

数学物理方法

R. 柯朗 著
D. 希尔伯特

II

科学出版社

数学物理方法

卷 II

R. 柯 朗 著
D. 希尔伯特

熊 振 翔 譯
楊 应 辰

科学出版社

1977

内 容 简 介

本书系一经典性名著。

本书系统地提供了为解决各种重要物理问题所需的基本数学方法。第Ⅱ卷的内容基本上与第Ⅰ卷无关，是从数学物理的观点来处理偏微分方程理论的，其中包括：一阶偏微分方程一般理论，高阶偏微分方程，势论和椭圆型微分方程，两个自变量和多于两个自变量的双曲型微分方程。

本书内容十分丰富，可供数学、物理、力学等方面的研究工作者、教师和学生参考。

R. Courant and D. Hilbert

METHODS OF MATHEMATICAL PHYSICS

Vol II

1962

数 学 物 理 方 法

卷 Ⅱ

R. 柯朗 D. 希尔伯特 著

熊振翔 杨应辰 译

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1977年10月第一版 开本：787×1092 1/32

1977年10月第一次印刷 印张：39 1/3

印数：0001—14,920 字数：742,000

统一书号：13031·530

本社书号：778·13—1

定 价：3.80 元

英文版原序摘译

本卷讲偏微分方程理论，特别是讲这一广阔领域中有关物理学概念与力学概念的那些部分。但即使只限于此，求全似乎也是难以办到的。书中所选内容，在一定程度上偏于我个人的经验与兴趣。本书的意图在于，通过着重讲解概念与方法而不是罗列定理与事实，并且通过由初等水平的内容引导读者接触本门科学正在探讨中的各种问题，使得数学分析的这一重要分枝比较易于掌握。

将近四十年以前，我曾和 David Hilbert 讨论过编写数学物理一书的计划。虽然 Hilbert 未能亲自参与这计划的实现，但我希望这部著作，特别是本卷，能反映他的科学精神，即总是坚定地面向数学问题的切要核心而反对只追求形式上的普遍性。在讲述各个题材时，我们将首先致力于典型的特例，因为它们具体而生动，从而富于启发性，并能显示出其内在抽象问题的中心思想。对一些个别现象，我并不把它们贬为特例来看待，而是要以此带领读者一步步地走到制高点，引出一般理论来，从而可以居高临下，把“较低水平”的各个细节看得更清楚，综合得更好，掌握得更牢。为了适应学与教这种有机过程，我喜欢用归纳方法来引述，这样有时就有损于简练，而远在用演绎的、引经据典式的讲法是能够达到的。

本书在主要内容上是自成一体的。它相当于 1937 年问世的德文版“数学物理方法”卷 II。原著后来被纳粹德国文化部禁止发行。其后，我的挚友 Ferdinand Springer 被迫离去他的著名出版社的领导职务。1943 年在美国政府的许可下由综合科学出版社 (Interscience Publishers) 再版而使此书得以流传下来。其后，就一直准备用英文全部改编出版。在这一段长时间里，本门科学的进展已很可观，我也对此力求获得更全面的了解。这些进展，就我个人作为这些方面的积极工作者与学习者所参与到的范围来说，自然都反映在本书中了。

读者从目录可以看出本书所涉范围。它几乎在每个重要细节上都不同于德文原著。例如，特征理论以及特征对波的传播理论的作用，现在较之二十五年以前有可能论述得更充分了。还有，由 Sobolev 和 Friedrichs 阐明的微分方程弱解的概念，虽已写入德文版中，现在则放在讲述广义函数(理想函数)论的章节中。广义函数是由 Lau-

rent Schwartz 引入并称之为“分布”的。现在它已经成为高等微积分的不可缺少的工具了。第六章的附录给出了这个理论的浅述。另一方面,德文版最后一章的材料,特别是关于椭圆型微分方程解的存在的讨论,却未列入本卷中。这些材料将在论述解的结构第三卷中讲到。该卷较简短,其中还包含着有关的近代数学的概述。

现在问世的这本书,在格式上、内容的完整上、难易的程度上肯定都是参差不齐的。但我仍然希望它对我的同学们——不管他们是初学者、专家、数学家、其它行业的科学家或工程师——都会有用。书中涉及的内容水平不一,这也许反而能使读者通过较浅近的部分更易于进入整个领域。

