高等数学综合习题集

李远聆　周学良　陈礼瑢　编

武汉大学出版社

高 等 数 学 综 合 习 题 集

李远聆　周学良　陈礼瑢　编

武汉大学出版社出版

（武昌珞珈山）

新华书店湖北发行所发行　湖北工学院印刷厂印刷

787×1092毫米　1/32　10.125印张　231千字

1986年8月第一版　1986年8月第一次印刷

印数：1—7500

统一书号：13279·28　定价：2.30元

032992

前　　言

本集的例题和习题主要选自1986年有关院校硕士研究生入学考试联合的或单独的考题，适合于报考硕士研究生的考生备考，也可以供《高等数学》、《工程数学》课程的习题课、阶段复习、总复习及自我检测参考。

从书中内容可以看到，例题、习题的形式多样，内容覆盖面广，综合性、灵活性强，有的具有一定难度，在《高等数学》与《工程数学》的基本概念、基本理论、运算能力、解（证）题方法以及综合分析与应用诸方面反映了各类院校的基本要求。

为便于教学参考，本书基本上按逻辑顺序分章编排，其间也安排了综合性、灵活性较强的例题或习题以供不同层次的读者灵活选用。全书各章的编写分别由李远聆（第一、二、七、八章）、周学良（第三、四、五章）、陈礼瑢(第六章)执笔，并由李远聆主持编写。在成书过程中，多承哈尔滨工业大学、同济大学、清华大学、西安交通大学、华中农业大学等兄弟院校同志鼎力协作，并蒙周鸿印副教授仔细审校，又得到富景隆、邱伯骀、承毓涵、张贵文、佘家林、李崇孝及万常选、张汉林等许多同志协助，在此，我们谨表示衷心的感谢。

限于编者的水平，如发现错误、疏漏之处，恳请批评指正。

编　者

1986年4月于武汉珞珈山

目　　录

第一章 分析引论

一元函数微分学

（一）例 题

I*

1．设函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x<-1\\ x, & -1\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

求 $f(x^2+5)\cdot f(\sin x)-5f(4x-x^2-6)$。 （海军工程学院）

解 $\because\ x^2+5>1,\quad \therefore\ f(x^2+5)=1$

又 $\because\ |\sin x|\leqslant 1,\quad 4x-x^2-6=-[(x-2)^2+2]<-1$

$\therefore\ f(\sin x)=\sin x,\quad f(4x-x^2-6)=-1$

故得 $f(x^2+5)\cdot f(\sin x)-5f(4x-x^2-6)=5+\sin x$

2．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{(e^x-1)^2}$ （农牧渔业部教育司）

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}=3$，求 c （同上）

---

* I 含1986年试题，Ⅱ含1985年试题，以后第二～六章同此。

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(2^x+3^x+5^x)^{\frac{3}{x}}$ （同上）

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{2x-\cos x}$ （北京工业大学）

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{(e^x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}}{2(e^x-1)e^x}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{(1+x)(e^x-1)e^x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{e^x-1}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\dfrac{1+x}{1+x}+1}{e^x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+2}{e^x}=1$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{cx}{x-c}}=e^c$$

由 $e^c=3$，解出 $c=\ln 3$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2^x+3^x+5^x)^{\frac{3}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[5^x\left(\frac{2^x}{5^x}+\frac{3^x}{5^x}+1\right)\right]^{\frac{3}{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 5^3\left[\left(\frac{2}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + 1\right]^{\frac{3}{x}}$$

$$= 5^3 = 125$$

(4) $$\lim_{x \to \infty} \frac{x + \cos x}{2x - \cos x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{\cos x}{x}}{2 - \frac{\cos x}{x}} = \frac{1}{2}$$

3．计算 $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ （云南工学院等）

解 把$\frac{k}{(k+1)!}$拆成两项之差

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

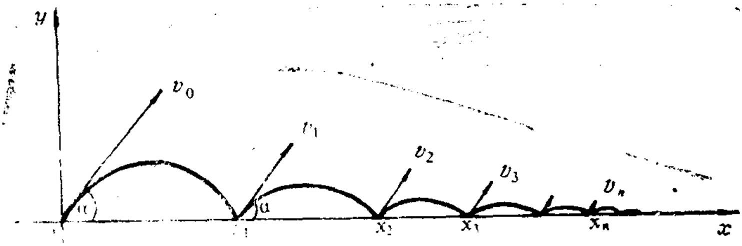
$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

故 $$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{1}{(n+1)!}\right) = 1$$

4．以初速度 v_0 与倾角 α 抛射出一个球，且该球在点 $P_1(x_1, 0)$，$P_2(x_2, 0)$，…，$P_n(x_n, 0)$，…处以相同的倾角 α 弹跳出去，每次弹跳的初速度 v_0，v_1，…，v_n，…按下列规律减小

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{v_1}{v_2} = \cdots = \frac{v_{n-1}}{v_n} = c > 1$$

