高等学校试用教材

高等数学

上册

南京工学院数学教研组编

人民教育出版社

高等学校试用教材

高　等　数　学

上　册

南京工学院数学教研组编

*

人民教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

上海群众印刷厂印装

*

1978年3月第1版　1979年6月第2次印刷

书号 13012·0142　　定价 1.00 元

前　　言

1．本书是根据1977年10月在北京召开的高等学校工科基础课教材座谈会的精神和同年11月在西安召开的高等学校工科数学教材编写会议所制订的编写大纲，并基本上按照西安会议提出的“高等数学内容深广度的建议”而编写的．

2．全书分上、下两册．上册介绍了集合和映射的一些基本概念，并运用集合和映射的观点对一些重要概念和内容如函数、导数、定积分、微分方程等，作了初步的描述．

3．我们将基本初等函数图形、双曲函数、常用的初等数学公式、微积分的基本公式、积分表等都列入附录，以供选用．书末附有习题答案．

4．参加本书审稿会议的有华东水利学院任荣祖（主审）、石根弟、张敦穆，哈尔滨工业大学杨克劭，华南工学院罗家洪，成都工学院徐荣中，西南交通大学黄成清，镇江农机学院杨庆霄，南京邮电学院叶章钊，哈尔滨建筑工程学院吴登青，华东工程学院王观寿等同志．对他们所提的宝贵意见，我们表示深切谢意．

5．本书是在我组过去所编高等数学的基础上进行编写的．参加这次编写的有陶永德、高金衡、唐鸿龄、王文蔚、刘鑑明、黄新芹、罗庆来等同志．

由于我们对马列主义、毛泽东思想学习不够，业务水平不高，时间短促，因此，本书中存在缺点、错误一定很多，希望同志们批评指正。

编　者

1978年3月

目　　录

上　　册

第一章 集合与函数

§1-1 集合的概念

集合是现代数学中一个十分重要的概念，这不仅由于集合论已经发展成为内容极其丰富的一个数学分支，主要由于它已渗透到数学的各个领域，其中包括初等数学、解析几何、微积分学等基础课程. 因此，我们在本书开始，简单地介绍一下集合的一些基本知识.

1. 集合的概念

集合是一种最原始的概念，我们不可能找到更简单的概念来给它下个定义，只能给它一种描述. 一般可以把集合了解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体. 例如，某班全体学生，某页书中的所有字，一克水所含有的氧原子，一已知方程式所有的根，所有的三角函数，正切为 $\sqrt{3}$ 的所有角等都可以说是集合. 其实，我们很早就遇到过集合的事例了. 例如，我们在开始学习计数时就遇到自然数 1, 2, 3, ……所成的集合，在几何里遇到的圆周为平面上到一已知点等距的所有点的集合等.

我们把组成某一集合的那些对象，叫做这个集合的**元素**. 因此，上面所述的许多集合事例中，学生、字、原子、数、函数、角等等都分别为相应集合的元素. 可见集合的元素可以是各种各样的对象，因此，可以看出集合具有广泛性的特色.

习惯上用大写字母 A、B、C 等表示集合，而用小写字母 a、b、c 等表示集合的元素. 如果 a 是集合 A 的元素，就记为 $a\in A$，读作"a 属于 A"，否则记为 $a\notin A$，读作"a 不属于 A".

如果一个集合的元素可以一一例举出来，我们就用一个花括

弧{ }把这些元素括起来以表示这个集合．例如集合 S 包含1, 2, 3, 4 这四个数，就可记为

$$S=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

仅含有限多个元素的集合叫做**有限集合**，含有无限多个元素的集合叫做**无限集合**．例如，由全体自然数 1, 2, 3, ……所成的集合就是一个无限集合，这个集合今后常遇到，我们用一个特定的字母 N 表示它，即

