

高等学校教学用书

球面三角学

張 楚 賓 編

高等教育出版社

高等学校教学用



球 面 三 角 学

張 楚 賓 編

高 等 教 育 出 版 社

本书原系中国人民解放军測繪学院讲义，它是针对測量学上的应用而写的，凡是与測量学无关的材料都没有列入。全书共分五章，内容主要介绍了球面三角形的几何性质、边和角的函数关系、通过实例来叙述球面三角形的解法以及球面三角形的面积和球面角超的各种公式的推证与应用等。叙理簡明淺近，尽量避免高深的数学理论与多余的严格性，而着重于实际的运算。因此它适合于工业大学測量专业和中等測量技术学校教学参考之用，对于測繪工作者也有参考价值。

球面三角学

張 楚 宾 編

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

京华印书局印刷 新华书店发行

统一书号 13010·553 开本 850×1168^{1/32} 印张 2^{3/16}

字数 50,000 印数 1—8,000 定价(6) 0.28

1959年2月第1版 1959年2月北京第1次印刷

序

本书原系中国人民解放军測繪学院的讲义,在編写过程中,参考了下列书籍:

陈家賢編:三角学(測繪学院中等科讲义);

邓茹剛編:球面三角(測繪丛书);

李光蔭編:球面三角术;

Ф. Ф. 巴甫洛夫和 В. П. 馬希克維奇著:球面三角学(刘亚星译);

М. К. ВЕНТЦЕЛЬ: Сферическая тригонометрия;

Н. Н. СТЕПАНОВА: Сферическая тригонометрия;

徐韞知編:球面三角法球面几何学合編。

其有尤以陈家賢、邓茹剛二同志所編的书及巴甫洛夫和馬希克維奇所著的书为主要依据。

本书是針對測量学上的应用而編写的,凡是与測量学无关的材料,都沒有列入。同时,为了不使本书篇幅过大而能用很短的时间把它学完,在理論闡述和文字叙述方面,力求簡單明确,而且尽可能地利用直觀的和平面三角学的知識来証明定理和公式,尽量避免高深的数学理論和多余的严格性,而着重于实际运算。因此,本书适合于工业大学測量专业和中等測量技术学校教学参考之用;对于社会上的广大測繪工作者,也有参考价值。

本书共分五章,第一章介紹球面三角形的几何性質;第二章是推証球面三角形边和角的各种公式(函数关系);第三章是用实例来叙述球面三角形的解法;第四章为直角球面三角形,第五章是球面三角形的面积和球面角超的各种公式的推証及运算。如果按照运算的繁簡,直角球面三角形应放在任意球面三角形之前,但考虑

