

复变函数论

2011/2/10/2015/7/19

0.174.5/10

序 言

“复变函数论”这门课程的基础是数学分析。

根据国家的统一教学计划，这门课程是数学专业的基础课，也是必修课。它研究的对象是解析函数——一种特殊的复变函数类，所以也称为解析函数论。数学里专门研究函数的领域称为分析——它以变量间的依赖关系作为自己的对象。单复变函数论（简称函数论）和数学分析（微积分）、微分方程、微分几何等，都是分析这个领域的重要组成部分，因此复变函数论亦称复分析。它在初期是实变函数分析在复数域的推广，它的基本概念如函数、极限、连续、导数等等，在形式上与数学分析里的相应概念相类似。在推广的过程中有所发展，到十九世纪中叶，逐步形成了数学里分析领域重要分枝。

这门课程，不但数学专业必读，其他如物理以及工科等各有关专业，都要程度不同地涉及其中的某些内容。特别是复变函数论的理论和方法，在流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等物理和工程技术各学科中，都有广泛的应用，并是解决有关问题的有力工具。

根据1980年教育部颁发的关于“复变函数论教学大纲”，其主要内容为复变函数的微商、积分、级数、留数理论、共形映射、解析开拓和黎曼曲面等。这些内容基本上是围绕 L. Euler, A. L. Cauchy, 以及后来的 P. G. L. Dirichlet, K. Weierstrass, G. F. B. Riemann 的工作，和解析函数的特征性质展开的。这些内容尽管是较古但是又是最基本的理论和方法，这对于我们加深数学修养，增

强数学工作能力，显然是必须的；为学习后继课程，自学和钻研些有关问题，打下必要的基础。

本书除了一些必备的基础知识外，还适当地纳入了某些现代的内容，指出了某些新发展的方向，这对于巩固和加深基础知识，扩大眼界，了解发展趋势，培养能力是有益的。

本书中带*号的内容，如时间紧，可以省略或粗读。

书中第一章主要是基本概念，着重讨论了复数的性质和运算法则，以及复变函数的函数、极限和连续等概念。如果读者对数学分析有一定基础，本章可以粗读。第二至六章要求精读，这是本书的中心，它们反映了解析函数在相应条件下的特征，如满足C.—R.方程，可以用多项式逼近，沿闭路积分为零，展开成幂级数，留数定理，共形映射等，七、八、九三章可以作为一般的学习和要求。但也要了解其主要问题、思路和方法。

我们针对自学这个特点，较多地安排了一定数量的例题和习题，以及解答。我们认为例题和习题是帮助读者深刻理解概念、定理、论证和计算问题，获取思考方法等，必不可少的内容。因之要求读者，在读完章节之后，一定要阅读例题，选作习题（不要求全作），才能深入理解所学的知识和本质的本质。还要从实际出发，循序渐进，刻苦钻研。

编者

目 录

序 言

第一章 复数和复变函数	1
§ 1.1 复数概念	1
1 复数及其被认识的历史梗概	2
2 复数的算术运算	3
§ 1.2 复数的几何表示.....	3
1 复数平面	3
2 复数的极坐标形式	4
3 De Moivre 公式和复数的 n 次方根.....	6
§ 1.3 扩充的复数平面	8
习 题 (1.1)	10
§ 1.4 平面点集	11
1 某些平面点集合与定理	11
2 区 域	12
§ 1.5 复变函数	15
1 函数概念	15
2 极限概念	18
3 连续性	18
习 题 (1.2)	22
学习指导	23
第二章 微商与解析函数	49
§ 2.1 复变函数的微商和解析函数概念	49
1 微商和微分	49

2	解析函数概念	52
3	C.—R.条件(方程)	53
4	解析函数的性质	56
5	单叶解析函数及其反函数	59
§ 2.2	解析函数与调和函数的关系	60
1	调和函数概念	60
2	解析函数与调和函数间的关系	60
	习 题 (2.1)	62
§ 2.3	某些初等函数的解析性	63
1	初等代数函数	64
2	幂函数和根式函数	65
3	指数函数和对数函数	68
4	三角函数和反三角函数	71
* 5	双曲线函数和反双曲线函数	75
* 6	一般的幂函数和一般的指数函数	76
* 7	关于初等超越函数的定义	80
§ 2.4*	用多项式逼近函数	82
1	“偏差”和一致收敛	82
2	用多项式逼近函数	82
	习 题 (2.2)	84
	学习指导	85

第三章 复变函数的积分.....106

§ 3.1	复变函数积分的概念	106
1	复变函数积分的定义	106
2	复变函数积分的基本性质	109
3	复变函数积分的计算	110
	习 题 (3.1)	115
§ 3.2	Cauchy积分定理及其推广	116
1	Cauchy积分定理及其证明	116
2	Cauchy积分定理的推广	125

