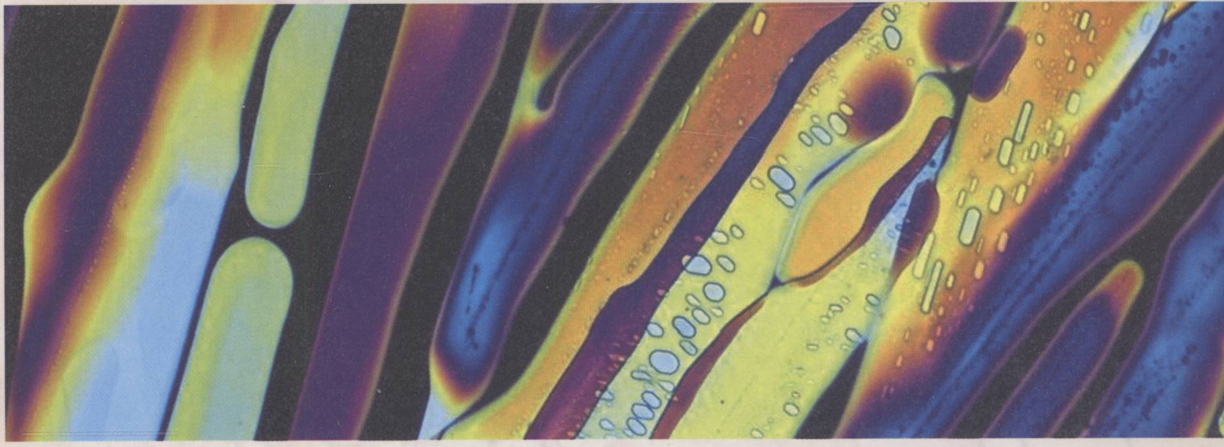

大学物理问题、习题精选及详解

Da Xue Wuli Wenti Xiti
Jingxuan Ji Xiangjie

概念题 选择题
填空题 计算题

主编 唐光裕 韩桂华

国防工业出版社
National Defense Industry Press

大学物理问题、习题精选及详解

主　编　唐光裕　韩桂华
副主编　吴思刚　黄义春
参　编　杨兆琦　万伟　杨娜　王玥萌
主　审　严导淦

国防工业出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

大学物理问题、习题精选及详解／唐光裕，韩桂华主编．—北京：国防工业出版社，2009．7

ISBN 978-7-118-06114-7

Ⅰ．大… Ⅱ．①唐…②韩… Ⅲ．物理学－高等学校－教学参考资料 Ⅳ．04

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 202775 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号　邮政编码 100048)

北京四季青印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　印张 17　字数 391 千字

2009 年 7 月第 1 版第 1 次印刷　印数 1—4000 册　定价 32.00 元

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

大学生经常反映“大学物理的概念和原理难懂、习题难解”，其原因是学习物理时，对系统和整体缺乏梳理和提炼；尚未掌握各篇章间知识的线索及相互联系；没有抓住每章的重点和难点进行深思求索；做题时还不够认真刻苦等。

鉴于此，编者在《大学物理标准化试题精选》（中国建筑工业出版社，1993 年）一书的基础上，参照《理工科非物理类专业大学物理课程基本要求（正式报告稿）》，并结合教学中的经验和体会，作重新编排。增加了概念题，充实和精选了选择题、填空题和计算题，在每章后有解题小结。以这五部分编写了这本《大学物理问题、习题精选及详解》。

概念题是针对每一章的基本概念和原理、重点和难点，整理出的有针对性和启发性的问题，对其进行分析和讨论，力求对相关内容的加深理解、抓住脉络、分清主次、解惑释疑。选择题、填空题和计算题难易适度，着重于培养分析问题和解决问题的能力。解题小结注重分析了每章习题的类型、解题的方法和步骤。

读者在使用本书时，应在理解题目意思后，动脑动手自己分析求解，确实有困惑时，再参考和揣摩本题的解答过程，这才是正确的学习方法。

本书的编写并不针对某一套大学物理教材，可单独作为普通高等院校大学物理课程的教学导引和辅助教材，也适合成人高校、夜大、网络教育和高等教育自学考试读者的自学指导。同时也可供教师组织习题讨论课、组题复习的参考。本书的解答仅供参考之用。

本书由吴思刚和万伟编第一章～第五章，韩桂华编第六章～第十三章，杨兆琦编第十四章～第十六章，黄义春和唐光裕编第十七章～第十九章，唐光裕、杨娜和王玥萌编每章的概念题和解题小结，韩桂华统稿，唐光裕定稿。

本书由同济大学严导淦教授主审，在百忙中认真仔细，逐句逐段全面审阅，提出了许多指导性意见，获益匪浅。徐绪笃、汤毓骏、胡盘新、邓新元以及宋士贤、刘云龙、杨学栋等教授给予了亲切的关怀、关注和指导。张宇、王晓欧、樊涤心和孙飞等老师给予了大力的支持，在此一并致以衷心的感谢。同时本书在编写过程中参阅了有关书籍和文献，深受启迪并借用了图表，谨向这些书籍和文献的作者致以诚挚的谢忱。