到直角球面三角形只不过是任意球面三角形的一个特例，因此本书把它放在任意球面三角形之后，这可以大大精简篇幅和减少读者的学习时间。

本书每章都附有习题，这些习题一般说来是实用的，也是不太困难的。

本书在编写过程中，得到解放军测绘学院数学教研组同志们的指导和帮助，并由田守拙、程贞芳两同志制图，谨此致谢。

由于编者的数学和测量学知识都很差，更缺乏实际工作经验，这本书的缺点和错误是很多的，但本着敢想敢干的精神，还是使这本书与读者见面了，希望读者提出意见，以便改进。

编者

1958. 10. 12 于北京

目 录

| | |
|-------------------------|----|
| 引言 | 1 |
| 第一章 球面三角形的几何性质 | 2 |
| § 1. 球面上两点之间的距离 | 2 |
| § 2. 球面上的圆的极 | 3 |
| § 3. 球面角与球面三角形 | 4 |
| § 4. 极三角形 | 5 |
| § 5. 球面三角形的边和角的基本性质 | 6 |
| § 6. 全等球面三角形 | 9 |
| § 7. 对称球面三角形 | 10 |
| 第一章习题 | 12 |
| 第二章 球面三角形的边和角的函数关系 | 13 |
| § 1. 边的余弦公式 | 13 |
| § 2. 角的余弦公式 | 14 |
| § 3. 正弦公式 | 15 |
| § 4. 正余弦公式(五个元素形式) | 16 |
| § 5. 余切公式(四个元素形式) | 17 |
| § 6. 把公式改化成为对数形式 | 18 |
| § 7. 半角公式 | 20 |
| § 8. 半边公式 | 22 |
| § 9. 半角和、半角差、半边和、半边差的公式 | 24 |
| 第二章习题 | 27 |
| 第三章 球面三角形的解法 | 29 |
| § 1. 概述 | 29 |
| § 2. 已知三边解球面三角形 | 30 |
| § 3. 已知三角解球面三角形 | 31 |
| § 4. 已知两边及夹角解球面三角形 | 32 |
| § 5. 已知两角及夹边解球面三角形 | 34 |
| § 6. 已知两边及一对角解球面三角形 | 35 |
| § 7. 已知两角及一对边解球面三角形 | 39 |
| § 8. 判别有解或没有解的理由 | 42 |

| | |
|----------------------------------|----|
| 第三章习题 | 44 |
| 第四章 直角球面三角形 | 45 |
| § 1. 直角球面三角形的边角关系 | 45 |
| § 2. 納白尔規則 | 46 |
| § 3. 直角球面三角形的解法 | 47 |
| 第四章习题 | 50 |
| 第五章 球面三角形的面积和球面角超 | 52 |
| § 1. 球面二角形的面积 | 52 |
| § 2. 球面三角形的面积 | 52 |
| § 3. 球面角超 | 53 |
| § 4. 已知球面三角形的二边及夹角求球面角超的公式 | 55 |
| § 5. 已知球面三角形的三边求球面角超的公式 | 57 |
| § 6. 球面三角形的面积和球面角超的計算 | 59 |
| 第五章习题 | 61 |

引 言

球面上三个大圆弧所构成的闭合图形，叫做球面三角形。球面三角学就是研究球面三角形的解法，也就是说，依照球面三角形的已知元素(边、角)，来解算其他未知元素。无论在理论上或者在实用上，球面三角学都有重要的价值；如在天文学和测量制图学等方面都有广泛的应用，因为天球和地球虽然不是真正的球形，但在符合一定要求的条件下，我们常把天球和地球看作圆球，于是在天文学和测量制图学中有很多问题，是应用球面三角学来解决的。

根据历史考察，球面三角学比平面三角学要出现得早一些。当球面三角形的球半径变为无穷大时，这球面三角形就变为平面三角形了。然而，球面三角学与平面三角学还是有所不同的；如球面三角形的边，为研究便利起见，我们用角度来表示，而平面三角形的边，以长度为单位；又如当球的半径一定时，知道了球面三角形的三个角，便可确定这球面三角形的三个边，而平面三角形则没有这样的性质。

本书在研究球面三角学时，引用到平面三角学的一些基本公式，如 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ， $\sin 2A = 2 \sin A \cos A$ ， $\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$ 等等。这并不是说平面三角形的公式与球面三角形的公式可以通用，这是因为在平面三角学中的公式有恒等式和条件等式两种，前者如上面所提到的那些公式，系仅就某一元素或者两个元素的恒等关系式而言，根本与三角形没有关系，当然可以应用到球面三角学中来；后者如正弦公式、余弦公式等等，是平面三角所特有的公式，不可应用到球面三角学中来。

第一章 球面三角形的几何性质

§1. 球面上两点之间的距离

球面上的圆 在高中立体几何学中，我們已經知道，通过球心的平面截球所得的截面是一个圆，它叫做大圆。不通球心的平面截球所得的截面也是一个圆，它叫做小圆。显然，大圆把球面分成相等的两部分。而通过球面上不在同一直径两端的两个点，能作并且只能作一个大圆(图 1)。

球面上两点间的距离 球面上两点 A, B 间大圆弧(劣弧)的长叫做球面上两点 A, B 间的距离，通常以 AB 来记它。

我們可以证明：在球面上连接 A, B 两点的所有曲线(弧)之长以距离 AB 为最短。

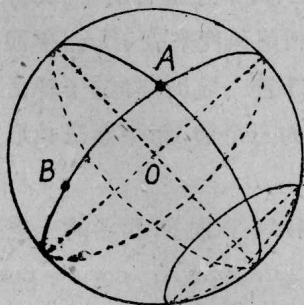


图 1.

