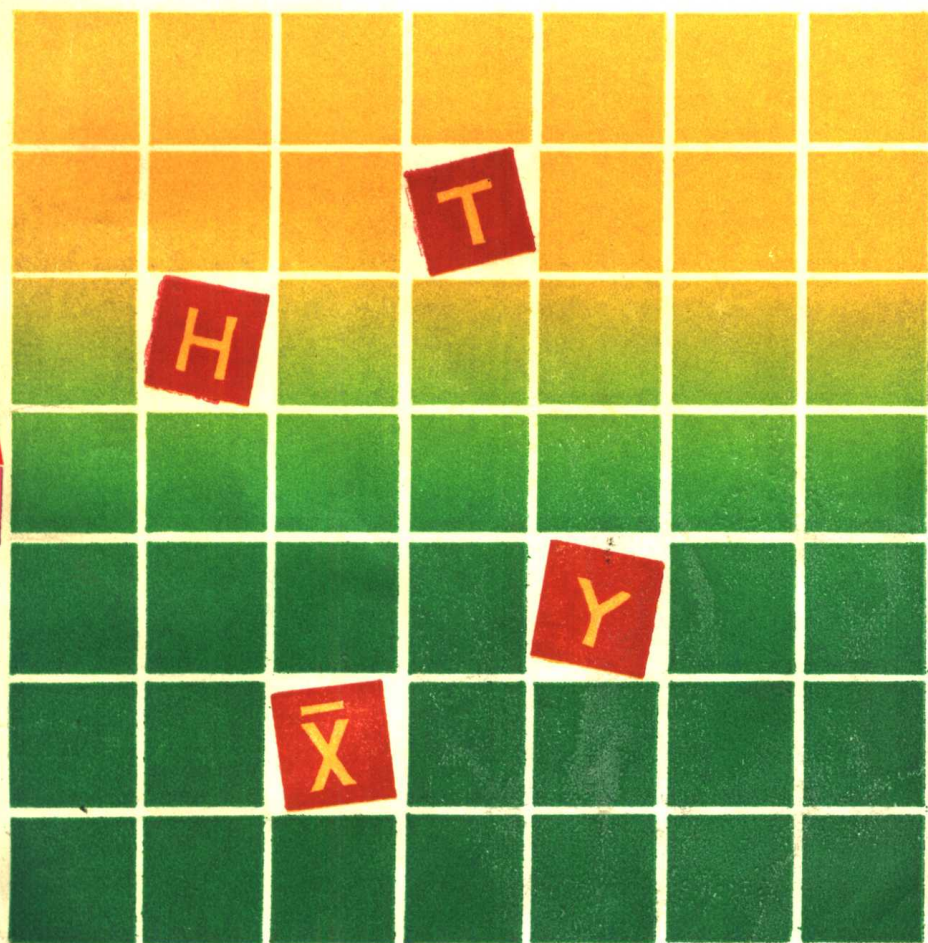


● 于骏民 主 编

● 邵汉青 副主编

经济管理数学基础

JING JI GUAN LI
SHU XUE JI CHU



上海交通大学出版社

经济管理数学基础

于骏民（主 编）

邵汉青（副主编）

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书是一本供经济管理干部进修用的数学基础教材，内容通俗易懂、深入浅出，基本上包括了经济管理工作中所需的数学基本概念和基本方法。全书共分12章：1. 行列式；2. 向量和矩阵；3. 函数及其导数；4. 微分；5. 不定积分；6. 定积分；7. 微分方程；8. 重积分；9. 概率及其运算；10. 随机变量的分布和数字特征；11. 参数估计与假设检验；12. 回归分析。每章后均附有习题。书后还备有附录及习题答案。

本书可作为具有高中以上文化程度的各级计委的业务干部和经济部门的管理干部学习用书，也可作为经济、计划、管理和财贸学院非理科专业专修科、本科学生的教材或教学参考书。

经济管理数学基础

上海交通大学出版社出版

(淮海中路1984弄19号)