由于编者学识浅薄，书中多有错漏和不妥之处，祈望读者指正。

编　者

2008 年 2 月

目　录

第一章　质点运动学

一、概念题

1－1　在曲线运动中，$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$有何不同？$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$与$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$有何不同？

解答　$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$表示质点运动的速度，有大小和方向，是矢量。$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$是位矢大小的变化率，没有反映位矢的方向随时间的变化，它并不表示质点运动的速率。如图1－1所示，质点自A点向B点运动，Δt时间内的位移为$\boldsymbol{AB}$，即$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{AB}$；而今取$OC = OA$，则$\Delta r = |\boldsymbol{r}_B| - |\boldsymbol{r}_A| = OB - OA = CB$，即$\Delta r \neq |\Delta\boldsymbol{r}|$，在$\Delta\boldsymbol{r} \to 0$时，$\boldsymbol{AB}$即为$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，$CB$即为$\mathrm{d}r$，同样有$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| \neq \mathrm{d}r$。对于加速度$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，有大小和方向，是矢量。而$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$只是速度大小的变化率，是质点切向加速度$\boldsymbol{a}_t$的大小，即$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$。速度方向的变化率是由法向加速度$\boldsymbol{a}_n$的大小表述的，即$a_n = \frac{v^2}{\rho}$。而$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$只是$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$沿切向方向的一个分量（$\rho$为曲线上一点的曲率半径，对圆周运动而言，$\rho = R$，$R$为圆周轨道的半径）。

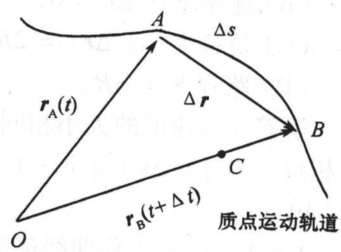

图1－1

1－2　设质点的运动函数为$x = x(t)$，$y = y(t)$。在计算质点的速度和加速度的数值时，有人用下述两种方法：

（1）先求出$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，再根据$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和$a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}^2 t}$，求$v$和$a$；

（2）先计算速度和加速度的分量，$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$、$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，以及$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$和$a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，然后用$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$和$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$，求$v$和$a$。

你认为哪一种方法正确？为什么？

解答　方法（2）正确，方法（1）不正确，其原因是没有正确区别位矢导数的模与位矢模的导数在物理意义上的不同。

r是$\boldsymbol{r}$位矢的模，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$表示质点运动过程中位矢大小的变化率（不反映速度方向的变化率），所以，它不是质点运动的速率。$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$也不是质点运动的加速度。例如，质点以坐标原点为圆心作圆周运动时，质点的速度和加速度均不为零，但是由于质点位矢的大小（即圆的

半径）不变，所以在方法（1）中，$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}=0$，这显然是不正确的。

正确的计算方法是后者，先求位矢的各分量对时间的导数，再求$\boldsymbol{r}$和$\boldsymbol{a}$的模及方向，只有这样才能正确反映速度和加速度的矢量性。

二、选择题

1－3 如图1－2所示，质点作匀速圆周运动，其半径为R，从A点出发，经半圆到达B点，试问下列叙述中哪一个是不正确的？ [ ]

（A）速度增量的大小为$|\Delta\boldsymbol{v}|=0$；

（B）速率增量$\Delta v=0$；

（C）位移大小$|\Delta\boldsymbol{r}|=2R$；

（D）路程$S=\pi R$。

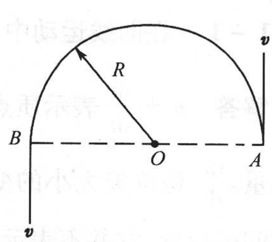

图1－2

解答 因速度的大小相同，即速率相同，可是速度的方向相反，因而$|\Delta\boldsymbol{v}|=v-(-v)=2v\neq0$，所以本题应选（A）。

1－4 一质点作曲线运动，其瞬时速度为$\boldsymbol{v}$，瞬时速率为v，平均速度为$\bar{\boldsymbol{v}}$，平均速率为$\bar{v}$，试问它们之间的下列四种关系中哪一种是正确？ [ ]

（A）$|\boldsymbol{v}|=v$，$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$；

（B）$|\boldsymbol{v}|\neq v$，$|\bar{\boldsymbol{v}}|=\bar{v}$；

（C）$|\boldsymbol{v}|=v$，$|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$；

（D）$|\boldsymbol{v}|\neq v$，$|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$。

解答 因为$\bar{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$，而且$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta s$，所以$|\bar{\boldsymbol{v}}|\neq\bar{v}$，$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$。在$\Delta t\to0$时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|=\mathrm{d}s$，所以$|\boldsymbol{v}|=v$。本题应选（C）。

