



中国历史小丛书

中国古代数学史话

ZHONG GUO GU DAI SHU XUE SHI HUA

中华书局出版

“中国历史小丛书”編輯委员会

主編：吳 晗
編委：尹 达 白寿彝 刘桂五 任繼愈
吳廷璆 何茲全 何家槐 何幹之
汪 鏡 周一良 邱汉生 金燦然
邵循正 季鎮淮 陈乐素 陈哲文
侯仁之 郑天挺 胡朝芝 馬少波
翁独健 藤淨东 潘絮茲 戴 逸
(以姓氏笔划为序)

助編：北京教师进修学院历史教研室

中国古代数学史話

編写者 李 儼 杜石然

中華書局出版

(北京東总布胡同 10 号)

北京市书刊出版业营业許可證出字第 17 号

中国青年出版社印刷厂印刷

新华書店北京发行所发行 全国新华書店經售

787×1092 毫米 1/32·1 1/4 印張·18,000 字

1961 年 9 月第 1 版

1961 年 9 月北京第 1 次印刷

統一書号：11018·283

定价：(5) 0.11 元

中国历史小丛书

中国古代数学史話

李儼 杜石然編写

目 录

- 一、中国古代数学的萌芽..... 3
- 二、中国古代数学体系的形成.....11
- 三、中国古代数学的高度发展.....22
- 四、由筹算到珠算的轉变.....29
- 五、西方数学的传入.....36



一、中国古代数学的萌芽

中国古代数学是从什么时候开始萌芽的？我們远古时代的祖先从什么时候开始掌握了数的概念和形的概念？这是一个很有趣的、同时也是不容易回答的問題。因为远古时代的事情沒有任何直接的文字記錄，我們只能从古代流传下来的傳說中推断出一些情况。

公元前一世紀，汉朝的著名历史学家司馬迁在他所写的《史記》这部书里，提到“黄帝隸首作数”这样一个傳說。这句话的意思是說，数是黄帝时代有一个名叫隸首的人所作的。这是一个在古代很流行的傳說。但是这种說法显然是不符合历史实际的，因为数学决不可能是某个个人的創造。正象恩格斯所說的那样：“和其他所有科学一样，数学是从人們的实际需要上产生的，是从丈量地段面积，和衡量器物容积，从計算時間，从制造工作中产生的。”但是这种傳說却說明了这样一个事实：从很古的时候起，甚至从不能确切地說出它的年代的时候起，我們的祖先就已經掌握数的概念了。

此外还有两件和古代数学有关的傳說必須提到，

那就是“結繩”和“規矩”。

古书上說：“上古結繩而治。”这就是說，远古时代的人們还没有使用文字的时候，是用“繩”打成各种結扣来記事的，不难想象，当时人們也可能是用繩扣来記数的。因为直到不久以前，世界上还有少数未开化的民族仍然保存着用“結繩”来記数的方法。

“規”和“矩”，是我們現在常用的名詞，可是起源却很早。“規”，就是圓規，是用来画圓形的工具。“矩”，是象現在木工所使用的曲尺一类的东西，是用来画方形的工具。汉朝的历史学家根据传说，认为伏羲是規矩的創造者。流传到現在的汉朝的浮雕像中，就有“伏羲手执規，女媧手执矩”的图象，而且还不止一处。根据这些传说来看，“規矩”的产生可能是很早的。司馬迁的《史記》还提到，在公元前二千年夏禹治水的时候，也是“左准繩”（就是左手带着水准工具和繩），“右規矩”（右手拿着規和矩），来进行測量和設計工作的。

古代人們对各种图形的認識也是很早的。从地下发掘出来的許多考古資料告訴我們：十万年前的“河套人”已在骨器上刻有菱形的花紋；石器时代的各种工具也都具有一定的形状。

我国最早的文字，是公元 1899 年从河南安阳发掘出来的龟甲和兽骨上面所刻的象形文字。这种文字



汉朝武梁祠造象 规矩图

——甲骨文，是大約三千多年以前殷代的文字，其中有許多數字記錄，如戰爭中殺死或俘獲的敵人數目，狩獵時獵得的禽獸數目，祭祀時宰殺的牲畜數目，等等。例如有這樣一片甲骨，上面刻着“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人”，這是說，在八日辛亥那一天，在一次戰爭中消滅掉“二千六百五十六人”。甲骨文中記載的最大的數目是“三萬”。值得注意的是，當時已經採用了十進位制的記數方法，和現在我們所用的記數方法已經完全一致了，至少萬以下的整數記法是完全一致的。由此可見，中國的記數法，從古代開始就一直使用十進位制的。