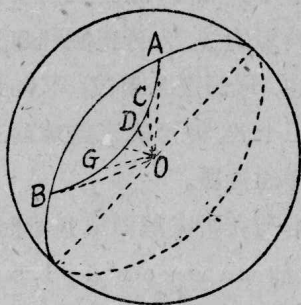


图 2.

事实上，过 A, B 两点作任意曲线弧 $ACD \cdots GB$ (图 2)，而以 C, D, \cdots, G 各点分这曲线弧为无穷多个无穷小的弧 AC, CD, \cdots, GB 。由于这些弧非常小，我们可以把它们看作是大圆弧。把 A, C, D, \cdots, G, B 各点与球心 O 联结起来，于是我們便得到多面角 $O-ACD \cdots GB$ 。由立体几何知：

$$\text{平面角 } \angle AOB < \angle AOC + \angle COD + \cdots + \angle GOB,$$

由于圆的中心角与所对的圆弧同度,有:

$$\text{圆弧 } AB < AC + CD + \dots + GB,$$

即 $\text{大圆弧 } AB < \text{曲线弧长 } ACD \dots GB.$

这就是说,连接两点 A, B 的所有曲线弧之长,以距离 AB 为最短^①。

§2. 球面上的圆的极

设球面上—已知圆(不论大圆或小圆),垂直于这已知圆所在平面的球直径的端点,叫做这个圆的极。

如图3中,圆 AB 的极是 P 与 P' , 圆 CD 之极也是 P 与 P' ; 这就是说, P 和 P' 既是圆 AB 之极,也是圆 CD 之极。同时可以看出,一个圆有两个极,而这两个极的连线就是球的直径。

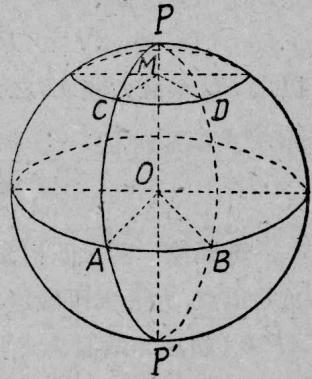


图 3.

球面上某一个圆的极到这个圆周上任一点的距离,称为极距离。

可以证明: 极到圆周上各点的距离都是相等的。

事实上,如图3,设 CD 之极为 P 与 P' , 直径 PP' 交圆平面于 M , 则两个平面直角三角形 PMC 和 PMD 就全等。因此

$$\text{弦 } PC = \text{弦 } PD.$$

由于等圆内弦等则弧等,故

$$PC = PD.$$

同理

$$P'C = P'D.$$

这就证明了极到圆周上各点的距离是相等的。

关于圆的极,我们还有下列重要定理。

^①用微分几何中的大地线原理来证明这个命题,则更为清楚。

定理 I 大圆的极距离为一象限(=90°)。反之,如果球面上一点至其他两点(不是直径的端点)的距离都是一象限,则前一点必为通过后两点的大圆之极。

証 由图 3, 对于大圆 AB , 我們有

$$\angle POA = \angle P'OA = \angle POB = \angle P'OB = 90^\circ,$$

由于圆的中心角与所对之弧同度, 故

$$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{P'A} = \overset{\frown}{PB} = \overset{\frown}{P'B} = 90^\circ.$$

逆定理的证明: 因为

$$PA = PB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle POA = \angle POB = 90^\circ.$$

因之 PO 垂直大圆 AB 之平面, 即 P 为大圆 AB 之极。

§3. 球面角与球面三角形

球面角 两大圆相交所成之角, 叫做球面角, 其交点叫做球面角的顶点, 大圆弧叫做这球面角的边。如图 4 中, 球面角 APB 与 $AP'B$ (简记为球面角 P 与 P') 的顶点为 P 与 P' , 而 PAP' , PBP' 为其边。一般, 球面角是以过顶点的圆弧的二切线所夹的角来度量的。

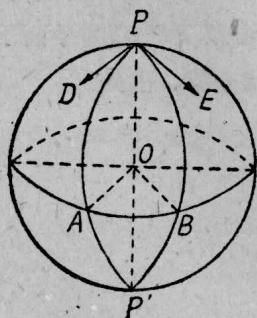


图 4.