试决定 x_n 及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（空气阻力略去不计）。（海军工程学院）



4 题图

解　由物理学知球的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\cdot t \\ y = v_0\sin\alpha\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当球落到 x_1 处时，$y=0$，相应的

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g}$$

这时　　$x_1 = v_0\cos\alpha\,\dfrac{2v_0\sin\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin2\alpha}{g}$

类似地，依次可得

$$x_2 - x_1 = \frac{v_1^2\sin2\alpha}{g},\ \cdots,\ x_n - x_{n-1} = \frac{v_{n-1}^2\sin2\alpha}{g},\ \cdots$$

又∵

$$v_1 = \frac{v_0}{c},\ v_2 = \frac{v_1}{c} = \frac{v_0}{c^2},\ \cdots,\ v_n = \frac{v_0}{c^n}$$

$$\therefore \qquad x_n - x_{n-1} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\left(\frac{1}{c^2}\right)^{n-1} \qquad (n=2,\ 3,\ \cdots)$$

从而可得

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \quad (x_0 = 0) \\ &= \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{c^2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{c^2}} = \frac{c^2 v_0^2 \sin 2\alpha}{g(c^2-1)}$$

5. 已知函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，且 $f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$，求证当 $x\to x_0$ 时，$f(x)-g(x)$ 是 $x-x_0$ 的高阶无穷小。

（阜新矿业学院）

证 计算

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-[g(x)-g(x_0)]}{x-x_0}$$

$$= f'(x_0) - g'(x_0) = 0\text{，故得证}$$

6. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$（其中 $a>0$，$b>0$）

（北京邮电学院）

解 原式

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{a^{1/n}+b^{1/n}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{1/n}+b^{1/n}-2}}\right]^{\frac{1}{2}\cdot\frac{(a^{1/n}-1)+(b^{1/n}-1)}{1/n}}$$

$$=e^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}$$

7．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$ （同济大学等）

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3 x}$ （武汉地质学院）

解

(1)解一　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{\sin x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=1$$

解二　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos x}=1$

(2)　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\cos x\cdot\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-\sin^3 x+2\sin x\cos^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-\sin^2 x+2\cos^2 x}=\frac{1}{2}$$

8．求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)$ （上海交通大学等）

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$ （同济大学等）

解 (1) 令$\frac{1}{x}=t$，则

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{6t}=\frac{1}{6}$$

(2) 令 $y=\left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$ 则

$$\ln y=\frac{1}{x}\left[\ln\frac{2}{\pi}+\ln\arccos x\right]$$

取极限

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}=-\frac{2}{\pi}$$

∴ $原式=\lim_{x\to 0}y=e^{-2/\pi}$

9． 计算下列极限

(1) $\lim_{x\to 0+}(\operatorname{tg}x)^{1/\ln x}$ （清华大学）

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4 3x}$ （太原工业大学）

解 (1) $原式=\exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\ln x}\right]$

$$=\exp\left[\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\sec^2 x}{1/x}\right]=e$$

(2) ∵ $\sin 3x\sim 3x$

$$\sin(e^x-1)=(e^x-1)-\frac{1}{3!}(e^x-1)^3+o(x^4)$$

$$e^{x}=x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{4}}{4!}+o(x^{4})$$

$$e^{\sin x}-1=\sin x+\frac{1}{2!}\sin^{2}x+\frac{1}{3!}\sin^{3}x+o(x^{4})$$

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{4})$$

$$\therefore 原式=\lim_{x\to 0}\left[x+\frac{x^{2}}{2!}+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{4}\right)x^{4}+o(x^{4})-x-\frac{x^{2}}{2!}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{3!}\right)x^{4}+o(x^{4})\right]\Big/3(x)^{4}$$

$$=-\frac{1}{972}$$

10. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-1^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-2^{2}}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4n^{2}-n^{2}}}\right)$.

（湖南大学）

(2) 将区间$[a, b]$ n等分，分点为$x_i=a+\frac{i}{n}(b-a)$（$i=0, 1, 2, \cdots, n$）（$0<a<b$），求

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ （北京邮电学院）

解

(1) 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{1}{n}\right)^{2}}}+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^{2}}}\right.$

$$\left.+\cdots+\frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^{2}}}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\arcsin\frac{x}{2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}$$

(2) 原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\ln\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\ln\left(a+2\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right.\right.$

$$\left.\left.+\cdots+\ln\left(a+n\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{b-a}\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln x dx\right\}$$

$$=\frac{1}{e}\cdot(b^b/a^a)^{1/(b-a)}$$

11. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，又 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\varphi(x_2)+f(x_2)\varphi(x_1)$，其中 $\varphi(x)=\cos x+x^2e^{-2x}$，求 $f'(x)$。（武汉水利电力学院等）

