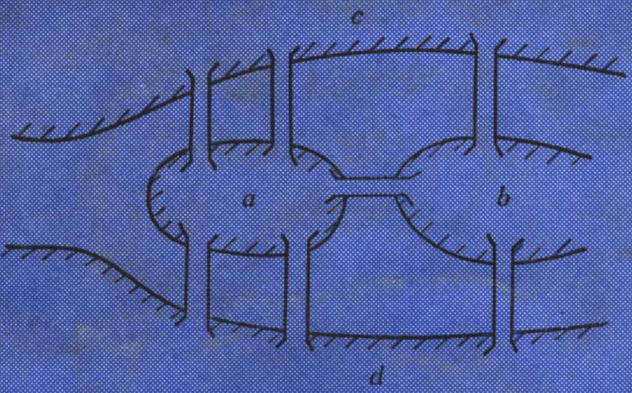
离散数学

孙怀民 主编



北京航空航天大學出版社

离散数学

孙怀民 主编

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书为处理离散型信息所必需的数学基础。全书共分：一、数理逻辑；二、集合论；三、图论；四。有限自动机理论；五、代数系统等五篇，各篇的内容均侧重于基础理论的介绍，同时又适当联系上述各个领域在计算机科学与工程技术方面的应用。本书可作为大学本科计算机专业“离散数学”课程的教科书，也可供广大计算机工作者和爱好者自学或作参考。

离 散 数 学

LISAN SHUXUE

孙怀民 主编

责任编辑 郭维烈

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行 各地新华书店经销

北京农业工程大学印刷厂印装

•

787×1092 1/16 印张：23.25 字数：595 千字

1990年元月第一版 1990年元月第一次印刷 印数：3500 册

ISBN 7-81012-139-1/O·014 定价：4.60 元

序　　言

这本教材是我们根据国内外的有关资料及十年来的教学实践并在原内部教材的基础上经进一步修改而成的，其目的是为了帮助计算机专业的学生打下学习计算机科学所必需的数学基础。因此，它的内容侧重于基本理论的介绍，但同时又适当地联系到这些理论在计算机科学与工程的各个领域中的应用。本书包括数理逻辑、集合论、图论、有限自动机理论和代数系统五个部分，分作五篇。现在国内习惯上把它们都归属为“离散数学”。严格说来，它们是相对独立的，很难说是一个整体的数学体系。我们认为，它们既可以作为“离散数学”课程的五个部分讲授，又可以分开来作为独立课程讲授。鉴于数理逻辑对于计算机科学理论、程序方法论、程序语言、人工智能等都有着异常重要的意义，所以我们把它安排在第一篇讲授，以期使学生能受到一些抽象逻辑思维的训练，并为以后深入钻研上述各领域打下一个初步基础。因此，我们在本篇中比较多地联系到数理逻辑方法在计算机科学中的应用。第二篇集合论旨在帮助学生建立一些重要数学概念及掌握一种通用性的描述语言。第三篇图论旨在向学生介绍这门理论的基本概念，其中有些重要内容将在后续的专业课程如数据结构、算法设计中进一步展开。第四篇有限自动机理论可以看成是离散数学在计算机科学中的应用。第五篇代数系统对前面的内容能起一种总括和提高的作用，使读者在抽象思维和数学深度方面受到进一步锻炼。

本书相应部分均安排一定数量的习题，其中包含一定数量的难题，都是为帮助读者加深理解相应内容而编排的。

本书的全部内容曾在北京航空航天大学(原北京航空学院)计算机工程与科学系讲授过十多遍，其中的数理逻辑、集合论、图论等部分曾先后在清华大学、北京大学、北京工业大学二分校等院校的计算机科学与工程系讲授过。在讲授过程中从各兄弟院校那里也获得教益。在此，仅向他们致谢。