在图 4 中, 設以 P 为极的大圆与球面角之边交于 A, B , 过 P 作 PA, PB 的切线 PD, PE , 則有

$$\angle DPE = \angle AOB,$$

即 球面角 $P = AB$.

这就是說, 球面角与以其顶点为极而夹在两边間的大圆弧同度。

球面三角形 球面上相交于三点的三个大圆弧所圍成的球面上的一部分, 叫做球面三角形。这三个大圆弧叫做球面三角形的

边。通常用小写拉丁字母 a, b, c 来表示。各大圆弧所成的球面角，叫做球面三角形的角，通常用大写拉丁字母 A, B, C 来表示。这三个边与三个角统称为球面三角形的六个元素。

将球面三角形 ABC 的各顶点与球心 O 连结，则构成球心三面角 $O-ABC$ (图 5)，显然由于圆的中心角与所对的弧同度，有

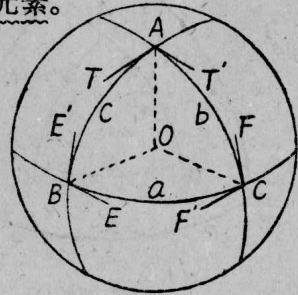


图 5.

$$a = \angle BOC,$$

$$b = \angle AOC,$$

$$c = \angle AOB,$$

$$\text{又} \quad A = \angle TAT', \quad B = \angle EBE', \quad C = \angle FCF'.$$

这就是说，球面三角形的边与所对应的球心三面角之面角同度，而球面三角形的角与球心三面角的二面角同度。

今后，为了方便和切合实用，我们所讨论的球面三角形，其边与角都限于小于 180° 。

§4. 极三角形

设球面三角形 ABC 各边 a, b, c 的极分别为 A', B', C' (图6)；且 AA', BB', CC' 都小于 90° ；过 A', B', C' 作大圆弧构成另一个球面三角形 $A'B'C'$ ，则这个球面三角形 $A'B'C'$ 叫做原球面三角形 ABC 的极三角形。

因为 B' 为 b 之极， C' 为 c 之极，由 §2 定理 I 的正定理得 $AB' = 90^\circ$ ， $AC' = 90^\circ$ ；从而再根据定理 I 的逆定理知： A 为 $B'C' = a'$ 之极 (图 7)，且 $AA' < 90^\circ$ 。

同理， B 为 $C'A' = b'$ 之极，且 $BB' < 90^\circ$ ； C 为 $A'B' = c'$ 之极，且 $CC' < 90^\circ$ 。

由此可知，球面三角形 ABC 也是球面三角形 $A'B'C'$ 之极三

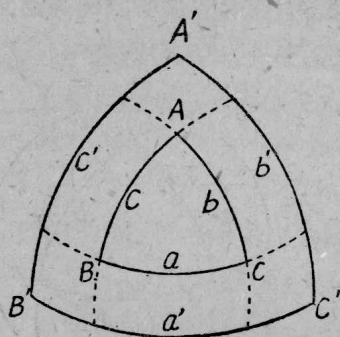


图 6.

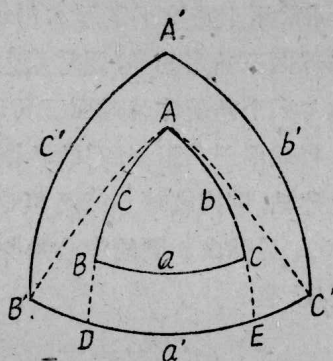


图 7.

