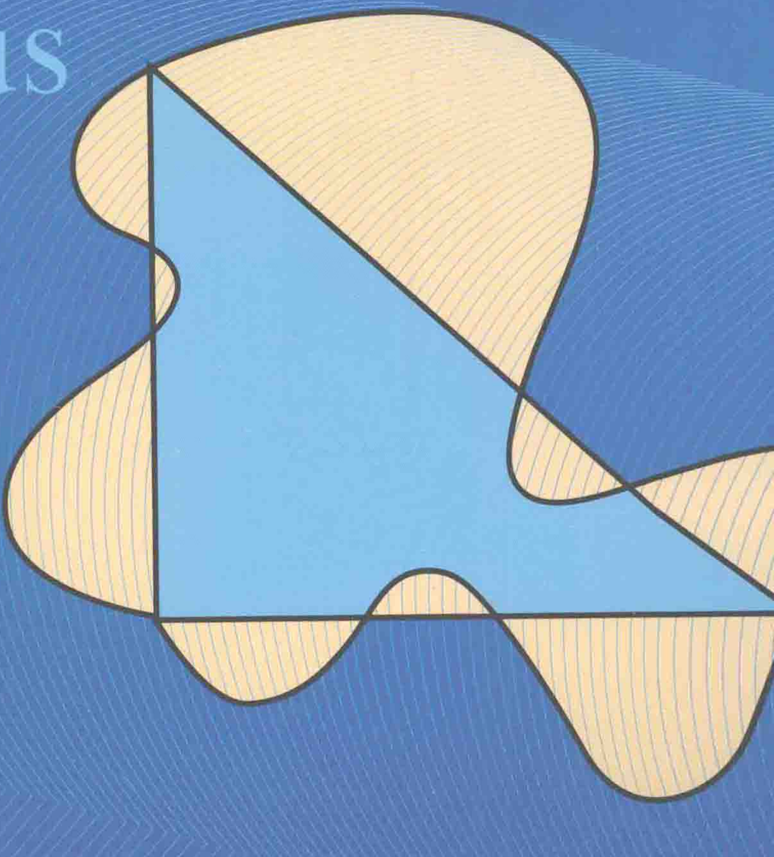
微积分

（下）

方源 王元

Calculus



高等教育出版社

WEIJIFEN

微积分

方源　王元

（下）

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

微积分．下 / 方源，王元编著．-- 北京：高等教育出版社，2014.7

ISBN 978-7-04-040351-0

Ⅰ．①微… Ⅱ．①方… ②王… Ⅲ．①微积分 - 高等学校 - 教材 Ⅳ．① O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 133317 号

策划编辑　王丽萍　　责任编辑　李　鹏　　封面设计　王凌波
责任校对　殷　然　　责任印制　刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	北京人卫印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850 mm × 1168 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	19.5	版　　次	2014 年 7 月第 1 版
字　　数	360 千字	印　　次	2014 年 7 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号　40351-00

微觀博覽知萬物
自有群分
積學窮經悉規矩
各如其分

序

本书的英文版 *Calculus* (Fong Yuen, Wang Yuan) 于 2000 年在德国 Springer 出版社出版, 畅销全球. 其内容是为所有当代理、工、商等专业大学生设计的. 本书之论点是以轻松但不失严谨的态度去书写. 内容先以丰富的范例作启示, 进而引进严谨的概念及定理. 全书一气呵成, 共 13 章.

阅读及了解数学是一种艺术, 它与其他各种阅读文献不同! 数学典藉之阅读者必须作出大量的实践 —— 那就是要解答书中的所有习题. 故本书亦提供了大量的习题, 以提升学习的效果. 在过去 10 余年间, 本书不只获得同业教授们的好评, 同时亦被德国之《数学评论》(Zentralblatt für Mathematik) 评为微积分教材或自学课本的良好选择.

最后, 本书两位作者皆由衷地感谢分社长王丽萍女士大力支持原著以中文版在国内面世. 同时亦感谢 Springer 出版社的邝志鸿副执行总裁把本书的中文版权无条件归还给作者, 让神州大地之学子能一窥初等分析 (微积分) 的玄奥.

方源、王元

2014 年 3 月 3 日于北京

前言

1995 年我应台湾“中研院”之邀, 访问了该院数学研究所两个月. 数论学家于靖负责接待我. 为了让我更广泛地了解台湾的数学与数学家, 于靖特别安排我到台湾不少大学作一两天的短暂访问与停留, 其中在台南的成功大学停留了 10 天. 这是仅有的一次长时间的外访. 在成功大学期间, 由代数学家方源接待我.

在成功大学期间, 方源曾提议与我合写一本“微积分” (Calculus) 教材, 我同意了. 我原本以为他有一个初稿 (或讲义), 由我来作些补充. 待看到他的稿子后, 才知道是一本用英语撰写的完美的书, 我已无事可做了. 剩下的工作只有将他的手稿译成中文, 并将习题演算一遍, 我就承担了这项工作.