解 用导数定义计算，注意 $\varphi(0)=1$，$\varphi'(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\varphi(\Delta x)+f(\Delta x)\varphi(x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\cdot[\varphi(\Delta x)-\varphi(0)]}{\Delta x}$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x)\cdot[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}$$

$$=f(x)\varphi'(0)+\varphi(x)f'(0)$$

$$=\cos x+x^2e^{-2x}$$

12. 计算下列导数

(1) 设$y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，求$\dfrac{dy}{dx}$ （同济大学等）

(2) 若$y=x^x$，求y' （阜新矿业学院）

(3) 设 $y=x\cdot(\sin x)^{\cos x}$，求$\dfrac{dy}{dx}$ （同济大学等）

(4) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}+1}}$，求$y'|_{x=0}$ （农牧渔业部教育司）

(5) 设 函 数 $y=f(x)$由$\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$所确定，求

$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}$ （同济大学等）

解 (1) $$\frac{dy}{dx}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) $$y'=(e^{x\ln x})'=e^{x\ln x}(x\ln x)'$$
$$=x^x(1+\ln x)$$

(3) $\because \ln y=\ln x+\cos x\cdot\ln\sin x$

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\cdot\operatorname{ctg}x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=(\sin x)^{\cos x}\cdot[1-x\sin x\cdot\ln\sin x+x\cos x\cdot\operatorname{ctg}x]$$

(4) $$\because y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{4x}+1}{e^{4x}}\cdot\frac{4e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}=\frac{2}{e^{4x}+1}$$

$$\therefore y'|_{x=0}=1$$

(5) $\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy/dt}{dx/dt}=\dfrac{6\sin t\cos t}{-6\cos^2 t\sin t}=-\sec t$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-\sqrt{2}$$

13. 求下列导数

(1) 已知 $y=\dfrac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$ （西安交通大学）

(2) 设 $x=x(t)$ 由方程 $t-\int_1^{x+t}e^{-u^2}du=0$ 所确定，试求 $\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}$ 的值。 （北方交通大学）

解 (1) $y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$y^{(5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(5)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(5)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{1}{2}\frac{-5!}{(x+1)^6}$$

$$=-60\left(\frac{1}{(x-1)^6}-\frac{1}{(x+1)^6}\right)$$

(2) 先注意到 $x|_{t=0}=1$，方程两边对 t 求导数得

$$1-e^{-(x+t)^2}\cdot\left(\frac{dx}{dt}+1\right)=0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=e^{(x+t)^2}-1$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=e^{(x+t)^2}\cdot(x+t)\cdot 2\left(\frac{dx}{dt}+1\right)$$

又 $\because \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0}=e-1$

故 $\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=2e^2$

14、求函数 $y=xe^{-x^2}$ 的极值以及该函数图形的凹凸区间和拐点。（同济大学等）

解 令 $y'=(1-2x^2)e^{-x^2}=0$，求得 $x=\pm 1/\sqrt{2}$

$$y''=2x(2x^2-3)e^{-x^2}$$

$$y''|_{x=1/\sqrt{2}}<0,\quad y''|_{x=-1/\sqrt{2}}>0$$

$$y_{max}=y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

$$y_{min}=y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$$

令 $y''=0$，求得 $x=0,\ \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

在 $\left(-\infty,\ -\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ 内，$y''<0$，为凸区间；

在 $\left(-\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ 0\right)$ 内，$y''>0$，为凹区间；

在 $\left(0,\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)$ 内，$y''<0$，为凸区间；

在 $\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ +\infty\right)$ 内，$y''>0$，为凹区间。

拐点为 $(0,\ 0)$，$\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}},\ \sqrt{\dfrac{3}{2}}e^{-3/2}\right)$，

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}e^{-3/2}\right)$.

15. 求曲线 $y=\ln x$ 在区间（2，6）内一条切线，使得该切线与直线 $x=2$，$x=6$ 和曲线 $y=\ln x$ 所围成的图形面积最小。（上海交通大学等）

解 设所求切线与 $y=\ln x$ 切于点（x_0，$\ln x_0$），则切线方程为

$$y=\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0$$

它与直线 $x=2$，$x=6$ 和 $y=\ln x$ 所围图形面积为

$$S=\int_2^6\left[\frac{1}{x_0}(x-x_0)+\ln x_0-\ln x\right]dx$$

$$=4\left[\frac{1}{x_0}(4-x_0)+1+\ln x_0\right]-6\ln 6+\ln 4$$

令 $\frac{dS}{dx_0}=\frac{-4}{x_0^2}(4-x_0)=0$ 得 $x_0=4$

当 $x_0<4$，有 $\frac{dS}{dx_0}<0$

当 $x_0>4$，有 $\frac{dS}{dx_0}>0$

故当 $x_0=4$ 时，S 有极小值，且是最小值，因此，所求切线方程为

$$y=\frac{x}{4}-1+\ln 4$$

16. 方程 $x^2y^2+y=1$（$y>0$）能确定 y 为 x 的函数，试讨论函数 $y=y(x)$ 有没有极值？若有，求出所有的极值。

（清华大学）