角形。因之，我們有下列定理：

定理 II 若此球面三角形为彼球面三角形的极三角形，则彼球面三角形也为此球面三角形的极三角形。

又在图 7 中，延长 AB, AC 交 $B'C'$ 于 D, E ，则有

$$\begin{aligned}
 a' + A &= a' + DE && (\because A \text{ 为 } a' \text{ 之极}) \\
 &= B'D + DE + EC' + DE \\
 &= B'E + DC' \\
 &= 90^\circ + 90^\circ (\because B' \text{ 为 } AE \text{ 之极, } C' \text{ 为 } AD \text{ 之极, 据} \\
 &\quad \text{定理 I}) \\
 &= 180^\circ.
 \end{aligned}$$

同理：

$$b' + B = 180^\circ, \quad c' + C = 180^\circ.$$

因之得

定理 III 极三角形的边与原三角形之对应角互补。同时由定理 II 可以看出，极三角形的角与原三角形之对应边互补。

§5. 球面三角形的边和角的基本性质

性质 I 球面三角形两边之和大于第三边。

証 設球面三角形 ABC , 將它的頂點與球心連結(圖 8), 由立體幾何知識, 三面角的兩個面角的和大于第三面角, 即

$$\angle AOB + \angle BOC > \angle AOC.$$

故 $c + a > b.$

同理: $a + b > c, \quad b + c > a.$

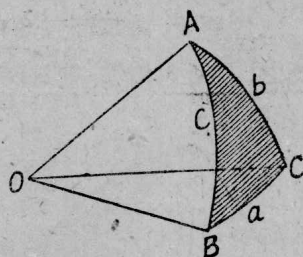


圖 8.

推論 球面三角形兩邊之差小于第三邊。

性質 II 球面三角形三邊之和大于 0° 而小于 360° 。

証 因為 $a, b, c > 0$, 故 $a + b + c > 0$ 。又因為由立體幾何中凸多面角各面角之和小于 360° , 故

$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA < 360^\circ,$$

因之 $c + a + b < 360^\circ$ 。

性質 III 球面三角形三角之和大于 180° 而小于 540° 。

証 我們來考察球面三角形 ABC 的極三角形 $A'B'C'$ (圖 7), 由定理 III 知

$$a' + A = 180^\circ, \quad b' + B = 180^\circ, \quad c' + C = 180^\circ.$$

然而由性質 II 知

$$0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ,$$

將 $a' = 180^\circ - A, \quad b' = 180^\circ - B, \quad c' = 180^\circ - C$ 代入上式, 則得

$$0^\circ < 180^\circ - A + 180^\circ - B + 180^\circ - C < 360^\circ,$$

即 $180^\circ < A + B + C < 540^\circ$ 。

性質 IV 球面三角形的兩角之和減第三角小于 180° 。

証 因為由性質 I 知

$$a' + b' > c',$$

∴ $180^\circ - A + 180^\circ - B > 180^\circ - C,$

即 $A + B - C < 180^\circ$ 。

同理: $A + C - B < 180^\circ, \quad B + C - A < 180^\circ$ 。

性质 V 若球面三角形的两边相等，则这两边的对角也相等。
反之，若两角相等，则这两角的对边也相等。

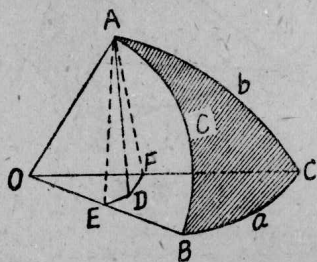


图 9.

証 (1) 設球面三角形 ABC 中， $b=c$ 。过 A 作平面 OBC 的垂綫交平面于 D ，再过 D 引 OB, OC 的垂綫 DE, DF ；由于

$$\angle AOE = \angle AOF, (\because b=c)$$

則 平面 $rt.\triangle AEO \equiv$ 平面 $rt.\triangle AFO$ ，

$$\therefore AE = AF.$$

因而

$$\text{平面 } rt.\triangle ADE \equiv \text{平面 } rt.\triangle ADF,$$

\therefore

$$\angle AED = \angle AFD,$$

即

$$B = C.$$

(2) 若 $B=C$ ，則由定理 III (考察 $\triangle ABC$ 之极三角形) 知

$$b' = c'.$$

于是根据(1)的証明

$$B' = C'.$$

再根据定理 III，得

$$b = c.$$

性质 VI 球面三角形中，大角对大边，大边对大角。

証 (1) 設在球面三角形 ABC 中， $B > A$ (图 10)。作球面角 $\angle ABC$ ，使其等于 A ，則由性质 V， $AD = BD$ 。

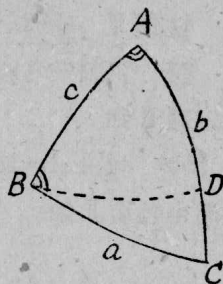


图 10.