新华书店上海发行所发行

上海交通大学印刷厂印装

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 15 字数 372000

1987年12月第1版 1988年1月第1次印刷

印数：1—7,000

ISBN 7-313-00080-4/F2

科技书目：162-288

定价：2.85 元

前 言

为提高经济计划管理干部的业务素质，以适应经济体制改革和计划工作科学化、现代化的需要，国家计委培训中心委托上海交通大学、中国人民大学和吉林大学有关专业教师编写了本教材。

本教材是一本经济管理的基础教材，可作为具有高中以上文化程度的各级计委的业务干部和经济部门的管理干部学习用书。若作为经济管理干部学院教学用书，教学时数可安排在 108~144 学时之间。该书也可作为经济、计划、管理和财贸学院非理科专业专修科、本科的教材或教学参考书。

鉴于我国广大经济管理工作者干部，在学习有关理论知识时，需要有一本适合经济管理干部阅读的数学基础书籍。因此，本书力求通俗易懂，深入浅出地阐明经济管理工作中所需的数学基本概念和基本方法，包括导数、微分、积分、微分方程、向量矩阵、概率和数理统计等。另外，为了向经济管理工作者介绍一些现代数学的内容，我们在附录中对拓扑、泛函分析、随机过程、动态规划和对策论等也作了简单介绍。

本书由上海交通大学管理学院于骏民（编写前言、第 9~12 章），武剑明（编写第 8 章），陈继祥（编写第 3、4、7 章），中国人民大学统计学院邵汉青（编写第 1、2 章），张建波（编写附录 I），吉林大学经济系李毅（编写第 5、6 章）等同志编写。全书内容由于骏民（主编）、邵汉青（副主编）统一安排规划，最后由于骏民修改、总纂定稿。

本书经上海交通大学应用数学系曹敏谦同志审阅，他对本书提出了许多宝贵的意见，并提供了不少资料，在此表示衷心感谢。

编 者

1986 年 12 月



经济管理数学基础

目 录

第 1 章 行列式

1.1	二阶行列式	(1)
1.2	三阶行列式	(3)
1.3	n 阶行列式	(6)
1.3.1	排列与反序	(6)
1.3.2	计算行列式的值的规律	(7)
1.4	行列式的性质	(9)
1.5	行列式的计算	(15)
1.5.1	子式与余子式	(15)
1.5.2	行列式展开式的计算公式	(18)
1.6	行列式与线性方程组	(20)
习题		(24)

第 2 章 向量和矩阵

2.1	向量	(26)
2.1.1	向量的概念	(26)
2.1.2	向量的运算	(26)
2.1.3	向量的线性组合	(28)
2.2	矩阵的概念	(32)
2.2.1	矩阵的定义	(32)
2.2.2	几种特殊类型的矩阵	(33)
2.3	矩阵的运算	(34)
2.3.1	矩阵的加法	(34)
2.3.2	矩阵的减法	(35)
2.3.3	矩阵的乘法	(36)

2.4	逆矩阵	(39)
2.4.1	逆矩阵的概念	(39)
2.4.2	逆矩阵的求法	(40)
2.4.3	逆矩阵的性质	(48)
2.5	分块矩阵	(49)
2.5.1	分块矩阵的概念	(49)
2.5.2	分块矩阵的运算	(50)
2.6	矩阵的秩	(58)
2.6.1	矩阵的子式	(58)
2.6.2	矩阵的秩	(59)
2.7	线性方程组及其求解	(63)
2.7.1	线性方程组解的存在定理	(63)
2.7.2	非齐次线性方程组的解	(66)
2.7.3	齐次线性方程组的解	(69)
2.8	矩阵与线性方程组在经济中的应用	(71)
2.8.1	马克思再生产公式(模型)	(71)
2.8.2	投入产出模型	(72)
2.8.3	凯恩斯模型	(74)
习题		(75)

第3章 函数及其导数

3.1	函数、极限与连续	(79)
3.1.1	基本初等函数	(81)
3.1.2	复合函数	(83)
3.1.3	函数的简单性质	(85)
3.1.4	数列的极限和函数的极限	(88)
3.1.5	极限的运算法则·两个重要的极限	(95)
3.1.6	函数的左右极限与连续	(98)
3.2	导数的概念及几何意义	(103)
3.2.1	导数的概念与实例	(103)

