结合律

定理1—4 $A\cap B=B\cap A$ 交的交换律

定理1—5 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$ 交的结合律

定理1—6 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 第一分配律

定理1—7 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ 第二分配律

定理1—8 $A-B=A\cap\tilde{B}$

定理1—9 如果$A\subset B$，则$\tilde{A}\supset\tilde{B}$或$\tilde{B}\subset\tilde{A}$

定理1—10 $A\cup\phi=A$，$A\cap\phi=\phi$

定理1—11 $A\cup U=U$，$A\cap U=A$

定理1—12a $(A\cup B)^{\sim}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$ 德摩根第一定律

定理1—12b $(A\cap B)^{\sim}=\tilde{A}\cup\tilde{B}$ 德摩根第二定律

定理1—13　$A=(A\cap B)\cup(A\cap\tilde{B})$　对任意集合A与B都成立

定理1—12_a，1—12_b与定理1—13可以推广〔见习题1.71与1.76〕

如果我们用符号$A+B$代替$A\cup B$，用AB代替$A\cap B$，那么上面许多关于集合的代数运算结果变成实数的代数运算是很有趣的。例如定理1—3与1—6分别变为$A+(B+C)=(A+B)+C$与$A(B+C)=AB+AC$,但不论如何，终究不能依赖类似的表示法。例如，定理1—7变成为

$A+BC=(A+B)(A+C)$作为实数运算就不对了。

对偶原理

集合包含关系的任何正确结论中，如果我们用交代替并，用并代替交，各个集合分别用其余集代替，并且倒转包含符号$\subset$与$\supset$，那么所得结果仍然是正确的。

笛卡尔乘积

所有有序对(x,y)，其中$x\in A$，$y\in B$，组成的集称为A和B的笛卡尔乘积，记为$A\times B$.笛卡尔乘积$R\times R$是解析几何中常见的xy平面.一般地，$A\times B\neq B\times A$。

类似地，所有有序三元数组(x,y,z)其中$x\in A$，$y\in B$，$z\in C$，组成的集是A、B和C的笛卡尔积。记为$A\times B\times C$。

函　　数

从集X到集Y的一个函数或映射f，通常写作f，$x\to y$，