古代保存下來的文字，除了甲骨文之外，還有一種鑄在青銅器上面的文字。這種文字叫作“鐘鼎文”或

“金文”，据考证，这大致是周代的文字。现在我们把甲骨文、金文上面所用的数目字以及后来汉朝用来记数的文字分别介绍在下面，读者可以比较这些古代记数的文字跟现代汉字的不同。

现代：一 二 三 四 五 六 七 八 九 十

甲骨文：一 二 三 三 五 八、九 十 八 十 一

金文：一 二 三 三 三 五 介 十 八 九 十

汉朝：一 二 三 ④ 五 六 七 八 九 十

除了整数之外，我国古代认识分数也比较早。开始时还只认识一些单分数，即分子等于1的分数，后来逐渐认识到一般分数，并用大($\frac{2}{3}$)、半($\frac{1}{2}$)、小($\frac{1}{3}$)各字记分数。

至于整数和分数的四则运算和应用，也是相当早的。关于计算整数的加减法，究竟是从什么时候开始的，到现在人们还不能作出回答。可是没有疑问那是很久很久以前的事了。

我们大家都知道“九九歌”这个正整数的乘法歌诀。“一二得二，二二得四，二三得六，……”每个小学生都能背诵得很熟练。可是，这个歌诀为什么叫作“九九”呢？回答是这样的：在古代，这个歌诀不是从“一一如一”开始，而是倒过来，从“九九八十一”开始的。正因为是从“九九八十一”开始，所以叫作“九九”。“九九”

这一名称就一直沿用到現在。那么，古代人們是从什么时候起开始使用“九九歌”的呢？先讓我們来講一个故事。据說春秋时期齐桓公曾經专门設了一个招賢館来征求各方面有才干的人，但是等了很久，一直沒有人前往应招。一年以后，才来了一个人，这个人把九九歌献給齐桓公作为进見的礼物。齐桓公觉得很好笑，对他說：“九九歌能够当作見面礼嗎？”这个人回答說：“九九确实够不上拿来作見面礼，但是如果您对我这个懂得九九的人都能重視的話，那么还怕比我更高明的人不接連而来嗎！”桓公认为很对，就把他接进招賢館，給以隆重的招待。果然不到一个月，許多有才干的人士就从四面八方接連不断地前来应招了。这个故事說明，在春秋时期九九歌就已被人們广泛地掌握了。在許多流传下来的古书如《荀子》《管子》里面，也有关于九九的記載。

从十九世紀末叶以来陸續在我国西北发掘出来的許多“竹木簡”〔注〕上面，也有些記錄着九九歌。但是这些竹木簡由于在地下埋藏过久，上面的九九歌已經残缺不全了，最多的剩下了十七句，有的是十四句，有的只有三句、五句。

上面說的，是我国古代整数和分数概念以及四則

〔注〕其中大多数是汉朝的文物。

运算方法产生的情况。下面再談談古代人們用什么工具来进行計算的問題。

在古代，世界上許多民族曾經使用过各种不同的計算工具。例如巴比崙人所用的是一块泥板，在上面刻字；埃及人所用的是一种水草叶子，在上面写字；印度人和阿拉伯人所用的是沙盘，或是在地上用小木棍进行“笔算”。我国古代所用的計算工具是一种“算筹”。“筹”就是一般粗細、一般长短的一些小竹棍。中国古代的数学家們就是用这些小竹棍摆成不同的行列，表示不同的数目，来进行各种計算的。这种用“算筹”来进行的計算，叫作“筹算”。“算筹”的“算”，古代写法是“筭”。古代的字书《說文解字》中說：“筭，从竹，从弄。”就是說，“筭”字是由“竹”字和“弄”字合成的，也就是摆列竹棍来进行計算的意思。

用“算筹”来表示数目，有两种形式：一种是纵（直）式，一种是横式。具体摆法是这样的：

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 纵式 | 丨 | Ⅱ | Ⅲ | Ⅳ | Ⅴ | ┐ | ┑ | ┒ | ┓ |
| 横式 | 一 | 二 | 三 | ≡ | ≡ | ⊥ | ⊥ | ⊥ | ≡ |