一些在我的研究范围以外的成果,可能在本书里报道得不够,甚或有所忽视,对此我深有自知之明而只能表示歉意。这些缺点不久以后将有其它著作来弥补,例如即将出版的 Gårding 和 Leray 关于他们自己的卓越成果所写的书。

R. 柯朗

1961 年 11 月于纽约

目 录

英文版原序摘译

第一章 引 论

§ 1. 关于各种解的一般知识	2
1. 例	2
2. 已给函数族的微分方程	6
§ 2. 微分方程组	9
1. 微分方程组和单个的微分方程等价的问题	9
2. 常系数线性方程组的消去法	11
3. 确定的、超定的、欠定的方程组	12
§ 3. 特殊微分方程的求积法	14
1. 分离变量法	14
2. 用叠加法构造更多的解. 传热方程的基本解. Poisson 积分	16
§ 4. 两个自变量的一阶偏微分方程的几何解释. 完全积分	17
1. 一阶偏微分方程的几何解释	17
2. 完全积分	18
3. 奇异积分	20
4. 例	21
§ 5. 一阶线性和拟线性微分方程的理论	22
1. 线性微分方程	22
2. 拟线性微分方程	24
§ 6. Legendre 变换	25
1. 对于二元函数的 Legendre 变换	25
2. 对于 n 元函数的 Legendre 变换	27

3. Legendre 变换在偏微分方程上的应用	27
§ 7. Cauchy 和 Kowalewsky 存在定理	30
1. 引言和例	30
2. 化为拟线性微分方程组	34
3. 初始流形上的导数的确定法	36
4. 解析微分方程的解的存在性的证明	38
4 a. 关于线性微分方程的一件注意事项	42
4 b. 关于非解析微分方程的一个附注	42
5. 关于临界初始数据的几点注记. 特征	43
第一章附录 I 关于极小曲面的支持函数的 Laplace 微分方程	44
第一章附录 II 一阶微分方程组和高阶微分方程组	45
1. 启发性的话	45
2. 两个一阶偏微分方程所成的组和一个二阶微分方程等价的条件	46

第二章 一阶偏微分方程的一般理论

§ 1. 两个自变量的拟线性微分方程的几何理论	49
1. 特征曲线	49
2. 初值问题	50
3. 例	52
§ 2. n 个自变量的拟线性微分方程	54
§ 3. 两个自变量的一般微分方程	59
1. 特征曲线和焦线. Monge 锥	59
2. 初值问题的解	63
3. 特征作为分枝元素. 补充说明. 积分劈锥面. 焦聚流形	65
§ 4. 完全积分	66
§ 5. 焦线和 Monge 方程	68
§ 6. 例	69
1. 直光线的微分方程, $(\text{grad } u)^2 = 1$	69
2. 方程 $F(u_x, u_y) = 0$	72
3. Clairaut 微分方程	74

4. 管状曲面的微分方程	75
5. 齐性关系式	76
§ 7. n 个自变量的一般微分方程	76
§ 8. 完全积分及 Hamilton-Jacobi 理论	81
1. 包络和特征曲线的造法	81
2. 特征微分方程的典则形式	84
3. Hamilton-Jacobi 理论	85
4. 例. 二体问题	86
5. 例. 椭球面上的短程线	88
§ 9. Hamilton-Jacobi 理论及变分法	90
1. 典则形式的 Euler 微分方程	90
2. 短程距离或短时距及其导数. Hamilton-Jacobi 偏微分方程	92
3. 齐次被积函数	94
4. 极值曲线场. Hamilton-Jacobi 微分方程	96
5. 射线锥面. Huyghens 构造法	99
6. 对于短时距的表示式的 Hilbert 不变积分	100
7. Hamilton-Jacobi 定理	101
§ 10. 典则变换和应用	102
1. 典则变换	102
2. Hamilton-Jacobi 定理的新证明	103
3. 常数的变易(典则扰动理论)	104
第二章附录 I	104
§ 1. 特征流形的进一步讨论	104
1. 关于在 n 维空间中求导的一些注释	104
2. 初值问题. 特征流形	107
§ 2. 具有相同主要部分的拟线性微分方程组. 理论的新推演	111
§ 3. Haar 的唯一性的证明	116
第二章附录 II 守恒定律的理论	118