因之，根据性质 I，有

$$b = AD + DC = BD + DC > a.$$

(2) 設 $b > a$ ，我們来求証 $B > A$ ，为了証明这点，采用反証法。

假定 $B > A$ ，則必 $B < A$ 或 $B = A$ ，于是根据(1)之証明和性质 V，必有 $b < a$ 或 $b = a$ ，这都与原設条件 $b > a$ 矛盾，所以当 $b > a$ 时，

必有 $B > A$ 。

以上所談的只不过是球面三角形边和角的几个主要性质，对于边和角的其他一些性质，这里就不研究了。

例 求証 $\cos(P-A) > 0$ ，此处 $P = \frac{1}{2}(A+B+C)$ 。

証 由性质 IV，知 $P-A = \frac{1}{2}(B+C-A) < 90^\circ$ 。又由性质 III， $A+B+C > 180^\circ$ ，但 $2A < 360^\circ$ ，将这二不等式相减，得 $B+C-A > -180^\circ$ ，或 $P-A = \frac{1}{2}(B+C-A) > -90^\circ$ 。这就是说：

$$-90^\circ < P-A < 90^\circ,$$

因之

$$\cos(P-A) > 0.$$

§6. 全等球面三角形

在同球或等球上，两球面三角形的对应边和角分别相等，而且排列顺序相同，则称这两个球面三角形全等。

定理 IV 在同球或等球上两个球面三角形，有下列条件之一，且相等部分排列顺序相同，则这两个球面三角形全等：

1. 两边及其夹角彼此相等。
2. 两角及其夹边彼此相等。
3. 三边彼此相等。
4. 三角彼此相等。

証 前三种情况可用重迭法从球心三面角之全等推出，这里就不必详加叙述了。至于第四种情况，需要借助于极三角形而加以证明。现在证明如下：

設在球面三角形 ABC, DEF 中，已知

$$A=D, B=E, C=F.$$

且排列顺序相同，作它们的极三角形 $A'B'C', D'E'F'$ (图 11)，则根

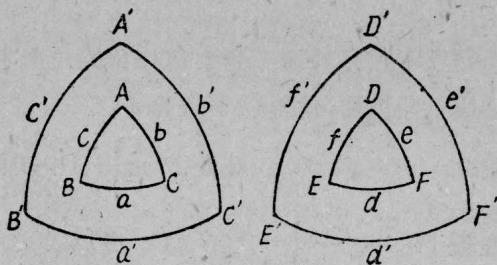


图 11.

据定理 III, 有

$$A + a' = 180^\circ = D + d',$$

$$B + b' = 180^\circ = E + e',$$

$$C + c' = 180^\circ = F + f'.$$

因为 $A = D$, $B = E$, $C = F$, 所以

$$a' = d', \quad b' = e', \quad c' = f'.$$

于是根据本定理第三种情况, 球面三角形 $A'B'C'$ 与球面三角形 $D'E'F'$ 全等。故

$$A' = D', \quad B' = E', \quad C' = F'.$$

再根据定理 III

$$A' + a = 180^\circ = D' + d,$$

$$B' + b = 180^\circ = E' + e,$$

$$C' + c = 180^\circ = F' + f.$$

因而

$$a = d, \quad b = e, \quad c = f.$$

所以球面三角形 ABC 与球面三角形 DEF 全等, 而定理证毕。

显然, 由于全等球面三角形可以重合, 它们的面积是相等的。

§7. 对称球面三角形

在同球或等球上两球面三角形的对应边和角分别相等, 而其排列顺序不相同, 则称这两个球面三角形互为对称三角形。