英文稿在 1996 年由 Springer 出版社出版了一个预印版, 共两千册, 仅限于在台湾发行. 封面及每一页上均印有 “Uncorrected proofs not to be copied” 的字样, 预印版很快销售完, 反映不错. 2000 年, Springer 出版社正式出版了英文版.

方源有不少好的心得, 例如第二章“极限与连续”讲到 ε–δ 理论时, 对于给定的 ε, 他用具体地算出 δ 的办法来讲, 这样就将这个通常使初学者颇感“抽象”的内容, 变成了可计算的事情. 这与中学的定量数学基本上相同了. 又如在第五章“积分法”中, 方源举了商高定理 (或毕达哥拉斯定理) 的推广, 以激发读者看到微积分与初等数学的本质差异, 等等.

我想本书的中文版及其习题集的出版还是必要的. 这将有利于我国更多的青年, 特别是自学者, 以本书为入门, 进入高等数学的学习. 我要借此机会衷心感谢高等教育出版社及王丽萍分社长、李华英编辑和李鹏编辑的大力支持, 以及他们完美的编辑工作.

王元
2013 年 12 月 1 日于北京

王元

中国著名数学家, 中国科学院院士. 1930 年生, 江苏镇江市人. 1952 年毕业于浙江大学数学系, 经数学家陈建功院士及苏步青院士推荐到中国科学院数学研究所工作. 在华罗庚院士亲自指导下研究数论, 成绩卓越. 他首先研究了著名的 “哥德巴赫猜想”, 其成果领先全世界. 在 1980 年和同门师兄弟陈景润、潘承洞共同获得国家自然科学一等奖.

王元院士曾任中国科学院数学研究所所长、研究员、中国数学会理事长、数学学报主编、联邦德国分析杂志编委、新加坡世界科技出版公司顾问、中国奥林匹克数学会理事长. 主要著作有《哥德巴赫猜想》文集、《数论在近似分析中的应用》(与华罗庚合著) 和 *Calculus* (与方源合著的英文版《微积分》), 专业研究论文百余篇均发表在当代世界著名的数学期刊.

方源

台湾著名数学家, 1948 年生于香港, 1979 年获英国爱丁堡大学数学博士. 专攻代数学、数学教育及代数自动机理论. 现就职于广东技术师范学院. 曾任台湾成功大学应用数学研究所特聘教授 34 年 (终身职)、成功大学高等数学研究中心主任、国际学术组主任、大学出版中心主任. 于 1984 年及 1989 年先后受聘为爱丁堡大学及奥地利开普勒 (Kepler) 大学客座教授各为期 1 年, 讲授近世代数及分析学.

1991 年获台湾教育主管部门颁发特优数学讲座教授大奖 (全台湾仅 1 人), 同年获聘为开普勒大学终身亚洲首席顾问教授, 1993/94 年名列美国 Marquis 世界名人录, 1993 — 2012 年任代数集刊副主编 (中国科学院数学研究所主办). 著有专书 10 册及近百篇研究论文发表于当代国际知名的出版社及数学期刊.

目录

下　　册

7　形式积分法 · 1

7.1　不定积分 · 1

7.2　分部积分法 · 7

7.3　三角积分 · 16

7.4　三角代换积分法及和 $\sqrt{x^2-a^2}$ 与 $\sqrt{a^2\pm x^2}$ 有关的被积函数 · 25

7.5　部分分式 · 35

8　数值积分法 · 42

8.1　梯形法则 · 42

8.2　辛普森法则 · 49

9　再论极限及反常积分 · 56

9.1　实数序列与序列的极限 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 56

9.2　一些重要极限 · 66

9.3　关于不定式的洛必达法则 · · · · · · · · · · · · · · · · · 69

9.3.1　不定式 $0/0$ 与 ∞/∞ 的洛必达法则 · · · · · · · · · 70

9.3.2　不定式 $0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$ 与 $\infty-\infty$ 的洛必达法则 · · · · · · · · · · · · · · · · · · 74

9.4　反常积分 · 80

10　无穷级数 · 94

10.1　无穷级数 · 94

10.2　正项级数: 比较检验与积分检验 · · · · · · · · · · · · · · 104

10.3　交错级数, 绝对收敛, 比值与根值检验 · · · · · · · · · · · 112

10.4　幂级数, 麦克劳林级数与泰勒级数 · · · · · · · · · · · · · 124

11 极坐标 **139**
11.1 极坐标 139
11.1.1 极方程 $r = f(\theta)$ 的图形 143
11.1.2 极曲线的切线 145
11.2 极坐标下的面积 149
11.3 参数路径与长度 153