1－5 下列说法中正确的是 [ ]

（A）质点沿Ox轴运动，若加速度$a<0$，则质点必作减速运动；

（B）在曲线运动中，质点的加速度一定不为零；

（C）若质点的加速度为恒矢量，则其运动轨道一定为直线；

（D）当质点做抛体运动时，其法向加速度a_n和切向加速度a_t是不断变化的，因此$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}$也是不断变化的。

解答 在曲线运动中，速度的方向不断变化，速度在变化，就必定有加速度。

判断质点作加速运动还是减速运动，不能仅仅凭加速度的正负来断定速度变化的情况，只有当加速度$\boldsymbol{a}$与速度$\boldsymbol{v}$同号，即两者方向相同时，质点作加速运动，反之，两者异号，即方向相反，质点做减速运动。

若$\boldsymbol{a}$为恒矢量，即其大小、方向均不随时间而改变，则质点作匀变速运动，但不一定作直线运动，如抛体运动，就是一种匀变速曲线运动，加速度为重力加速度，运动轨道为抛物线。

抛体运动中切向和法向加速度虽是不断变化的，但两者的矢量和却恒等于重力加速度，即$a=\sqrt{a_n^2+a_t^2}=g$。本题应选（B）。

1－6　如图1－3所示，四个不同倾角的光滑斜面有共同的底边，其长为d，若使一个物体先后沿各斜面上端自静止开始下滑到下端A，其中所需时间最短的斜面，其倾角是　[　]

(A)20°；　(B)30°；

(C)45°；　(D)60°。

解答　已知底边长为d，设斜面倾角为θ，有$a=g\cos\theta$，斜面长$l=\dfrac{d}{\sin\theta}$，$l=\dfrac{1}{2}at^2$，所以$t=\sqrt{\dfrac{2l}{a}}=\sqrt{\dfrac{4d}{g\sin 2\theta}}$，当$\sin 2\theta=1$，即$\theta=45°$时，$t=\sqrt{\dfrac{4d}{g}}$为最小。本题应选(C)。

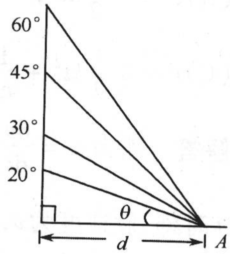

图1－3

1－7　下列说法中，哪一个是正确的？　[　]

(A)质点作匀速率圆周运动时，其切向加速度一定等于零；

(B)质点作匀速率圆周运动时，其加速度恒定；

(C)质点作变速率圆周运动时，其加速度方向与速度方向处处垂直；

(D)质点作变速率圆周运动时，其加速度方向必与速度方向相同。

解答　匀速率是速率不随时间t而变化，所以加速度的切向分量$a_t=\dfrac{dv}{dt}=0$。

匀速率圆周运动中，切向加速度为零，但法向加速度的方向沿半径指向圆心，其大小不变，但方向随时间不断变化。

变速率圆周运动中，由于速度的大小和方向都在变化，所以加速度的方向不再指向圆心，总是指向圆周的凹侧。并且当$a_t=\dfrac{dv}{dt}>0$时，速率增加，$a_t=\dfrac{dv}{dt}<0$时，速率减慢，这两种情况，根据矢量合成如图1－4所示，可见加速度$\boldsymbol{a}$总是指向圆周的凹侧。

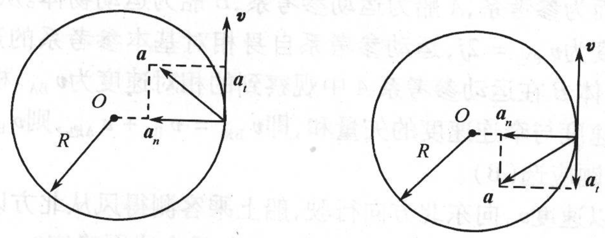

图1－4

所以变速率圆周运动的加速度$\boldsymbol{a}$，一般不与速率方向垂直，只有作匀速率圆周运动，且切向加速度为零时，加速度等于法向加速度，这时加速度$\boldsymbol{a}$才与速度$\boldsymbol{v}$垂直。本题应选(A)。

1－8　一小球沿斜面向上运动，其运动函数为$s=5+4t-t^2$(SI)，则小球将在何时开始从斜面往下运动　[　]

(A)4s；　(B)6s；　(C)2s；　(D)3s。

解答　$v=\dfrac{ds}{dt}=4-2t$，小球沿斜面运动到最高点时$v=0$，即$4-2t=0$，$t=2s$。本题

应选(C)。

1－9 某物体沿 Ox 轴作直线运动，加速度 a 与时间 t 以及速度 v 的关系式为 $a = -kv^2t$，式中 k 为大于零的恒量。已知物体的初速度为 v_0，则速度与时间的函数关系为 [ ]