怎样使这种摆法和十进制配合起来呢？方法是：个位用纵式，十位用横式，百位又用纵式，千位又用横式，万位再用纵式，以此类推，凡是遇到零的时候，就不摆“算

筹”，讓它空着。这样，纵横相間，一直摆下去，任何数目都能够表示得出来。例如 378 可摆成 $\text{III} \perp \text{III}$ ，6708 可摆成 $\text{I} \text{II} \text{III}$ 。这种方法和現代的笔算記数是基本上相同的。中国古代的文字都是从右到左，写成直行；可是計算数字却和現在的笔算記数一样，也是从左到右，排成横行。

筹算从什么时候开始出現的，現在沒有可靠的材料来作精确的說明，不过我們可以肯定，至迟在春秋战国的时候，人們已經十分熟练地运用筹算来进行計算了。到了公元前 100 年（西汉天汉元年）左右的时候，人們已經可以用筹算来进行四則运算。开平方、开立方等比較复杂的計算也可以进行了。

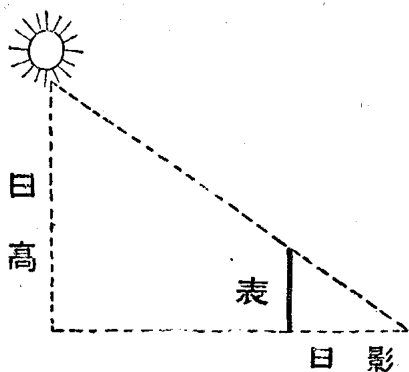
从远古时起到公元前 100 年左右这段時間內，随着生产力的不断提高，各种科学技术不断向前发展，各种科学技术的发展，又不断地推动着数学的发展。例如：农业生产要求有准确的农业季节，这就必然推动着人們去进行天文的研究。但是，天文学是离不开数学的，随着天文学的发展，人們对于数学的知識也就不断地丰富起来。流传到現在的一部最早的数学著作，同时也是一部最早的天文学的著作——《周髀(bì)算經》，便是这一时期由于天文学上的实际需要而积累起来的一部科学研究結晶。

現在我們所能看到的《周髀算經》，已經不是最初的原書，而是經過後代的學者修改和補充過的。根據數學史家的研究，大約在公元前100年左右，這部書的內容就已經和我們現在所看到的大致相同了。《周髀算經》中記載了用標竿測日影的方法，標竿算作股，日影則是勾，勾也可以叫“髀”，書中又有周公問算的內容，從而有《周髀算經》的名稱。《周髀算經》主要是講解“蓋天說”〔注〕一派的天文學說的。

《周髀算經》這部書里面，除了關於“蓋天說”以及其他一些天文學方面的記載以外，從數學的角度看，有兩點值得注意：第一，這部書里記載了許多比較複雜的分數計算問題，例如 $354 \frac{348}{940} \times 13 \frac{7}{19} \div 365 \frac{1}{4}$ 之類。這說明當時對分數的計算已經十分熟練。第二，就是關於“勾股定理”和“勾股測量”的記載。所謂“勾股定理”，是指一個直角三角形兩腰的平方（勾平方和股平方）之和等於斜邊（弦）的平方。這個定理很重要，據說古希臘的數學家畢達哥拉斯在證得這個定理的時候，曾殺了一百頭牛來表示慶祝。所謂“勾股測量”，就是指利用相似的两个直角三角形对应边成比例的关系来进行测量。《周髀算經》就有關於這種測量方法的記

〔注〕蓋天說主張：“天象蓋笠，地法復盆”，這是說天好像是一頂尖草帽，而地好像是一隻倒過來的盆子。

載。其中有一种是根据标竿(表)的日影的长短来量出太阳的高度的方法(如图)。用这种方法来进行天文上的测量,当然不能测出正确的结果;但



是用来测量地面上的远近、高低等等,是能够作到十分精确的。根据《周髀算经》中的记载,当时人们已经使用这种方法来进行地面上的测量了。由此可见,在《周髀算经》这部书出现的时候,我国古代数学已经发展到相当高的水平了。

古代人们数学知识逐渐积累的结果,终于形成了中国古代数学的完整体系。

二、中国古代数学体系的形成

公元前 221 年秦始皇统一中国,到了汉朝,社会生产力有了很大的发展。随着生产的发展,数学也有了很大的发展。从周朝以来逐渐发展起来的中国古代数学,到了汉朝已经逐渐形成了完整的体系。著名的《九