3.2.2	导数的几何意义	(106)
3.3	导数的运算法则	(109)
3.3.1	函数的和差积商的导数	(109)
3.3.2	基本初等函数的导数	(112)
3.3.3	复合函数的求导法	(119)
3.3.4	对数求导法	(122)
3.3.5	基本导数表及求导公式	(123)
3.4	高阶导数与隐函数求导法	(124)
3.4.1	高阶导数	(124)
3.4.2	隐函数求导法	(127)
3.5	导数的应用	(129)
3.5.1	判别函数的增减性	(129)
3.5.2	函数的极值及其判定法	(130)
3.5.3	曲线的凹凸及判定极值的第二种方法	(134)
3.5.4	最大值和最小值的求法	(138)
习题		(140)

第 4 章 微分

4.1	微分的概念及几何意义	(146)
4.1.1	微分的概念	(146)
4.1.2	微分的几何意义	(150)
4.2	微分的计算及应用	(150)
4.2.1	微分的基本公式及微分法则	(150)
4.2.2	微分的应用	(153)
4.3	多元函数的微分	(155)
4.3.1	多元函数的概念	(156)
4.3.2	偏导数	(157)
4.3.3	全微分	(163)
习题		(167)

第5章 不定积分

5.1	不定积分及积分公式	(170)
5.1.1	原函数和不定积分	(170)
5.1.2	不定积分公式和运算法则	(171)
5.1.3	不定积分的性质	(172)
5.2	不定积分的计算	(175)
5.2.1	换元法	(175)
5.2.2	分部积分法	(180)
5.3	有理函数与无理函数的积分	(182)
5.3.1	有理函数的分解	(182)
5.3.2	有理函数的积分	(186)
5.3.3	无理函数的积分	(190)
5.4	查积分表	(192)
习题		(192)

第6章 定积分

6.1	定积分的概念	(196)
6.2	定积分的性质和牛顿-莱布尼兹公式	(199)
6.3	定积分的换元法和分部积分法	(205)
6.3.1	定积分的换元法	(205)
6.3.2	定积分的分部积分法	(207)
6.4	定积分的近似计算	(209)
6.4.1	矩形法	(209)
6.4.2	梯形法	(210)
6.4.3	抛物线法	(211)
6.5	广义积分	(217)
6.5.1	积分区间为无穷	(217)
6.5.2	被积函数有无穷间断点	(220)

6.6	定积分在经济管理中的应用	(223)
6.6.1	投资效益分析	(223)
6.6.2	生产效益分析	(224)
6.6.3	均匀流的现值因素	(225)
6.6.4	消费者剩余和生产者剩余	(226)
习题		(227)

第7章 微分方程

7.1	微分方程的基本概念	(231)
7.2	两种一阶微分方程的解法	(235)
7.2.1	可分离变量的微分方程	(235)
7.2.2	一阶线性微分方程	(237)
7.3	二阶常系数线性微分方程的解法	(243)
7.3.1	二阶常系数线性齐次微分方程的解法	(243)
7.3.2	二阶常系数线性非齐次微分方程的解法	(247)
习题		(250)

第8章 重积分

8.1	重积分的概念	(253)
8.1.1	曲顶柱体的体积	(253)
8.1.2	薄片的质量	(255)
8.1.3	二重积分的定义	(256)
8.1.4	三重积分的定义	(257)
8.2	重积分的基本性质	(259)
8.3	二重积分的计算	(261)
8.3.1	直角坐标系	(261)
8.3.2	极坐标系	(269)
8.4	三重积分的计算	(273)
8.4.1	直角坐标系	(273)

8.4.2	柱面坐标系	(276)
8.4.3	球面坐标系	(279)
习题		(283)

第9章 概率及其运算

9.1	概率论的基本概念	(286)
9.1.1	概率论的研究对象和基本内容	(286)
9.1.2	排列和组合	(287)
9.1.3	随机试验和随机事件	(292)
9.1.4	事件之间的关系及运算	(294)
9.2	频率与概率	(296)
9.2.1	频率	(296)
9.2.2	概率	(298)
9.2.3	古典概型	(298)
9.3	概率的运算	(301)
9.3.1	加法公式	(301)
9.3.2	条件概率	(302)
9.3.3	乘法公式	(303)
9.3.4	全概率公式	(304)
9.3.5	逆概率公式	(305)
9.3.6	事件的独立性	(306)
9.3.7	独立试验序列概型	(307)
习题		(308)