第三章 高阶微分方程

§ 1. 两个自变量的二阶线性和拟线性微分算子的标准形式	123
1. 椭圆型、双曲型、和抛物型的标准形式. 混合型	123
2. 例	128
3. 两个自变量的二阶拟线性微分方程的标准形式	131
4. 例. 极小曲面	134
5. 两个一阶微分方程的方程组	135
§ 2. 一般的分类和特征	136
1. 记号	136
2. 两个自变量的一阶方程组. 特征	137
3. n 个自变量的一阶方程组	139
4. 高阶微分方程. 双曲性	140
5. 补注	141
6. 例. Maxwell 方程和 Dirac 方程	141
§ 3. 常系数线性微分方程	145
1. 二阶方程的分类和标准形	145
2. 二阶方程的基本解	148
3. 平面波	151
4. 平面波(续). 前进波. 弥散	152
5. 例. 电报方程. 电缆中的无畸变波	155
6. 柱面波和球面波	156
§ 4. 初值问题. 波动方程的辐射问题	159
1. 热传导的初值问题. θ 函数的变换	159
2. 波动方程的初值问题	162
3. Duhamel 原理. 非齐次方程. 推迟势	163
3 a. 一阶方程组的 Duhamel 原理	165
4. 二维空间里的波动方程的初值问题. 降维法	165
5. 辐射问题	167
6. 传播现象和 Huyghens 原理	168

§ 5. 用 Fourier 积分解初值问题	169
1. Fourier 积分的 Cauchy 方法	169
2. 例	171
3. Cauchy 方法的证明	173
§ 6. 数学物理微分方程的典型问题	179
1. 引言	179
2. 基本原理	183
3. 关于“不适定的”问题的注记	185
4. 关于线性问题的一般注记	186
第三章附录 I	187
§ 1. Sobolev 引理	187
§ 2. 伴随算子	189
1. 矩阵算子	189
2. 伴随微分算子	190
第三章附录 II Holmgren 的唯一性定理	192

第四章 势论及椭圆型微分方程

§ 1. 基本概念	195
1. Laplace 方程, Poisson 方程及有关方程	195
2. 质量分布的势	199
3. Green 公式和应用	205
4. 质量分布的势的导数	210
§ 2. Poisson 积分及其应用	212
1. 边值问题及 Green 函数	212
2. 对于圆和球的 Green 函数, 对于球和半空间的 Poisson 积分	214
3. Poisson 公式的一些推论	218
§ 3. 平均值定理及其应用	224
1. 齐次的及非齐次的平均值方程	224
2. 平均值定理的逆定理	226
3. 对于空间分布的势的 Poisson 方程	231

4. 其它椭圆型微分方程的平均值定理	233
4. 边值问题	236
1. 准备知识. 对边界值和区域的连续依赖性	236
2. 用 Schwarz 交替法求边值问题的解	239
3. 对于具有充分光滑边界的平面域的积分方程法	243
4. 关于边界值的注记	246
4a. 容量和边界值的取得	248
5. Perron 的下调和函数法	249
§ 5. 约化的波动方程. 散射	254
1. 背景	254
2. Sommerfeld 的辐射条件	256
3. 散射	258
§ 6. 更一般的椭圆型微分方程的边值问题. 解的唯一性	260
1. 线性微分方程	260
2. 非线性方程	262
3. 关于 Monge-Ampère 微分方程的 Rellich 定理	263
4. 极大值原理及应用	265
§ 7. Schauder 的先验估算及其应用	269
1. Schauder 的估算	270
2. 边值问题的解	273
3. 强闸函数及其应用	278
4. $L[u]=f$ 的解的某些性质	280
5. 关于椭圆型方程的进一步的结果; 在边界上的性态	282
§ 8. Beltrami 方程的解	285
§ 9. 关于一个特殊拟线性方程的边值问题. Leray 和 Schauder 的不动点法	291
§ 10. 用积分方程法解椭圆型微分方程	295
1. 特解的构造. 基本解. 参助函数	296
2. 附注	299
第四章附录 非线性方程	300
1. 扰动理论	300