本书的全部内容是经过反复讨论和总结教学经验而确定的。其中数理逻辑由孙怀民执笔，集合论由李鸿祥执笔，图论由许光汉执笔，有限自动机理论由谭风琴执笔，代数系统由马士龙执笔，全书由孙怀民主编。因为本书是在原内部教材的基础上改编的，所以特向原教材的有关编著者及有关同志表示谢意。

最后，仅向负责本书编辑、出版的有关同志表示谢意。

编　者

1988年10月

DAA77/68 05

目　录

第一篇　数理逻辑

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第二篇　集　合　论

第三篇 图 论

第四篇 有限自动机理论

第五篇 代数系统

第一篇　数理逻辑

第一章　命题演算

§1.1　引　言

数理逻辑，顾名思义就是用数学方法处理逻辑问题的理论。所以可以称它为逻辑的数学。由于过去在数学基础的研究中，它被用作处理数学逻辑基础的工具，所以又可以看成是数学的逻辑。我们学习数理逻辑，侧重的是前一方面。因为在计算机科学中，不论是硬件的逻辑设计原理还是软件设计中所牵涉到的程序逻辑如程序正确性问题等，都要求人们对复杂的逻辑问题进行严格细致的处理。而数理逻辑恰恰能为处理逻辑问题提供严格的、形式化的理论工具。此外，数理逻辑还能使人们在逻辑思维方法方面受到训练。所以对从事计算机科学技术工作的人来说，学习数理逻辑的基础知识是十分必要的。

本章首先介绍数理逻辑的基本部分，即命题演算，为学习谓词演算的推理理论作好准备，而谓词演算对程序逻辑说来是至关重要的。

§1.2　基本概念

Ⅰ　命题演算，或者叫语句演算、语句逻辑，是数理逻辑中最初等的，然而也是最基本的组成部分。所谓"命题"，是指一个有意义的陈述句，我们可以由其内容决定它是真或是假。凡是一命题，总是代表人们进行理性思维活动时的一种判断。它总是肯定或否定某种客观事物的某种性质。如果我们认为它所作的判断是正确的，我们就说这个命题是真的，否则，就说它是假的。例如，"实践是检验真理的标准"就是一个命题。我们认为这个命题的值为真，或者说，它是一个真命题。"天下乌鸦一般黑"，这也是一个命题，至少在我们地球上的人类所知道的狭小的时间和空间范畴内，它是一个真命题。但是，这一命题受到时间和空间的条件限制，超出了这一限制也可能成为假命题。

Ⅱ　以上是关于"命题"及其"值"这样两个概念的内涵的解释。但是内涵的意义很难构成数学的定义。因为它会因人、因地、因时而异。"实践是检验真理的标准"这个命题，对于辩证唯物主义者来说是真命题，对于康德或者黑格尔来说就不然了。"人类即将进入二十一世纪"这样一个命题，在今天是个真命题，二十年以后就是假命题了。"此一时也，彼一时也"。因此，如果纠缠在各种各样具体命题的具体真值方面，就无法把命题这一概念当作一个一般性的概括性的数学概念来处理。所以在数理逻辑中撇开了"命题"这一概念的内在涵义，而把它看成一个抽象化的形式化的概念。在数理逻辑的语言中，我们仅仅把命题看成一个可取真值或假值（二者必居其一，也仅居其一）的陈述语句。此时我们所关心的不是这些陈述语句的真值究竟是真还是假，而关心的是它可以被赋予真、假二值之一这样一种可能性，以及假如规定了它的赋值后，它将怎样与其他的命题发生联系。

在研究命题与命题之间的关系时，数理逻辑把命题分成两类：基本命题与复合命题。前者是构成数理逻辑对象语言的最基本的，不可再分的要素。因此，也把基本命题叫做本原命题或原子命题。这里所说的原子是意味着没有内部结构的最小整体。