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots\}.$$

如果一个集合 S 是由具有某种共同性质 p 的元素 x 组成，这时集合 S 仍可以用{ }记为

$$S=\{\text{元素 } x \mid x \text{ 具有性质 } p\},$$

或者省去“元素”两字，简记为

$$S=\{x \mid x \text{ 具有性质 } p\}.$$

例如，全体偶数所成的集合 E 可以记为

$$E=\{x \mid x=2n,\ n\in N\},$$

用这种记号描述集合，可以起简化作用．

例 1　xOy 平面内在直线 $x+y=3$ 上的一切点所成的集合 A 可以记为

$$A=\{\text{点}(x,\ y) \mid x+y=3\}.$$

例 2　xOy 平面上一切平行于直线 $x+y=3$ 的直线 l 所成的集合 B 可以记为

$$B=\{\text{直线 } l \mid l \parallel \text{ 直线 } x+y=3\}.$$

例 3　所有实系数二次多项式的集合 P_2，可以记为

$$P_2=\{ax^2+bx+c \mid a,\ b,\ c \text{ 为实数},\ a\neq 0\}.$$

只含一个元素 x 的集合叫做**单元素集**，记为 $\{x\}$．不含任何元素的集合叫做**空集**，记为 ϕ．例如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解的集合就是一个空集．

2. 子集

定义 1 如果集合 A 的每一个元素都属于 B，便称 A 为 B 的子集，记为

$$A \subset B \quad 或 \quad B \supset A,$$

读作 A 包含于 B 或 B 包含 A(图 1-1).

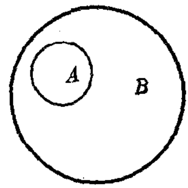

图 1-1

例 4 设 A 表示某校某班级全体学生的集合，B 表示该校全体学生的集合，则 $A \subset B$，即 A 为 B 的子集.

例 5 设 A 表示平面上所有等边三角形的集合，B 表示平面上所有三角形的集合，则 $A \subset B$，即 A 为 B 的子集.

由定义可知，任何一个集合的本身是它的子集，即 $A \subset A$；空集是任何一个集合的子集.

定义 2 设有集合 A 与 B，如果 $A \subset B$，$B \subset A$，便称 A 与 B 相等，记作

$$A = B.$$

很明显，含有相同元素的两个集合相等.

例如，$A = \{2, 3\}$，B 为方程式

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

的根所组成的集合，则 $A = B$.

读者在中学已经学过实数，都知道实数对于不等号具有这样性质：若 $a < b$，$b < c$，则 $a < c$，其中 a、b、c 是三个实数. 集合对于“包含”关系具有类似的性质，即

若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$，其中 A、B、C 为三个集合. 事实上，设任意一个 $x \in A$，因为 $A \subset B$，所以 $x \in B$，又因为 $B \subset C$，所以 $x \in C$，即 $A \subset C$.

例如，某系某班全体学生所成的集合，包含于该系全体学生所成的集合，后者又包含于全校学生所成的集合，因此某班全体

学生的集合包含于全校学生所成的集合．在考虑某集合 S 的一切子集时，要注意把 S 本身及空集 ϕ 都要算在内．例如，集合 $S=\{0, 1, 2\}$ 的一切子集是

$$\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}.$$

这里要注意 0 是一个数，所以 $\{0\}$ 是一个单元素集，而不是空集 ϕ，不能把 $\{0\}$ 和 ϕ 混为一谈．

3．区间

如果所讨论的一些集合都是某一集合 U 的子集，则称 U 是**母集**．例如，R 是全体实数的集合（以后一律用 R 表示全体实数集），若 A 是满足不等式 $-1<x<2$ 的一切实数 x 的集合，则 A 可记为

$$A=\{x \mid -1<x<2, x\in R\}.$$

如果已经明确母集是 R，则可简记为

$$A=\{x \mid -1<x<2\}.$$

今后在讨论实数组成的集合问题时，都假定 R 是母集．下面来介绍一些以后常遇到的实数集．

设 a, b 为任意两实数，且 $a<b$．我们把

(1) 满足不等式

$$a<x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_1=\{x \mid a<x<b\}$$

叫做**开区间**，并记为 (a, b) 或 $a<x<b$；

(2) 满足不等式

$$a\leqslant x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_2=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

叫做**闭区间**，并记为 $[a, b]$ 或 $a\leqslant x\leqslant b$；

(3) 满足不等式

$$a<x\leqslant b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_3=\{x|a<x\leqslant b\}$$

叫做**左开区间**，并记为$(a, b]$或 $a<x\leqslant b$;

(4) 满足不等式

$$a\leqslant x<b$$

的所有实数 x 的集合

$$I_4=\{x|a\leqslant x<b\}$$

叫做**右开区间**，并记为$[a, b)$或 $a\leqslant x<b$.