2. 方程 $\Delta u = f(x, u)$	301
第四章的补充材料 椭圆型偏微分方程理论的函数论观	306
§ 1. 准解析函数的定义	306
§ 2. 一个积分方程	308
§ 3. 相似性原理	309
§ 4. 相似性原理的应用	312
§ 5. 形式幂	314
§ 6. 准解析函数的微分与积分	316
§ 7. 例. 混合型方程	318
§ 8. 准解析函数的一般定义	320
§ 9. 拟保形性和一个一般表示定理	321
§ 10. 一个非线性边值问题	323
§ 11. Riemann 映射定理的一个推广	326
§ 12. 关于极小曲面的两个定理	327
§ 13. 具有解析系数的方程	328
§ 14. Privaloff 的定理的证明	329
§ 15. Schauder 不动点定理的证明	330

第五章 两个自变量的双曲型微分方程

引言	334
§ 1. 关于主要是二阶的微分方程的特征	335
1. 基本概念. 拟线性方程	335
2. 积分曲面上的特征	340
3. 特征线是间断性的曲线. 波前. 间断性的传播	341
4. 一般的二阶微分方程	343
5. 高阶微分方程	344
6. 特征在点变换下的不变性	346
7. 化为一阶拟线性方程组	346
§ 2. 一阶双曲型方程组的特征标准形式	347
1. 线性、半线性、及拟线性方程组	347

2. $k=2$ 的情形, 用速矢端线变换法达到线性化	350
§ 3. 在可压缩流体动力学上的应用	351
1. 一维等熵流	351
2. 球面对称流	353
3. 定常无旋流	354
4. 关于非等熵流的三个方程的组	355
5. 线性化的方程	357
§ 4. 唯一性. 依赖区域	358
1. 依赖区域、影响区域及决定区域	358
2. 对于二阶线性微分方程解的唯一性的证明	360
3. 对于一阶线性组的一般唯一性定理	364
4. 关于拟线性组的唯一性	366
5. 能量不等式	367
§ 5. 解的 Riemann 表示	367
1. 初值问题	367
2. Riemann 函数	368
3. Riemann 函数的对称性	371
4. Riemann 函数及由一点发出的辐射. 向高阶问题的推广	372
5. 例	373
§ 6. 用迭代法解线性和半线性双曲型的初值问题	377
1. 二阶方程的解的构造	377
2. 对于一阶线性及半线性组的记号和结果	379
3. 解的构造	380
4. 附注. 解对参数的依赖性	383
5. 混合初值及边值问题	384
§ 7. 关于拟线性组的 Cauchy 问题	388
§ 8. 对于单个的高阶双曲型微分方程的 Cauchy 问题	390
1. 化为一阶特征组	391
2. $L[u]$ 的特征表示	392
3. Cauchy 问题的解	394

4. 其它解法. P. Ungar 给出的一个定理	395
5. 附注	396
§ 9. 解的间断性. 激波	397
1. 广义解. 弱解	397
2. 表现守恒定律的拟线性组的间断性. 激波	399
第五章附录 I 特征作为坐标的应用	401
§ 1. 关于一般二阶非线性方程的附注	401
1. 拟线性微分方程	401
2. 一般的非线性方程	404
§ 2. Monge-Ampère 方程的特殊性质	405
§ 3. 利用复数域由椭圆型转变为双曲型的情形	408
§ 4. 在椭圆型情形中解的解析性	409
1. 函数论的注记	409
2. $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$ 的解的解析性	410
3. 关于一般微分方程 $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ 的注记	413
§ 5. 对于解的延拓使用复数量	413
第五章附录 II 瞬态问题与 Heaviside 运算微积	415
§ 1. 用积分表示解瞬态问题	415
1. 显例. 波动方程	415
2. 问题的一般性提法	417
3. Dubamel 积分	418
4. 实验解叠加法	421
§ 2. Heaviside 算子法	423
1. 最简单的算子	423
2. 算子实例及应用	425
3. 应用于传热问题	429
4. 波动方程	431
5. 运算微积的原理所在. 其他一些算子的解释	432
§ 3. 瞬态问题的一般理论	437
1. Laplace 变换	438