复合命题是由基本命题经过逻辑联词联结而构成的。

§1.3 逻辑联词与命题公式

本节研究怎样通过一些严格定义了的形式化运算，由原子命题出发逐步地构成愈来愈复杂的复合命题。这些形式化运算的算符，就叫做**逻辑联词**。

下面我们用大写拉丁字母P、Q等代表命题。

定义1 逻辑联词"$\wedge$"是一个二元运算，它将两个命题P、Q复合成一个新的命题（$P\wedge Q$）。读作"P与Q"，或读作"P与Q的合取"。复合命题的真值与原来两个命题的真值的关系如表1-1。复合命题($P\wedge Q$)的逻辑涵义是说"命题P与命题Q都是真命题"。所以只有当P与Q都为真时，（$P\wedge Q$）才为真。

例 设命题P是"$(n-1)!+1$可被n整除"，命题Q是"n不是素数"。命题（$P\wedge Q$）就是"$(n-1)!+1$可被n整除并且n不是素数"。我们知道，此时（$P\wedge Q$）是一个恒假命题。

表 1-1

P	Q	$P\wedge Q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

定义2 逻辑联词"$\vee$"是一个二元运算，它将两个命题P、Q复合成一个新的命题（$P\vee Q$）。读作"P或Q"或者"P与Q的析取"。复合命题（$P\vee Q$）的逻辑涵义是说"命题P以及命题Q中至少有一个是真命题"。所以只有当P与Q都是假命题时，（$P\vee Q$）才为假。表1-2就是（$P\vee Q$）的真值表。

表 1-2

P	Q	$P\vee Q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

例 设P代表命题"$x>y$"，Q表示命题"$x\leqslant y$"，（$P\vee Q$）就表示命题"$x>y$或$x\leqslant y$"。这是一个恒真命题。

定义3 逻辑联词"$\Longrightarrow$"〔注〕是一个二元运算，它将命题P和命题Q复合成一个新命题（$P\Longrightarrow Q$），读作"P蕴涵Q"。其真值表为表1-3所示。

表 1-3

P	Q	$P\Longrightarrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

对蕴涵这一概念，需要作进一步的解释：一般说来，P蕴涵Q可以理解为"由命题P推

注：由于我们在以后将要介绍参考文献〔1〕中的公理系统，所以这里按照该书作法，用"$\Longrightarrow$"作为逻辑联词，表示"蕴涵"。这与传统的习惯有些不同，过去的数理逻辑文献中，习惯用"$\rightarrow$"或"$\supset$"表示蕴涵，而把"$\Longrightarrow$"当作另一种意义的元逻辑符号。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

论得命题Q”。现举例说明：

P：x为一正方形。

Q：x具有四等边。

$P \Longrightarrow Q$：“若x为一正方形，则 x 必有四等边”。这里的P称为Q的充分条件，即P是推导出Q的充分条件。现在反过来看，如果一个图形，且不管它是什么，但是它连“具有四等边”这一点也不为真，怎么可以称作“正方形”呢？故Q在$P \Longrightarrow Q$中是此蕴涵的必要条件。再例如：

P：甲住在北京。

Q：甲住在中国。

$P \Longrightarrow Q$：“若甲住在北京，则甲是住在中国”。当已知甲住在北京，便具有充分的条件论证说，甲是住在中国。反之，由甲住在中国，虽不能推导出甲住在北京，但这一命题却是“甲住在北京”之必要条件。

归纳起来，$P \Longrightarrow Q$的逻辑涵义是：

1) “Q是P的必要条件”（P为真时，Q不得为假）。

2) “P是Q的充分条件”。

3) “如果P为真，则Q必为真”。

这里应该指出，数理逻辑中的“蕴涵”与日常语言中的“蕴涵”的涵义有所不同。后者要求P与Q之间存在某种内在的联系，前者却只要求二者的真值符合表1-3。例如，设P是命题“今天出太阳”，Q是命题“$2+7>4$”。($P \Longrightarrow Q$)就是命题“如果今天出太阳，那么$2+7>4$”。在日常语言中，这是一个毫无意义的命题，然而在数理逻辑中，这却是一个真命题。因为“$2+7>4$”是个真命题，所以按照表1-3，不管今天出太阳（P为真）或不出太阳（P为假），($P \Longrightarrow Q$)都是一个真命题。