在数轴上，这些区间都可以用一线段来表示．其中 a, b 叫做区间的**端点**，端点之间的距离叫做区间的**长度**，区间的长度为有限数的，叫做**有限区间**．上面 I_1、I_2、I_3、I_4 都是有限区间．不过有的包括两个端点在内如(2)，有的不包括端点如(1)，有的只包括一个端点如(3)、(4)．

除了有限区间外，还有无限区间，现规定下列符号的意义:

(1) $(a, +\infty)$或 $a<x<+\infty$ 表示集合

$$\{x|x>a\};$$

(2) $(-\infty, a)$或 $-\infty<x<a$ 表示集合

$$\{x|x<a\};$$

(3) $(-\infty, +\infty)$或 $-\infty<x<+\infty$ 表示全体实数集 R.

同样可以规定$[a, +\infty)$和$(-\infty, a]$.

明了区间概念后，我们知道集合

$$A=\{x|-1<x<2\},$$

就是区间$(-1, 2)$.

习　题　一

1. 设母集是实数集，指出以下集合是怎样的集合，并给出它们的几何图示.

(1) $A=\{x \mid x^2=9\}$;

(2) $B=\{x \mid x+2=4\}$;

(3) $C=\{x \mid x^2<9\}$;

(4) $D=\{x \mid x^2-x-6=0\}$.

2. 在 xOy 平面上下列集合是怎样的集合，并给出它们的几何图形：

(1) $A=\{\text{点}(x, y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$;

(2) $B=\{\text{点}(x, y) \mid 2xy=1\}$.

3. 设 $U=\{a, b, c\}$，下列记法哪些是正确的，为什么？

(1) $a \in U$;　　(2) $a \subset U$;

(3) $\{a\} \in U$;　　(4) $\{a\} \subset U$.

4. 用集合的记号表示以下各个集合：

(1) 小于 100 的正整数集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 的内部一切点的集合.

§1-2　集合的运算

如同几个实数结合起来(例如通过加法或乘法)可以产生其它的数一样，几个集合也可以按一定的方式结合起来产生其它的集合．下面介绍集合的几种基本运算——并，交以及差.

1. 集合的并

定义 1　把集合 A 的元素与集合 B 的元素全部集中起来所成的集合，叫做 A 与 B 的并(图 1-2)，记为 $A \cup B$，即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \quad \text{或} \quad x \in B\}.$$

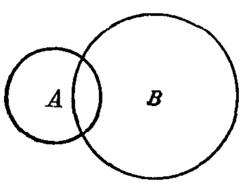

图 1-2

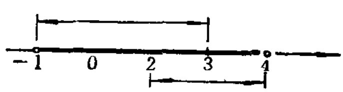

图 1-3

例如，$\{1, 3, 2\} \cup \{6, 3, 4, 2\}=\{1, 2, 3, 4, 6\}$;

$\{1, 3, 2\} \cup \{7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 7, 8, 9\}$;

$(-1, 3) \cup (2, 4) = (-1, 4)$(图 1-3).

很明显，集合的并具有以下简单性质(图 1-2)：

(1) $(A \cup B) \supset A$;　　　　(2) $(A \cup B) \supset B$.

集合的并的概念可以推广到三个以至更多个集合上去，例如

$\{1, 3, 2\} \cup \{2, 4, 6\} \cup \{9, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9\}$.

2. 集合的交

定义 2 把既属于 A 又属于 B 的元素集中起来所成的集合叫做 A 与 B 的交(图 1-4)，记为 $A \cap B$，即

$$A \cap B = \{x \mid x \in A, \text{同时 } x \in B\}.$$

如果 $A \cap B = \phi$，就说 A，B 不相交．例如

$\{1, 3, 2\} \cap \{2, 4, 6, 1\} = \{1, 2\}$;

$\{2, 4, 6\} \cap \{5, 7\} = \phi$;

$[-1, 2) \cap (0, 3] = (0, 2)$(图 1-5).