12 多变量函数的微分学 **156**
12.1 n-变量函数 156
12.2 偏微商 165
12.2.1 多于三个变量的函数 170
12.2.2 高阶偏微商 171
12.3 极限与连续 174
12.3.1 极限 174
12.3.2 连续性 180
12.4 链式法则 185
12.5 梯度与方向微商 200
12.6 隐函数微分法 221
12.7 多变量函数的极值 225

13 多重积分 **240**
13.1 矩形上的二重积分 240
13.2 一般区域上的二重积分 254
13.3 极坐标下的二重积分 268
13.4 三重积分及其应用 277

索引 **293**

上　册

1 导引 **1**
1.1 什么是微积分? 1
1.2 集合与函数 4
1.3 数系 15

1.4 数学归纳法 23
1.5 平面解析几何 26
1.5.1 距离公式 27
1.5.2 圆公式 28
1.5.3 直线公式 29
1.5.4 斜截式 31

2 极限与连续 35
2.1 极限的概念 35
2.2 一些极限定理 55
2.3 连续 70
2.4 连续函数的几个定理 79
2.5 一致连续性 83

3 微分法 85
3.1 微商的一些定义 85
3.1.1 切线问题 85
3.1.2 瞬间速度问题 86
3.2 微商的一些公式 95
3.3 链式法则 103
3.4 三角函数的微商 109
3.5 隐函数微分法与高阶微商 117
3.6 微分与牛顿 – 拉弗森逼近 127

4 微商的应用 136
4.1 罗尔定理与中值定理 136
4.2 单调函数 141
4.3 函数的相对极值 144
4.4 函数的凸性 151
4.5 绘制图形 167

5 积分法 174
5.1 一个面积问题 175
5.2 定积分的定义 179

5.3 积分学的一些定理 · 197
5.4 微积分的基本定理 · 204
5.5 曲线间的面积 · 213
5.6 应用: 毕达哥拉斯定理的推广 · · · · · · · · · · · · · · · · 219
5.7 进一步的应用 · 228
5.7.1 体积 · 228
5.7.2 弧长和旋转曲面的面积 · · · · · · · · · · · · · · · · · 236
5.7.3 功 · 241
5.7.4 质量中心 · 242

6 某些特殊函数 · 249
6.1 反函数 · 249
6.2 反三角函数 · 255
6.3 指数与对数函数 · 267
6.3.1 经典的方法 · 267
6.3.2 另一种处理方法 · 277
6.4 双曲与反双曲函数 · 284
6.4.1 双曲函数 · 284
6.4.2 反双曲函数 · 289

表 · 296

索引 · 301

7

形式积分法

回忆第五章, 由 $x=a$ 至 $x=b$, 函数 f 的定积分是由黎曼和的极限

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$$

来定义的, 在此我们需假定上面的极限是存在的.

如果被积函数 $f(x)$ 的反微商能够找到, 则由微积分的基本定理 (定理 5.4.5) 可知定积分的准确值就能够直接地算出来. 寻找已给被积函数 $f(x)$ 最一般的反微商 $G(x)$ 的过程, 通常称为*形式积分法* (或简称为*积分法*). 而一个反微商就称为一个*不定积分* (或简称为*积分*).

我们将用记号

$$\int f(x)dx$$

表示 $f(x)$ 的任意反微商, 即

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

本章的主要目的为讲述寻求各种代数与超越函数的积分方法.

7.1 不定积分

回忆定理 5.4.2, 该定理说: 若 F 是函数 f 在一个区间 I 的一个反微商, 则 f 在 I 上的反微商的一般形式为

$$G(x) = F(x) + k,$$

此处 k 为一个任意常数.

因此, 我们可以用下面的记号来表示在区间 I 上的 f 的反微商族.

定义 7.1.1　**不定积分的定义**

记号

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

表示 $f(x)$ 在一个区间 I 上的所有反微商族, 此处 $F'(x) = f(x)$ 且 C 为一个任意常数, 我们称它为 $f(x)$ 的**不定积分**. 因此我们有

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

及

$$\int cg(x)dx = c\int g(x)dx$$

其中 c 是一个常数.

如果已给 $\int f(x)dx$, 则寻找 $F(x) + C$ 的过程就称为**不定积分法**或**积分** $f(x)$. 我们用形容词"不定"是由于 $\int f(x)dx$ 表示一个反微商族, 而不是任何特定的函数.

由我们以往的知识, 我们可以给出不定积分一张详细的表, 如表 7.1.1.