定义4 逻辑联词“$\Longleftrightarrow$”是一个二元运算，其真值表为表1-4所示。

复合命题（$P \Longleftrightarrow Q$）读作“P与Q互蕴涵”。其逻辑涵义是“P蕴涵Q且Q蕴涵P”。

定义5 逻辑联词“$\neg$”是一个一元运算，它将命题P变成一个与其真值相反的命题（$\neg P$），读作“非P”，其真值表为表1-5所示。

表 1-4

P	Q	$P \Longleftrightarrow Q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

表 1-5

P	$\neg P$
F	T
T	F

命题公式的真值表

上面介绍了一般数理逻辑文献中最常见的几种逻辑联词。下面再介绍命题公式的概念及命题公式的真值表。

所谓命题公式就是指用命题的形式变元和逻辑联词所描述的复合命题的构造形式。例如：

$$\neg P,\ P\vee Q,\ P\wedge(\neg Q),\ (P\wedge Q)\vee(\neg P)$$

都是命题公式。当用具体的命题代换命题公式中的形式变元后，命题公式就变成了命题。

一个命题公式如果有 n 个命题变元，那么在作上面所说的代换时，就可能出现2^n种不同的真值组合，根据前面所给出的逻辑联词定义及真值表，就可以得出命题公式的真值表。

下面给出一个构造命题公式的真值表的例题。在以下的行文中，为了省写括号我们规定：在命题公式中，联词“$\neg$”与形式变元的结合力强于“$\wedge$”，“$\wedge$”强于“$\vee$”，“$\vee$”强于“$\Longrightarrow$”和“$\Longleftrightarrow$”。例如，$\neg P\vee Q$表示$\neg P$与Q的析取，而不是$\neg(P\vee Q)$。$P\wedge Q\vee R$是复合命题（$P\wedge Q$）与基本命题R的析取，而不是P与（$Q\vee R$）的合取，等等。

例题　构造命题公式$P\vee\neg Q$的真值表

解　见表1-6

表　1-6

P	Q	$\neg Q$	$P\vee\neg Q$
F	F	T	T
F	T	F	F
T	F	T	T
T	T	F	T

习　　题

1. 设命题P、Q、R分别为

P：“林芳在看电视”

Q：“林芳在家里”

R：“林芳在做家庭作业”

以符号形式写出下列命题：

a）林芳或是在看电视，或是在家里；

b）林芳既不看电视，也不做家庭作业；

c）林芳在家里做家庭作业，不看电视；

d）如果林芳是在家里，那么她就是在看电视；

e）如果林芳是在家里，那么她不是在做家庭作业就是在看电视，但不会同时又看电视又做家庭作业。

2. 设命题P、Q分别为

P：“函数$f(x)$在区间$(a, b]$内是一致连续的”；

Q：“函数$f(x)$在区间$(a, b]$内是连续的”。

试用符号形式表示下列命题：

a）如果函数$f(x)$在区间$(a, b]$内是一致连续的，则它在这区间内也是连续的；

b）　如果函数$f(x)$在区间$(a, b]$内是连续的，则它在这区间内也是一致连续的；上述两个命题那个是真命题，那个是假命题？

3．　设P："三角形ABC是等腰三角形"。

　　Q："三角形ABC二底角的分角线相等"。

用符号表示下列命题：

"如果三角形是等腰三角形，则其底角的分角线必相等。反之，若三角形底角的分角线相等，则该三角形必为等腰三角情"。

这是不是一个真命题？

4．　令P："燕子飞回来"。

　　Q："春天来了"。

用逻辑符号写出下列命题：

a）　如果燕子飞回来，则春天来了；

b）　燕子飞回来，是春天来了的充分条件；

c）　燕子飞回来，是春天来了的必要条件；

d）　春天来了，是燕子飞回来的必要条件；

e）　春天来了，是燕子飞回来的充分条件；

f）　燕子飞回来，当且仅当春天来了。

5．　给定P和Q的真值为T、R和S的真值为F，求下列命题公式的真值。

a）　$(\neg(P\vee Q)\vee\neg R)\vee((Q\Leftrightarrow P)\Longrightarrow(P\vee\neg S))$；