(A) $v = -\frac{1}{2}kt^2$；　(B) $v = \left(-\frac{1}{2}kt^2\right)^{-1}$；

(C) $v = \left(\frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}\right)^{-1}$；　(D) $v = \frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}$。

解答 因为 $a = \frac{dv}{dt} = -kv^2t$，所以 $\frac{dv}{dt} = -kv^2t$。分离变量并积分，且 $t = 0$ 时速度为 v_0，而在 t 时刻，设速度为 v，则 $\int_{v_0}^{v} -\frac{dv}{v^2} = \int_0^t kt\mathrm{d}t$，解得 $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{1}{2}kt^2$，所以 $v = \left(\frac{1}{2}kt^2 + \frac{1}{v_0}\right)^{-1}$。本题应选(C)。

1－10 一质点作半径为 R 的变速圆周运动，v 为任一时刻质点的速率，下式中哪一个正确表示了加速度的大小？ [ ]

(A) $\frac{dv}{dt}$；　(B) $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$；　(C) $\frac{v^2}{R}$；　(D) $\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}\right]^{\frac{1}{2}}$。

解答 由 $a_t = \frac{dv}{dt}$，$a_n = \frac{v^2}{R}$ 和 $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$ 可得。本题应选(D)。

1－11 在相对地面静止的坐标系内，A、B 两船都以 $2\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 的速度匀速行驶。A 船沿轴 Ox 正向，B 船沿轴 Oy 正向。今在 A 船上设置与静止坐标系方向相同的坐标系 Oxy(Ox 轴、Oy 轴的单位矢量用 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 表示)，问在 A 船上的坐标系中，B 船的速度(以 $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 为单位)为 [ ]

(A) $2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$；　(B) $-2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$；　(C) $-2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$；　(D) $2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$。

解答 选取地面为参考系，A 船为运动参考系，B 船为运动物体。从参考系中观察到 B 船的速度即绝对速度为 $\boldsymbol{v}_{B地} = 2\boldsymbol{j}$，运动参考系自身相对基本参考系的速度即牵连速度为 $\boldsymbol{v}_{A地} = 2\boldsymbol{i}$，则运动物体 B 在运动参考系 A 中观察到的相对速度为 $\boldsymbol{v}_{BA}$。根据速度合成定理，绝对速度等于相对速度与牵连速度的矢量和，即 $\boldsymbol{v}_{B地} = \boldsymbol{v}_{BA} + \boldsymbol{v}_{A地}$，则 $\boldsymbol{v}_{BA} = \boldsymbol{v}_{B地} - \boldsymbol{v}_{A地} = 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{i} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$。本题应选(B)。

1－12 小船以速度 $\boldsymbol{v}_1$ 向东北方向行驶，船上乘客测得风从北方以速度 $\boldsymbol{v}_2$ 吹来，则风相对于地面的速度 $\boldsymbol{v}$ 应由如图 1－5 所示的哪一个矢量合成图确定？ [ ]

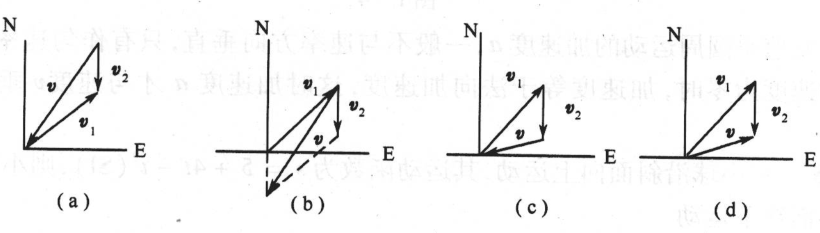

图 1－5

解答 利用矢量合成三角形法，在矢量 $\boldsymbol{v}_1$ 的末端接着画出矢量 $\boldsymbol{v}_2$，则从 $\boldsymbol{v}_1$ 的始端指向 $\boldsymbol{v}_2$ 的末端的矢量就是合矢量 $\boldsymbol{v}$。本题应选(D)。

三、填空题

1－13　如图1－6所示，将一物体以$v_0=9.8\mathrm{m\cdot s^{-1}}$的初速度水平抛出，飞行一段时间后，恰好垂直地撞在倾角为30°的斜面上，如果不计空气阻力，那么物体在运动过程中飞行的时间为________。

解答　如图1－7所示，$v_x=v_0$，$v_y=v_x\cot30°=\sqrt{3}v_0$（$v$垂直于斜面），所以$t=\dfrac{v_y}{g}=\underline{\sqrt{3}\mathrm{s}}$。

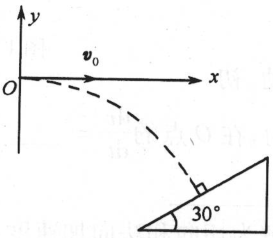

图1－6

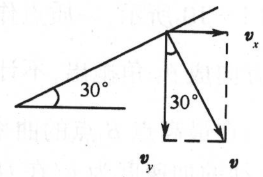

图1－7

1－14　一质点沿Ox轴的运动函数为$x=\dfrac{m}{n^2}(nt+\mathrm{e}^{-nt})$，式中$m$、$n$为恒量。质点在$t=0$时的速度大小$v=$________；加速度大小$a=$________；质点在任一时刻的速度和加速度的关系为________。