第10章 随机变量的分布和数字特征

10.1	离散型随机变量及其分布	(311)
10.1.1	离散型随机变量的分布列	(311)
10.1.2	二点分布和二项分布	(312)
10.1.3	泊松分布	(313)

10.1.4	超几何分布·····	(316)
10.2	连续型随机变量及其分布·····	(317)
10.2.1	连续型随机变量及概率密度·····	(317)
10.2.2	均匀分布·····	(318)
10.2.3	正态分布·····	(318)
10.2.4	Γ 分布、指数分布和 χ^2 分布 ·····	(320)
10.2.5	t 分布和 F 分布·····	(321)
10.3	分布函数与随机变量函数的分布·····	(323)
10.3.1	分布函数·····	(323)
10.3.2	随机变量函数的分布·····	(326)
10.4	期望与方差·····	(330)
10.4.1	离散型随机变量的期望·····	(330)
10.4.2	连续型随机变量的期望·····	(332)
10.4.3	期望的性质·····	(335)
10.4.4	方差及其性质·····	(336)
10.4.5	原点矩和中心矩·····	(341)
10.4.6	切比雪夫不等式·····	(341)
10.5	随机向量和中心极限定理·····	(342)
10.5.1	随机向量的分布·····	(343)
10.5.2	随机向量的数字特征·····	(348)
10.5.3	大数定律和中心极限定理·····	(349)
习题	·····	(350)

第 11 章 参数估计与假设检验

11.1	总体与样本·····	(356)
11.1.1	总体与个体·····	(356)
11.1.2	样本和样本容量·····	(357)
11.2	参数的点估计·····	(358)
11.2.1	期望的点估计·····	(358)

11.2.2	方差的点估计	(360)
11.2.3	样本平均值 $\bar{x}$ 及样本方差 S^2 的简化算法	(362)
11.3	参数的区间估计	(363)
11.3.1	期望的区间估计	(363)
11.3.2	方差的区间估计	(366)
11.4	假设检验	(368)
11.4.1	U 检验法	(369)
11.4.2	T 检验法	(371)
11.4.3	χ^2 检验法	(372)
11.4.4	F 检验法	(373)
	习题	(376)

第 12 章 回归分析

12.1	一元线性回归	(378)
12.1.1	散点图与经验公式	(378)
12.1.2	最小二乘估计	(379)
12.1.3	线性相关的显著性检验	(382)
12.1.4	预测	(384)
12.2	多元线性回归	(385)
12.3	非线性回归	(389)
12.3.1	一元非线性回归	(390)
12.3.2	多元非线性回归	(396)
	习题	(399)

附录 I	拓扑学简介·泛函分析等	(401)
------	-------------	---------

附录 II	不定积分表	(416)
-------	-------	---------

附录 III	数理统计表	(436)
--------	-------	---------

	习题答案	(447)
--	------	---------

第 1 章 行列式

1.1 二阶行列式

行列式是研究和求解线性方程组的重要工具。现以二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

为例, 用消元法来解这个方程组, 步骤如下。

(1) $\times a_{22} - (2) \times a_{12}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = c_1a_{22} - a_{12}c_2. \quad (3)$$

(2) $\times a_{11} - (1) \times a_{21}$ 得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}c_2 - c_1a_{21}. \quad (4)$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 从 (3) 式可得

$$x_1 = \frac{c_1a_{22} - a_{12}c_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad (5)$$

从 (4) 式可得

$$x_2 = \frac{a_{11}c_2 - c_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \quad (6)$$

引进行列式, 可以使求解公式便于记忆, 并可推广到求解多元线性方程组。

将 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} 四个数按照以下形式排成方形, 并在两边各画上一条竖线

$$\left| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right|,$$

就叫做二阶行列式。它代表由数字 a_{11} , a_{12} , a_{21} , a_{22} (也可以是字母) 通过特定运算而得出的数值。若把这个数值记为 D , 则其