b）　$(P\vee(Q\Longrightarrow(R\wedge\neg P)))\Leftrightarrow(Q\vee\neg S)$；

c）　$((\neg P\Longrightarrow((P\wedge\neg Q)\Longrightarrow R))\wedge Q)\vee\neg R$。

§1.4　永真复合命题的刻画

本节将以命题公式的真值表作为基本工具来探讨复合命题的真值。首先我们给出一些必要的概念。

定义6　合式公式的递归定义

一个由命题变元、逻辑联词和括号排成的序列，如果是按下述规则产生的，就叫做**合式命题公式**。

1　一个基本原子命题的字母是合式公式。

2　如果A是一合式公式，则$\neg A$也是一合式公式。

3　如果A和B是合式公式，则$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$，$(A\Longrightarrow B)$，$(A\Leftrightarrow B)$都是合式公式。

4　一个由命题变元，逻辑联词和括号组成的符号串，如果它是被有穷次地运用规则1，2，3而产生，就是一个合式公式。[注]

注：因为我们只对合式公式感兴趣，所以在后文中我们将不区别合式公式与命题公式。即以后所有命题公式皆指合式公式。

定义7 一个合式命题公式，如果当代入所有可能的基本命题真值组合时，所形成的命题恒为真，这样的公式就叫做**永真公式**。

定义8 设A和B是含n个共同的命题变元的命题公式，如果对于2^n个可能的真值组合的任意代入，二者都有相同的真值，则称**A等价于B**，记为$A \equiv B$。

定义8中的"$\equiv$"并不是属于我们所建立的逻辑体系的符号，它是描述逻辑体系的元语言，所以是一个元逻辑符号。下面的定理1表明了符号"$\equiv$"与逻辑联词"$\Longleftrightarrow$"之间的关系。

定理1 如果A和B是命题公式（不一定含相同的变元数），则当且仅当"$A \Longleftrightarrow B$"是永真公式时方有$A \equiv B$。

证 根据定义8，如$A \equiv B$，则不管作任何代入（仅要求对二者共同含有的变元代以相同的命题），A和B都保持相同的真值，因而恒有$A \Longrightarrow B$及$B \Longrightarrow A$，即$A \Longleftrightarrow B$恒真。反之，如$A \Longleftrightarrow B$是永真公式，则定义8恒满足。

符号逻辑演算的基本任务之一，是要判断某个给定的命题公式是否是永真公式；或者是要判断两个命题公式是否等价。一种最简单而直观的演算方法就是利用真值表，下面结合例题来说明这种方法。由于上面对"等价"的定义是指二公式的真值相等，所以在本章以下行文中，不再区分等价符号"$\equiv$"和普通数学中的"$=$"号。

例题1 证明下列四个公式是永真公式

a） $P \vee P \Longleftrightarrow P$

证 见表1-7a

由于a式中只含一个形式变元P，所以可能代入的真值组合只有$2^1=2$种情况，即$P=F$和$P=T$。对于两种情况，a式的真值都是T，故由定义7知：a式是永真公式。

b） $P \Longrightarrow P \vee Q$

证 见表1-7b

表 1-7a

P	$P \vee P$	$P \vee P \Longleftrightarrow P$
F	F	T
T	T	T

表 1-7b

P	Q	$P \vee Q$	$P \Longrightarrow P \vee Q$
F	F	F	T
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	T	T

c） $P \vee Q \Longrightarrow Q \vee P$

证 见表1-7c。

表 1-7c

P	Q	$P \vee Q$	$Q \vee P$	$P \vee Q \Longrightarrow Q \vee P$
F	F	F	F	T
F	T	T	T	T
T	F	T	T	T
T	T	T	T	T

d) $(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow (R \vee P \Longrightarrow R \vee Q)$