解答　可由运动函数求得v和a，即

$$v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\underline{\frac{m}{n}(1-\mathrm{e}^{-nt})}$$

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\underline{m\mathrm{e}^{-nt}}$$

所以$t=0$时，$\underline{v_0=0}$，$\underline{a_0=m}$。又因为$\mathrm{e}^{-nt}=\dfrac{a}{m}$所以$v=\dfrac{m}{n}\left(1-\dfrac{a}{m}\right)$，质点在任一时刻的速度和加速度的关系为$\underline{a=m-nv}$。

1－15　在高为h的平台上，有一质量为m的小车，用绳子跨过滑轮，由地面上的人以匀速度v_0向右拉动，如图1－8所示。当人从平台底脚处O向右走了x的距离时，小车的速度$v=$________，加速度$a=$________。

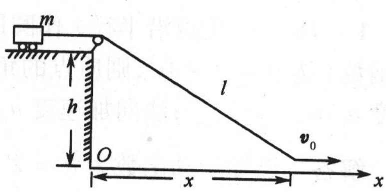

图1－8

解答　取平台底脚处O为坐标原点，水平向右为Ox轴。人的速度$v_0=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，小车速度的大小为斜拉绳$l$的长度变化率，即$v=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}$，由图1－8所示的几何关系有$l=\sqrt{h^2+x^2}$，所以小车的速度为$v=\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\dfrac{x}{\sqrt{h^2+x^2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\underline{\dfrac{xv_0}{\sqrt{h^2+x^2}}}$，

小车的加速度为 $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{h^2 v_0^2}{(h^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$。

1-16 一质点以匀速率在 Oxy 平面中运动，其轨道如图 1-9 所示，质点在________点的加速度值最大，在________点的加速度值最小。

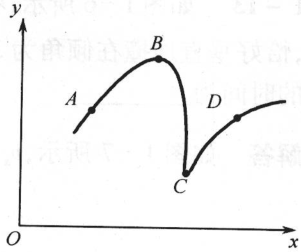

图 1-9

解答 匀速率曲线运动，$a_t = \dfrac{dv}{dt} = 0$，$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$（ρ 为曲率半径），所以 $a = a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，A 点的曲率半径最大，所以 a 最小，C 点的曲率半径最小，所以 a 最大。

1-17 如图 1-10 所示，一质点作斜抛运动，初速度为 v_0，与水平方向成 θ_0 角抛出，不计空气阻力。在 O 点的 $\dfrac{dv}{dt}$ = ________，在 O 点的曲率半径为________；在最高点 B 点的曲率半径为________。

解答 抛体运动的加速度为 g，在 O 点可分解为切向和法向加速度 a_t 和 a_n，如图 1-11 所示，所以 O 点的 $\dfrac{dv}{dt} = a_t = -g\sin\theta$，负号表示切向加速度方向与 $\boldsymbol{v}_0$ 方向相反。

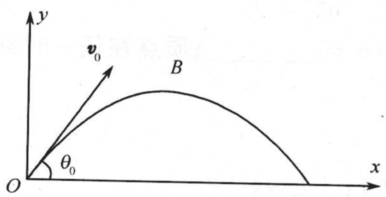

图 1-10

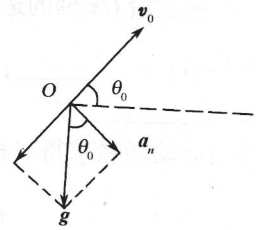

图 1-11

由 $a_n = g\cos\theta_0 = \dfrac{v_0^2}{\rho}$ 可得，O 点的曲率半径 $\rho = \dfrac{v_0^2}{g\cos\theta_0}$。在最高点 B 处，$a_B = a_n = g$，所以 $g = \dfrac{v_B^2}{\rho}$，又因为 B 点的速度 $v_B = v_0\cos\theta_0$，所以 B 点的曲率半径 $\rho = \dfrac{v_0^2\cos^2\theta_0}{g}$。

1-18 一质点沿半径 r 作圆周运动，其角坐标与时间的函数关系（以角量表示的运动函数）为 $\theta = 2 + 4t^3$，则质点的角速度 ω = ________；角加速度 α = ________；切向加速度 a_t = ________；法向加速度 a_n = ________。

解答 已知运动函数为 $\theta = 2 + 4t^3$，按定义式得，质点的角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \underline{12t^2}$；质点的角加速度 $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \underline{24t}$；切向加速度 $a_t = r\alpha = \underline{24rt}$；法向加速 $a_n = r\omega^2 = \underline{144rt^4}$。