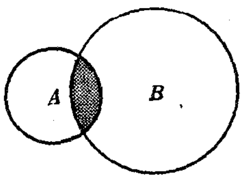

图 1-4

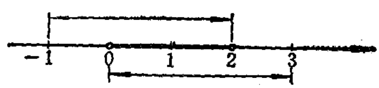

图 1-5

很明显，集合的交具有以下简单性质(图 1-4)：

(1) $(A \cap B) \subset A$;　　　　(2) $(A \cap B) \subset B$.

3. 集合的差

定义 3 由属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合，叫做 A 与 B 的差(图 1-6)，记为 $A \setminus B$，即

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}.$$

注意，在差的定义中并没有要求 $B \subset A$．例如

$\{1, 2, 4, 5\} \setminus \{3, 4, 5, 7\} = \{1, 2\}$;

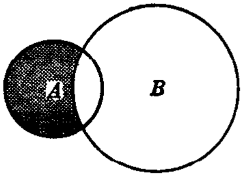

图 1-6

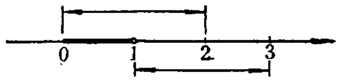

图 1-7

$[0, 2]\setminus[1, 3]=[0, 1)$(图 1-7).

4. 并与交的一些基本性质

集合的并与交具有许多与初等代数里加法与乘法相似的性质,我们列几条如下:

(1) 可交换性 $A\cup B=B\cup A$;

$$A\cap B=B\cap A.$$

(2) 可结合性 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$;

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

(3) 可分配性 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

性质(1)、(2)成立是明显的,现就(3)证明如下:

设 $x\in A\cap(B\cup C)$, 则 $x\in A$, $x\in(B\cup C)$, 因此: $x\in A$ 同时 $x\in B$, 或 $x\in A$ 同时 $x\in C$, 也就是 $x\in(A\cap B)$或 $x\in(A\cap C)$, 即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 所以 $A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$; 另一方面,设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$,则 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$, 因此 $x\in A$ 同时 $x\in B$, 或 $x\in A$ 同时 $x\in C$, 也就是 $x\in A$ 同时 $x\in B\cup C$, 即 $x\in A\cap(B\cup C)$, 所以 $A\cap(B\cup C)\supset(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 由 §1-1 定义 2, 性质(3)成立.

习 题 二

1. 设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, c, e, f\}$, $C=\{a, b, d, f, g\}$.

(1) 求 $A\cup B$, $B\cup C$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\setminus B$, $B\setminus C$;

(2) 验证 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

$$A \cup (B \cap C) \neq (A \cup B) \cap C.$$

2. 求下列各题集合的并、交与差:

(1) $A=[0, 1]$, $B=[1, 3]$;

(2) $A=[-1, 4]$, $B=[2, 4]$.

3. 设 A 为母集 U 的一个子集, 由属于 U 而不属于 A 的元素所构成的集合,叫做 A 的**余集**,记为 A'. 试证明

(1) $A \cup A'=U$; (2) $A \cap A'=\phi$;

(3) $\phi'=U$.

4. 设 $U=\{a, b, c, d, e, f\}$, $A=\{a, b, c\}$, $B=\{a, c, f\}$, 求

(1) A'; (2) B';

(3) $A' \cup B'$; (4) $A' \cap B'$.

§1-3 集合的映射

映射的概念是有关集合的一个重要的概念,在这里,我们对它作一个简单介绍.

1. 映射的概念

定义 1 若有两个已知集合 A 与 B, 设 f 表示某种确定的对应规律, 使得对于每一个元素 $x \in A$, 通过 f 都有一个唯一的元素 $y \in B$ 与之对应,记为

$$x \xrightarrow{f} y \quad 或 \quad f(x)=y,$$

便说 f 是一个由 A 到 B 的**映射**①. y 叫做 x (在 f 下)的**象**,而 x 叫做 y (在 f 下)的**原象**(图 1-8).

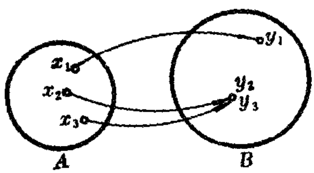

图 1-8

例 1 设 A、B 分别表示某校全体学生与他们的学号所成的集合, f 表示对于 A 中每一个元素 (学生) 取他的学号的对应规律,则 f 就是一个由 A 到 B 的映射.