证：见表1-7d。

表 1-7d

P	Q	R	$R \vee P$	$R \vee Q$	$(R \vee P \Longrightarrow R \vee Q)$	$P \Longrightarrow Q$	d)式
F	F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	T	T	T	T	T	T

例题1表明：a到d都是永真公式。

在下面的例题中，我们用永真公式的概念来定义逻辑联词的“完备集合”的概念。

例题2 证明每个命题都有一个与其等价的命题，该等价命题可仅用逻辑联词“$\neg$”及“$\vee$”来表示。

证 只需分别证明下列三条：

a) $P \wedge Q = \neg(\neg P \vee \neg Q)$

按照定理1，只需证明$P \wedge Q \Longleftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$是永真公式。

用真值表证明，见表1-8a。

表 1-8a

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$P \wedge Q$
F	F	T	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
T	T	F	F	F	T	T

顺便说一句，a式是德·摩根（De Morgan）定理的表现形式之一。通常又写为

$$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$$

在数理逻辑和集合论的理论研究以及逻辑线路设计中都有着非常重要的应用。德·摩根定理的另一形式是

$$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$$

此式的验证留作习题。这两个公式以后都要用到。

b) $P \Longrightarrow Q = \neg P \vee Q$

证 见表1-8b

c) $P \Longleftrightarrow Q = \neg[\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg Q \vee P)]$

表 1-8b

P	Q	$\neg P$	$\neg P\vee Q$	$P\Longrightarrow Q$
F	F	T	T	T
F	T	T	T	T
T	F	F	F	F
T	T	F	T	T

证 由本例题a）及b）可得

$$\begin{aligned} P\Longleftrightarrow Q &= (P\Longrightarrow Q)\wedge(Q\Longrightarrow P)\\ &=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P)\\ &=\neg[\neg(\neg P\vee Q)\vee\neg(\neg Q\vee P)] \end{aligned}$$

例题 2 表明了§1.3中所定义的五个逻辑联词并不是彼此独立的。命题演算的符号运算系统可以只用“$\neg$”及“$\vee$”两个逻辑联词建立起来。从这个意义上讲，我们说{$\neg$，$\vee$}是逻辑联词的完备集。{$\neg$，$\wedge$}也是完备集。这一点我们留作习题。在讲述公理化系统时，我们将采用{$\Longrightarrow$，F}作为逻辑联词的完备集。其中F是一种特殊的0元联词，即恒假命题。[注]下面的例题介绍了一种只含一个逻辑联词的完备集{$\uparrow$}即所谓谢弗(Sheffer)算符。

例题3 证明每个命题都有一个等价命题，该等价命题可用逻辑运算$P\uparrow Q$（读作P与Q的非）表示。逻辑联词“$\uparrow$”的定义（真值）如表1-9所示。

表 1-9

P	Q	$P\uparrow Q$
F	F	T
F	T	T
T	F	T
T	T	F

证 利用例题 2 的结果，只需证明“$\neg$”运算和“$\vee$”运算均可用“$\uparrow$”运算代替。即要分别证明：

a）$\neg P=P\uparrow P$

b）$P\vee Q=\neg P\uparrow\neg Q$

表 1-10a

P	$\neg P$	$P\uparrow P$
F	T	T
T	F	F

表 1-10b

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P\uparrow\neg Q$	$P\vee Q$
F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T

注：对于不熟悉参考文献〔1〕的公理系统的人来说，可能觉得把F当做逻辑联词很别扭，其实这和我们把一个常数看成0元常函数的作法是一样的。详见〔1〕及本书第一章§2.2。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com