1-19 一辆带蓬的卡车，雨天在平直公路上沿直线行驶，司机发现，车速很小时，雨滴从车后斜向落入车内；车速过大时，雨滴从车前斜向落入车内。已知雨滴相对地面的速度为 $\boldsymbol{v}$，方向与水平地面夹角为 θ，则车速为________。当雨滴相对车厢的速度与车厢所成的角为________时，雨滴恰好不能落入车内，此时雨滴相对车厢的速度为________。

解答 设雨滴相对于地面的速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{雨地}$，雨滴相对于车厢的速度为 $\boldsymbol{v}_{雨车}$，车相对于

地面的速度为$\boldsymbol{v}_{车地}$。根据速度合成定理，三者关系为$\boldsymbol{v}_{雨地}=\boldsymbol{v}_{雨车}+\boldsymbol{v}_{车地}$，当雨滴相对于车厢的速度垂直于车厢，即成90°角时，雨滴恰好不能落入车内，此时三者的关系如图1-12所示，由图可得$v_{车地}=\underline{v\cos\theta}$；当与车厢垂直时$v_{雨车}=\underline{v\sin\theta}$。

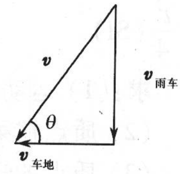

图1-12

四、计算题

1-20 一质点沿Ox轴作直线运动，其运动函数为$x=t-2t^2$(SI)。试求(1)$t=1\mathrm{s}$的速度和加速度；(2)在$t=1\mathrm{s}$附近的$\Delta t=0.02\mathrm{s}$、$0.01\mathrm{s}$、$0.001\mathrm{s}$各段时间内的平均速度，在计算过程中你有何领悟？(3)分析质点的运动情况。

解答 (1)瞬时速度$v=\dfrac{dx}{dt}=1-4t$。

$t=1\mathrm{s}$，$v_1=-3\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，方向与$Ox$轴正方向相反。

瞬时加速度$a=\dfrac{dv}{dt}=\dfrac{d}{dt}(1-4t)=-4\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，方向与$Ox$轴正方向相反。

(2)设质点在t和$t+\Delta t$两时刻的坐标为分别为x_1、x_2，则

$$x_1=t-2t^2\qquad x_2=(t+\Delta t)-2(t+\Delta t)^2$$

于是Δt时间内的位移为

$$\Delta x=x_2-x_1=(t+\Delta t)-2(t+\Delta t)^2-(t-2t^2)=\Delta t-2\Delta t^2-4t\Delta t$$

而Δt时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=1-2\Delta t-4t$$

将$t=1\mathrm{s}$、$\Delta t=0.02\mathrm{s}$、$0.01\mathrm{s}$、$0.001\mathrm{s}$代入上式，算得各段时间内平均速度分别为

$$\bar{v}\mid_{\Delta t=0.02\mathrm{s}}=1-2\times0.02-4=-3.04\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$\bar{v}\mid_{\Delta t=0.01\mathrm{s}}=1-2\times0.01-4=-3.02\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$
$$\bar{v}\mid_{\Delta t=0.001\mathrm{s}}=1-2\times0.001-4=-3.002\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

由此可见，在变速运动中，平均速度是一个变化的量，对某一时刻而言，它的大小取决于时间间隔Δt的长短，取得越短，平均速度越接近瞬时速度。

上述演算是为了阐明瞬时速度的内涵，它是依据$\bar{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$，用逐步逼近法，也就是高等数学上称为取极限值的方法而得出的。

(3)分析运动情况。

由$v=\dfrac{dx}{dt}=1-4t$可知：

当$t=0.25\mathrm{s}$时，$v=0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，而当$t=0\mathrm{s}$时，$v_0=1\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$x_0=0\mathrm{m}$；

当$t<0.25\mathrm{s}$时，$v>0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$a<0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，质点从坐标原点出发沿$Ox$轴正方向作匀减速直线运动；

当$t>0.25\mathrm{s}$时，$v<0\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，$a<0\mathrm{m\cdot s^{-2}}$，质点沿$Ox$轴负方向作匀加速直线运动。

1-21 一质点在平面直角坐标系Oxy内作平面运动，其运动函数为$x=t$，y

$= \frac{t^2}{4}(\mathrm{SI})$。

求：(1) 运动函数的矢量表示式；

(2) 质点在第 1 秒末和第 2 秒末的位矢以及这段时间内的位移；

(3) 质点的轨道方程。

解答 (1) 运动函数的矢量表达式为 $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{4}\boldsymbol{j}\mathrm{m}$

(2) 计算出第 1 秒末和第 2 秒末的位置坐标为

$$x_1 = 1.00\mathrm{m}, y_1 = 0.25\mathrm{m}, x_2 = 2.00\mathrm{m}, y_2 = 1.00\mathrm{m}$$

相应的位矢为 $\boldsymbol{r}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} = (1.00\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (0.25\mathrm{m})\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{r}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} = (2.00\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (1.00\mathrm{m})\boldsymbol{j}$$