2. 用 Laplace 变换解瞬态问题	440
3. 举例. 波动方程与电报方程	444

第六章 多于两个自变量的双曲型方程

引言	450
第一部分 解的唯一性, 构造, 与几何性质	451
§ 1. 二阶微分方程. 特征的几何性质	451
1. 二阶拟线性微分方程	451
2. 线性微分方程	454
3. 射线或双特征	456
4. 特征曲面作为波前	457
5. 特征的不变性	458
6. 射线锥面, 法锥面, 射线劈锥面	459
7. 与 Riemann 尺度的联系	461
8. 对射变换	462
9. Huyghens 的波前构图法	464
10. 类空间曲面. 类时间方向	465
§ 2. 二阶方程. 特征的作用	465
1. 二阶间断性	466
2. 沿特征曲面的微分方程	467
3. 间断性沿射线的传播	468
4. 例证. 三维空间里波动方程 Cauchy 问题的解	469
§ 3. 高阶算子的特征流形的几何性质	471
1. 记号	471
2. 特征曲面, 特征形, 特征矩阵	473
3. 特征条件在时空中的解释. 法锥面与法曲面. 特征零化 矢量与本征值	474
4. 特征曲面——波前——的构造. 射线, 射线锥面, 射线劈锥面	476
5. 波前与 Huyghens 的构图法. 射线曲面与法曲面	478
5 a. 例.	480

6. 不变性	481
7. 双曲性. 类空间流形, 类时间方向	481
8. 对称双曲型算子	484
9. 高阶对称双曲型方程	485
10. 多重特征曲面叶和可约化性	486
11. 关于双特征方向的引理	487
§ 3 a. 例. 流体动力学, 晶体光学, 磁流体动力学	489
1. 引言	489
2. 流体动力学微分方程组	490
3. 晶体光学	492
4. 法曲面和射线曲面的形状	494
5. 晶体光学的 Cauchy 问题	498
6. 磁流体动力学	500
§ 4. 间断性的传播和 Cauchy 问题	504
1. 引言	504
2. 一阶方程组的一阶导数的间断性. 输运方程	504
3. 初始值的间断性. 理想函数的引入. 前进波	506
4. 一阶方程组的间断性的传播	509
5. 重数不变的特征	511
5 a. 间断性沿高于一维的流形而传播的例子. 锥形折射	512
6. 初始间断的分解和 Cauchy 问题的解	513
6 a. 特征曲面作为波前	515
7. 用收敛的波展开式解 Cauchy 问题	516
8. 二阶和高阶的方程组	516
9. 补注. 弱解. 激波	518
§ 5. 振荡的初始值. 解的渐近展开式. 向几何光学的过渡	519
1. 前注. 高阶前进波	519
2. 渐近解的构造	520
3. 几何光学	523
§ 6. 初值问题的唯一性定理和依赖区域的例子	525

1. 波动方程	525
2. 微分方程 $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (Darboux 方程)	527
3. 真空中的 Maxwell 方程	528
§ 7. 双曲型问题的依赖区域	530
1. 引言	530
2. 依赖区域的描述	531
§ 8. 能量积分和一阶线性对称双曲型方程组的唯一性定理	532
1. 能量积分和 Cauchy 问题的唯一性	532
2. 一阶的和高阶的能量积分	534
3. 混合初边值问题的能量不等式	536
4. 对于单个二阶方程的能量积分	539
§ 9. 高阶方程的能量估计	540
1. 引言	540
2. 关于高阶双曲型算子的解的能量恒等式和不等式. Leray 与 Gårding 的方法	541
3. 其它方法	544
§ 10. 存在定理	546
1. 引言	546
2. 存在定理	547
3. 关于初始值性质的持久性和关于相应的半群的一些注记 Huyghens 小原理	549
4. 聚焦. 可微性非持久的例子	551
5. 关于拟线性方程组的注记	552
6. 关于高阶方程或非对称方程组的注记	552
第二部分 解的表示	553
§ 11. 引言	553
1. 概述. 记号	553
2. 一些积分公式. 函数的平面波分解式	554
§ 12. 常系数二阶方程	558