定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

这里 a_{ij} ($i, j=1, 2$) 叫做行列式的元素, 它位于第 i 行第 j 列。

二阶行列式的展开式 $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$ 是两个单项式的代数和, 注意, 在行列式的左上角到右下角的对角线(称为主对角线)上两个元素的乘积前面取正号, 而在行列式的右上角到左下角的对角线(称为次对角线)上两个元素的乘积前面取负号。

根据二阶行列式的定义可知, (5) 式和 (6) 式的分母, 就是由方程组的系数 a_{ij} 组成的行列式 D , (5) 式和 (6) 式的分子也都可以写成一个行列式。如果设

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix} = c_1 a_{22} - c_2 a_{12},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix} = a_{11} c_2 - c_1 a_{21},$$

则当 $D \neq 0$ 时, 二元线性方程组的解可表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

线性方程组的解的这种形式称为**克拉姆法则**。

例 1 用二阶行列式解线性方程组

$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

$$\text{解} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2.$$

由于 $D \neq 0$, 故方程组有解。

$$D_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 1 = 4,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$x = -\frac{D_1}{D} = 2, \quad y = -\frac{D_2}{D} = -1.$$

1.2 三阶行列式

设有包含三个未知数的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3. \end{cases} \quad (1)$$

用消元法来解这个方程组。先消去前面两式中的 x_3 ，再消去后面两式中的 x_3 ，得到只含有两个未知数 x_1 与 x_2 的新的二元线性方程组，然后再从新方程组中消去 x_2 ，得到

$$\begin{aligned} & (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & \quad - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31})x_1 \\ & = c_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}c_3 + a_{13}c_2a_{32} - c_1a_{23}a_{32} \\ & \quad - a_{12}c_2a_{33} - a_{13}a_{22}c_3. \end{aligned}$$

令 x_1 的系数为 D ，则当 $D \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{D} & (c_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}c_3 + a_{13}c_2a_{32} \\ & - c_1a_{23}a_{32} - a_{12}c_2a_{33} - a_{13}a_{22}c_3). \end{aligned} \quad (2)$$

依据同样道理，我们也可以消去 x_1 ， x_3 得到 x_2 ，以及消去 x_1 ， x_2 得到 x_3 。

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{1}{D} & (a_{11}c_2a_{33} + c_1a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}c_3 \\ & - a_{11}a_{23}c_3 - c_1a_{21}a_{33} - a_{13}c_2a_{31}), \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_3 = \frac{1}{D} (a_{11} a_{22} c_3 + a_{12} c_2 a_{31} + c_1 a_{21} a_{32} - a_{11} c_2 a_{32} - a_{12} a_{21} c_3 - c_1 a_{22} a_{31}) \quad (4)$$

与二阶行列式的定义类似，我们将 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 共 $3 \times 3 = 9$ 个数，按行与列排成方形，并在两边各画上一条竖线，得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

这叫做三阶行列式。它是由 9 个数 a_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) 经过特定运算而得到的一个数值。这个特定运算按如下法则进行：将下图中用实线连接的三个元素之积取正号，虚线连接的三个元素之积取负号，这个行列式的值 D 就是这些元素的乘积的代数和，即定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

按照这个定义，(2)、(3)、(4) 三式右端的三个分子也可以写成三个行列式 D_1, D_2, D_3 ，其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = c_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} c_3 + a_{13} c_2 a_{32} - c_1 a_{23} a_{32} - a_{12} c_2 a_{33} - a_{13} a_{22} c_3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} c_2 a_{33} + c_1 a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} c_3$$

$$- a_{11} a_{23} c_3 - c_1 a_{21} a_{33} - a_{13} c_2 a_{31},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} c_3 + a_{12} c_2 a_{31} + c_1 a_{21} a_{32}$$

$$- a_{11} c_2 a_{32} - a_{12} a_{21} c_3 - c_1 a_{22} a_{31}.$$

于是, 当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1) 的解可以简化成:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

例 1 用三阶行列式解三元线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-5) \times 1 + (-4) \times 3 \times 1 + 1 \times 1 \times (-1)$$

$$- 1 \times (-5) \times 1 - 2 \times 3 \times (-1) - (-4) \times 1 \times 1$$

$$= -10 - 12 - 1 + 5 + 6 + 4 = -8,$$