质点在第 1 秒末到第 2 秒末，位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 在 Ox 轴和 Oy 轴上分量分别为

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 1.00\mathrm{m}, \quad \Delta y = y_2 - y_1 = 0.75\mathrm{m}$$

$$\Delta\boldsymbol{r} = \Delta\boldsymbol{r}_2 - \Delta\boldsymbol{r}_1 = \Delta x\boldsymbol{i} - \Delta y\boldsymbol{j} = (1.00\mathrm{m})\boldsymbol{i} + (0.75\mathrm{m})\boldsymbol{j}$$

$$|\Delta\boldsymbol{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(1.00\mathrm{m})^2 + (0.75\mathrm{m})^2} = 1.25\mathrm{m}, \theta = \arctan\frac{\Delta y}{\Delta x} = \arctan\frac{0.75\mathrm{m}}{1.00\mathrm{m}} = 36.9^\circ$$

(3) 消去时间 t，可得质点的轨迹方程为

$$y = \frac{x^2}{4}$$

即质点在坐标系 Oxy 内作抛体运动。

1－22 如图 1－13 所示，当枪手打靶时把子弹从 O 点射出，靶子 P 恰好从高度为 H 处开始自由下落。求：

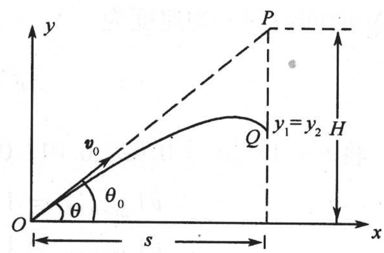

图 1－13

(1) 仰角为多大时，子弹击中靶子？

(2) 子弹射出的速率有无限制？

解答 子弹击中靶子的必要条件是子弹和靶子 P 相交，设相交点为 Q。

(1) 选如图 1－13 所示的坐标系，设枪的仰角为 θ，子弹射出枪口的速率为 v_0，枪口与靶子的水平距离为 s，靶子 P 的高度为 H。设子弹射出枪口，靶子恰好自由下滑，经历时间 t 击中靶子。子弹的坐标为 (x_1, y_1)，靶子坐标为 (x_2, y_2)。根据抛体运动函数，有

$$x_1 = v_0 t\cos\theta, \quad y_1 = v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x_2 = s, \quad y_2 = H - \frac{1}{2}gt^2$$

为了击中靶子必须满足 $x_1 = x_2$，$y_1 = y_2$，即

$$v_0 t\cos\theta = s \tag{1-1}$$

$$v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 = H - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1-2}$$

由式(1－1)可得 $t=\dfrac{s}{v_0\cos\theta}$,代入式(1－2)后得

$$\tan\theta=\frac{H}{S}=\tan\theta_0$$

上述结果表明,要击中靶子,开始时要瞄准靶子射击。

(2)射出枪口的子弹初速度 v_0 由枪的性能决定,如果 v_0 很小,子弹的水平飞行距离小于 s,则不能击中靶子,所以子弹的初速度应有下限。已知靶子从 P 点自由下落到地面所用的时间 $t_0=\sqrt{\dfrac{2H}{g}}$,初速度 v_0 的值应保证在 t_0 时间内水平飞行距离大于或等于 s,即 $v_0t_0\cos\theta\geqslant s$,由 $\tan\theta=\dfrac{H}{s}$,则 $\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{s^2+H^2}}$,代入上式得 $v_0\geqslant\sqrt{\dfrac{g}{2H}(H^2+s^2)}$。

1－23 一人站在平板车上,车在水平地面上沿着 x 轴正向以恒定速率 $10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 运动,如图 1－14 所示暂不考虑坐标系 Oxy,圆环距他手的高度为 5m,这个人欲抛一球,使球水平地通过圆环。人以相对于自身为 $13\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 的速率将球抛出($g=10\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)。试问:(1)球的初速度竖直分量必须是多少?(2)球抛出后经多少时间才能穿过圆环?(3)他必须在环面的前方多远的水平距离处把球抛出?

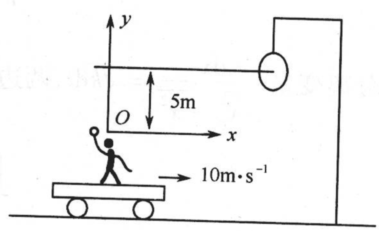

图 1－14 和图 1－15

解答 在图 1－14 上建立坐标系 Oxy 如图 1－15 所示,原点 O 设定在球的抛出点。

(1)根据题意,球穿过圆环时运动方向是水平的,因为 $v_y=0$,所以环距人手的高度为球上抛的最大高度 $y_{\max}$。根据 $v_{0y}^2-2gy_{\max}=0$, $y_{\max}=\dfrac{v_{0y}^2}{2g}$ 得球的初速度的竖直分量为

$$v_{0y}=\sqrt{2gy_{\max}}=\sqrt{2\times10\times5}\mathrm{m\cdot s^{-1}}=10\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2)球通过环的时间为 $t=\dfrac{v_{0y}}{g}=\dfrac{10\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{10\mathrm{m\cdot s^{-1}}}=1\mathrm{s}$。