《九章算术》就是当时的一部代表性的著作。它总结了周秦以来的数学研究成果,并对后来我国数学的发展起了极大的影响。

《九章算术》这部伟大的著作的作者和确实的成书年代,都已经考证不出来了。但是它确是以古代人们



周公作九章之法图

长期积累起来的数学知识为基础,并且经过许多人的修改和补充,方才最后完成的。这或许正是人们不能指出确定的作者和确实成书年代的原因。

流传到现代的《九章算术》,是经过各个朝代许多数学家注解过的。根据研究

的結果来看，至迟在公元后 100 年（东汉永元十二年）左右的时候，《九章算术》就已经形成了现在流传本的这种样子。

《九章算术》是采取问题集的形式编写的。这部书一共收有 246 个问题，分成九大类，成为“九章”。这种问题集的形式对后世的影响很大，一直到很久很久以后，中国的数学著作仍然采用这种形式。各章的主要内容是：

第一章“方田”，主要是讲田亩面积的计算，还详细地叙述了分数的各种计算方法。

第二章“粟米”，是讲各种比例问题，特别是关于各种粮谷间的比例交换问题的计算方法。

第三章“衰分”，是讨论如何按比例分配的问题。例如一次狩猎共猎得五头鹿，根据大官多分、小官少分的原则，怎样分配给五个官阶大小不同的人，等等。

第四章“少广”，是讲开平方、开立方的计算方法。

第五章“商功”，是讲各种形状的体积的计算方法。如各种形状的粮仓，方仓、圆仓等等容积的计算以及筑城筑堤所需土方的计算等等。

第六章“均输”，是讨论如何按人口、路途远近等等条件合理安排各地的赋税以及分派工役等问题的计算方法。

第七章“盈不足”，是用假設的方法来解决某些問題。我們可以举一个故事來說明什么是“盈不足”：唐朝有一位政府官員曾用下面的数学問題来考試下級：“一天晚上，他曾在树林后边听得几个人在那里分配他們偷来的馬，假如每人分6匹，还余下7匹；假如每人分8匹，又不够8匹，問一共有多少人和多少匹馬？”这就是“盈不足”的問題。这个問題，在《九章算术》中就已經有着完整的解法。这种解法和現代的“行列式解法”很相象。

第八章“方程”，是关于联立一次方程組普遍解法的敘述。中国古代数学家在这一方面取得的成就是极其伟大的。欧洲直到十八世紀，法国的数学家方才得出了类似的联立一次方程組的普遍解法。特別值得着重指出的，是“方程”章中还引入了負数的概念以及正数和負数的加減法法則。这也是具有世界意义的成就。印度数学家到了七世紀之后，欧洲則到了十六世紀之后，才产生了比較明确的負数概念。正負数的概念，在中国古代很早就被天文学家所充分掌握和利用。正、負这两个常用的数学术語，一直流传到現在。

第九章“勾股”，是应用“勾股定理”以及直角三角形相似形的各种比例关系的計算。值得注意的是，“勾股”章中还提出了二次方程的普遍解法問題。在中国

古代，方程的数值解法問題都是由开平方、开立方等演算步驟中推演出来的。明了了开平方和开立方的步驟之后，求解二次或三次方程的正根，就沒有有什么困难了。

从上面的簡單介紹中，我們可以看出《九章算术》的內容是丰富多采的，而且是同实际生活特别是农业生产密切联系着的。它比較全面地反映了我国古代数学高度发展的面貌，集中地显示了中国古代劳动人民的智慧和許多数学家的天才。它不仅是我国数学发展历史上的一部杰出的著作，而且在全世界数学发展历史上也占有很重要的地位。自从1957年苏联把《九章算术》全部譯成俄文出版以后，这部中国古代数学著作更加受到了世界各国科学家的重視。

前面已經說过：流传到現在的《九章算术》，是又經過各个朝代的許多数学家加以注解过的。其中最著名的是三国时代的刘徽。在刘徽的注解中包含有許多天才的創見和补充。关于刘徽的生平，我們只知道他注《九章》的年代是在公元263年（三国曹魏景元四年），也就是距今大約一千七百多年前的时候；除此以外，我們就什么也不知道了。

刘徽的注解，可以看成是对《九章算术》中所提出的各种算法的一些証明。他所使用的方法，按他自己