---

① 要注意: 映射是由 A, B, f 三者统一确定. 如果 A, B 已经明确之后, f 就可简称为映射.

例 2 设 T 表示平面上所有三角形的集合，R_+ 表示所有正实数的集合，f 表示对于 T 中每一个元素(三角形)取它的面积的对应规律，则 f 便是一个由 T 到 R_+ 的映射.

例 3 R 为实数集，对于每一个 $x\in R$，映射

$$x \xrightarrow{f} x^2 \quad 或 \quad f(x)=x^2=y$$

是一个由 R 到 R 的映射.

$x=0$ 的象是 $y=0$; $x=1$, $x=-1$ 的象都是 $y=1$. 反过来，$y=0$ 的原象是 $x=0$; 而 $y=1$ 的原象有两个，即 $x=1$, $x=-1$. 这个例子说明不同的 x 可以有相同的象.

例 4 仍用 R_+ 表示正实数的集合，R 为实数集合，对于每一个 $x\in R_+$，则映射

$$x \xrightarrow{f} \lg x \quad 或 \quad f(x)=\lg x$$

是一个由 R_+ 到 R 的映射.

现在再来谈谈定义中应注意的几个问题:

(1) 记号"f"与"$f(x)$"是有区别的，f 表示由 $x(x\in A)$ 产生 $y(y\in B)$ 的对应规律，$f(x)$ 表示在映射 f 下 x 的象 y，即 $f(x)=y$;

(2) x 可以遍取 A 中的元素，但它对应的 y 未必能遍取 B 中的元素. 如果 y 不能遍取 B 中的元素，便说映射 f 是由 A 到 B 内的映射，如例 3; 如果 y 能遍取 B 中的元素，便说映射 f 是由 A 到 B 上的映射，如例 1，例 4;

(3) 如果 B 中每一个元素 y 都有原象 x 而且只有一个原象，这时便称映射 f 是一一映射或一一对应，如例 1.

2. 映射的机械模拟

由上述几个例子可以看出映射这一概念的广泛适应性. 为了形象地理解这一概念，我们再用机械模拟的方法来解释一下. 我

们可以设想 $f(x)=y$ 中的 f 是一个某种自动装置，A 看作是输入集合，B 是输出集合．把 A 中元素 x 送进自动装置 f 的输入端，则在输出端便有 B 中元素 y 自动输送出来，此时 y 就是 x 的象(图 1-9)．

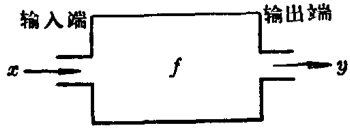

图 1-9

这有点类似于到一个自动化邮局，你投进四分硬币到自动售邮票机器中去，就会有四分一张的邮票自动送出来，投进八分硬币就会有八分邮票自动送出．

又可以设想 f 为一放大器，S_1 与 S_2 都是由正弦波所组成的集合．如果把一个角频率为 ω 的正弦波 $A\sin\omega t$ 输入 f，就有一个同频率而振幅和相位改变了的正弦波 $k(\omega)A\sin[\omega t+\varphi(\omega)]$ 输出(图 1-10)．

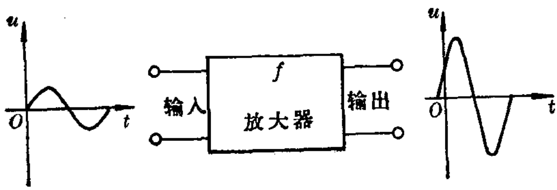

图 1-10

回到我们前面讲的几个例子．例如就例 2 讲，把一个三角形送进 f 的输入端，则输出的就是一个正实数(三角形的面积)．就例 1 讲，一个学生姓名送进输入端，就有该生学号从 f 中输出等等．f 还可以看作是一种运算器，对 x 进行 f 的运算，就产生 y．例如电子计算机中的平方装置，输入一个实数 x，输出的就是 x^2 等等．因此也可以把 f 叫作**运算子**．

3．代数方程的解与原象

有了映射的观点，解代数方程就变成为找原象的问题．现在来看下面的例题．

例 5　求解方程 $x^2-2x-3=0$．