(3)设抛球时球与圆环的水平距离为 x_0,人抛球的初速度为 $v_{0球对人}$,其水平分量为 $v_{0x球对人}$,竖直分量为 $v_{0y球对人}$,人对地的速度为 $v_{0x人对地}$。

当球通过环时,有

$$x_0=(v_{0x球对人}+v_{0x人对地})t$$

因

$$v_{0x球对人}=\sqrt{v_{0球对人}^2-v_{0y球对人}^2}$$

故

$$x_0=\left(\sqrt{v_{0球对人}^2-v_{0y人对球}^2}+v_{0x人对地}\right)t$$

代入已知条件和求得的 v_{0y} 的值,可算出 $x_0=18.3\mathrm{m}$。

1－24 一质点在 Ox 轴上运动,加速度 $a=-kx$,其中恒量 $k>0$。已知 $t=0\mathrm{s}$ 时,质

点静止在 $x = x_0$ 处，求质点的运动规律。

解答 本题已知加速度是坐标 x 的函数关系，求运动函数，需要变换变量，用积分求解。将加速度 a 变换，即 $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kx$。将 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -kx$ 分离变量积分，并代入初始条件：$t = 0\mathrm{s}$ 时，$x = x_0, v = v_0$，得

$$\int_0^v v\mathrm{d}v = -\int_{x_0}^x kx\mathrm{d}x$$

积分得

$$v^2 = k(x_0^2 - x^2)$$

所以

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{k(x_0^2 - x^2)}$$

再分离变量 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \sqrt{k}\mathrm{d}t$，两边积分，并由初始条件有

$$\int_{x_0}^x \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = \int_0^t \sqrt{k}\mathrm{d}t$$

积分之，得质点的运动方程为

$$x = x_0 \cos\sqrt{k}t$$

质点沿 Ox 轴作简谐运动。

1－25 一物体在油池的油面上，从静止开始下落，其运动方程为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - Bv$，其中 A、B 为恒量，求任一时刻 t 的速度和运动函数。

解答 设物体开始运动处为坐标原点 O，作铅直向下的坐标轴为 Ox，按题意有

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - Bv \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}v}{A - Bv} = \mathrm{d}t$$

初始条件 $t = 0\mathrm{s}$ 时 $x = x_0, v_0 = 0\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$，求定积分

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{A - Bv} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

得到物体在任一时刻 t 的速度为

$$v = \frac{A}{B}(1 - \mathrm{e}^{-Bt})$$

由速度定义式 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，将上式写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{A}{B}(1 - \mathrm{e}^{Bt})$$

根据初始条件，对上式求定积分，有

$$\int_0^x \mathrm{d}x = \int_0^t \frac{A}{B}(1 - \mathrm{e}^{-Bt})\mathrm{d}t$$

由此可得

$$x = \frac{A}{B}t + \frac{A}{B^2}(e^{-kt} - 1)$$

1－26 如图1－16所示，一艘正在行驶的汽船沿 Ox 轴作直线运动，在关闭发动机后受到阻力影响，这时，其加速度与船速方向相反、大小与船速平方成正比，即$\frac{dv}{dt} = -kv^2$，k 为恒量，试证明：

（1）在发动机关闭后，船在 t 时刻的速度 $v = \frac{v_0}{v_0kt + 1}$；

（2）在发动机关闭后，船在 t 时间内前进的距离 $x = \frac{1}{k}\ln(v_0kt + 1)$；

（3）船行驶 x 距离时的速度 $v = v_0e^{-kx}$。

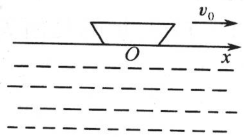

图1－16

证明 已知加速度是速度的函数，用积分法来计算。

（1）设发动机关闭时刻 $t = 0$s，船速为 v_0。已知$\frac{dv}{dt} = -kv^2$，则有

$$\frac{dv}{v^2} = -kdt$$

分离变量后，积分

$$\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v^2} = -\int_0^t kdt$$

由此得

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

或

$$v = \frac{v_0}{v_0kt + 1}$$

（2）设 $t = 0$s 时 $x = 0$m，则

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{v_0kt + 1}$$

分离变量并积分

$$x = \int_0^x dx = \int_0^t \frac{v_0}{v_0kt + 1}dt$$

由此得 t 时间内前进的距离为

$$x = \frac{1}{k}\ln(v_0kt + 1)$$

（3）根据题（1），有$\frac{v}{v_0} = v_0kt + 1$，代入题（2）中 x 的表达式有

$$x = \frac{1}{k}\ln\frac{v_0}{v}$$