表 7.1.1

$F(x)$ (或 $f(x)$ 的反微商) 的导数	不定积分 $\int f(x)dx = F(x) + C$
$\frac{d}{dx}(x) = 1$	(i) $\int 1dx = x + C$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n \quad (n \neq -1)$	(ii) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	(iii) $\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	(iv) $\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	(v) $\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	(vi) $\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	(vii) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$
$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \csc^2 x$	(viii) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	(ix) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

续表

$F(x)$ (或 $f(x)$ 的反微商) 的导数	不定积分 $\int f(x)dx = F(x)+C$
$\frac{d}{dx}(-\csc x) = \csc x \cot x$	(x) $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$
$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(xi) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$	(xii) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	(xiii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}\lvert x\rvert + C$
$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$	(xiv) $\int \sinh x dx = \cosh x + C$
$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x$	(xv) $\int \cosh x dx = \sinh x + C$
$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$	(xvi) $\int \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x + C$
$\frac{d}{dx}(-\coth x) = \operatorname{csch}^2 x$	(xvii) $\int \operatorname{csch}^2 x dx = -\coth x + C$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{sech} x) = \operatorname{sech} x \tanh x$	(xviii) $\int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x + C$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{csch} x) = \operatorname{csch} x \coth x$	(xix) $\int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	(xx) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C$ 或 $= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcosh} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	(xxi) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C$ 或 $= \ln(x+\sqrt{x^2-1}) + C$
$\frac{d}{dx}(\operatorname{artanh} x) = \frac{1}{1-x^2}$	(xxii) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \operatorname{artanh} x + C$ 或 $= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{arsech} x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$	(xxiii) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{arsech} x + C$ 或 $= \ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}} + C$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{arcsch} x) = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{1+x^2}}$	(xxiv) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\operatorname{arcsch}\lvert x\rvert + C$

由上面的表, 我们首先要研究如何用它去改进和处理与之相关的各种积分技巧.

例 7.1.2 试计算下面的积分:

(i) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2}$. (ii) $\int \frac{xdx}{4-x^2}$.

(iii) $\int \frac{dx}{1+e^x}$. (iv) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+1)}}{x+1}dx$.

(v) $\int \frac{\cos^2 xdx}{1-\sin x}$. (vi) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

(vii) $\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$. (viii) $\int \tan xdx$.

(ix) $\int \sec xdx$.

解 (i) 由于 $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$, 所以

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}=\int \frac{dx}{1+(1+x)^2}.$$

命 $1+x=u$, 则 $du=dx$. 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+2x+2}&=\int \frac{du}{1+u^2}=\arctan u+C\\&=\arctan(1+x)+C.\end{aligned}$$

(ii) 命 $u=4-x^2$, 则 $du=-2xdx$. 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{4-x^2}&=-\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}=-\frac{1}{2}\ln u+C\\&=-\frac{1}{2}\ln(4-x^2)+C\\&=\ln\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}+C.\end{aligned}$$

(iii) 命 $u=1+e^x$, 则 $du=e^xdx$ 及 $dx=du/(u-1)$. 所以

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+e^x}&=\int \frac{du}{u(u-1)}=\int \left(\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u}\right)du\\&=\int \frac{du}{u-1}-\int \frac{du}{u}=\int \frac{d(u-1)}{u-1}-\int \frac{du}{u}\\&=\ln(u-1)-\ln u+C\\&=\ln e^x-\ln(1+e^x)+C\end{aligned}$$

$$= \ln \frac{e^x}{1+e^x} + C = \ln \left(\frac{1+e^x}{e^x} \right)^{-1} + C$$
$$= -\ln(1+e^{-x}) + C.$$

(iv) 命 $u = \ln(x+1)$, 则 $du = dx/(x+1)$. 所以

$$\int \frac{\sqrt[3]{\ln(x+1)}}{x+1} dx = \int u^{\frac{1}{3}} du = \frac{3}{4} u^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{3}{4} (\ln(x+1))^{\frac{4}{3}} + C.$$

(v) $\displaystyle\int \frac{\cos^2 x dx}{1-\sin x} = \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x} dx = \int \frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x} dx$

$$= \int (1+\sin x) dx = x - \cos x + C.$$

(vi) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$

$$= x - \arctan x + C.$$

(vii) 命 $e^{x^3} = u$, 则 $du = 3x^2 e^{x^3} dx$, 从而 $du/3 = x^2 e^{x^3} dx$. 当 $x=0$ 时 $u=1$ 及当 $x=1$ 时, $u=e$, 所以

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \int_1^e \frac{du}{3} = \frac{1}{3} [u]_1^e$$
$$= \frac{e-1}{3}.$$

(viii) $\displaystyle\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$

命 $u = \cos x$, 则 $du = -\sin x dx$, 所以

$$\int \tan x dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln|u| + C$$
$$= \ln \frac{1}{|u|} + C = \ln \frac{1}{|\cos x|} + C$$
$$= \ln|\sec x| + C.$$

(ix) 我们命 $u = \sec x + \tan x$, 则

$$du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$$
$$= \sec x (\tan x + \sec x) dx = u \sec x dx$$

从而

$$\frac{du}{u} = \sec x dx.$$