§ 3	Cauchy积分定理推广到复连通区域	125
	习 题 (3·2)	129
§ 3·3	不定积分	130
1	积分上限函数的解析性	130
2	不定积分	132
3	Newton-Leibniz公式	133
§ 3·4	Cauchy积分公式	134
1	Cauchy 积分公式	134
2	算术平均值定理	137
	习 题 (3·3)	137
§ 3·5	解析函数的无穷可微性	138
1	解析函数的无穷可微性及其证明	138
2	Cauchy不等式	143
③	Liouville定理	144
4	代数基本定理及其证明	144
5	Morera (莫瑞拉) 定理	145
6	可以用多项式逼近的函数的解析性	146
§ 3·6	解析函数的最大模原理、Poisson积分	147
①	最大模原理	147
* 2	Poisson积分公式	149
	习 题 (3·4)	150
	学习指导	154

第四章 解析函数的级数展开式

§ 4·1	复数项级数	181
1	复数项级数	181
2	复数项级数的性质	182
§ 4·2	函数项级数	184
1	函数项级数概念	184
2	函数项级数的性质	187

3	Weierstrass 定理	191
	习 题 (4.1)	195
§ 4.3	幂级数	197
1	幂级数概念	197
2	幂级数的收敛性	197
3	幂级数的收敛半径	200
4	和函数的解析性	200
§ 4.4	解析函数的幂级数展开式	201
1	Taylor (泰劳) 定理	201
2	解析函数的幂级数展开方法	204
	习 题 (4.2)	211
△§ 4.5	解析函数零点的孤立性、唯一性定理	212
1	解析函数零点的孤立性	212
2	唯一性定理	215
▷§ 4.6	Laurent 级数	217
1	Laurent 级数	217
2	Laurent 级数的收敛域及其和函数的解析性	218
	习 题 (4.3)	220
§ 4.7	解析函数的 Laurent 展开式	221
1	Laurent 定理	221
2	解析函数展开成 Laurent 级数的方法	225
▽§ 4.8	解析函数在孤立奇点邻域的性质	230
1	解析函数在其有限孤立奇点邻域的性质	230
2	解析函数在其无穷远点邻域的性质	236
	习 题 (4.4)	237
	学习指导	239

第五章 留数理论及其应用286

§ 5.1	留数概念	286
1	关于有限远点的留数及其计算	286
2	关于无穷远点的留数及其计算	291

3	留数基本定理	292
	习 题 (5.1)	295
§ 5.2	用留数计算复变函数沿闭路的积分	296
§ 5.3	围道积分	298
	习 题 (5.2)	312
§ 5.4	辐角原理、Rouché定理及其应用	314
1	对数留数	314
2	辐角原理	316
3	Rouché定理及其应用	318
	习 题 (5.3)	321
	学习指导	324
第六章	共形映射	372
§ 6.1	共形映射概念	372
1	导数的模及其辐角的几何意义	372
2	共形映射的概念	375
§ 6.2	解析函数的映射性质	376
1	解析函数的保域性	376
2	单叶解析函数的共形性	378
3	单叶解析函数的反函数及其解析性	379
§ 6.3	Riemann存在定理及边界对应定理	381
1	共形映射的基本问题	381
2	Riemann存在定理	381
*3	边界对应定理	382
§ 6.4	分式线性映射	384
1	分式线性映射	384
2	分式线性映射的共形性	386
3	分式线性映射的保圆性	388
4	对称点的不变性	389
5	交比不变性	391
6	分式线性函数的确定	392

§ 6.5	分式线性映射的应用	394
	习 题 (6.1)	398
§ 6.6	某些初等函数所构成的映射	400
1	幂函数与根式函数的共形映射	400
2	指数函数与对数函数的共形映射	402
3	Жуковский (儒苛夫斯基) 函数的映射	404
4	机翼剖面的外部到圆外部的共形映射	408
	习 题 (6.2)	412
§ 6.7	共形映射问题举例	414
	习 题 (6.3)	419
	学习指导	421
第七章	解析开拓	473
§ 7.1	解析开拓的一般概念	473
1	解析开拓原理	473
2	完全解析函数	478
§ 7.2	解析开拓的一般方法——幂级数法	480
§ 7.3	Schwarz 对称原理	485
1	对称原理的特殊情况	485
2	对称原理应用举例	486
	习 题 (7.1)	488
	学习指导	488
第八章	初等多值函数与黎曼曲面	497
§ 8.1	初等多值函数概念	497
1	单值枝与单叶性区域	497
2	分枝、枝点与枝割线	499
* 3	函数 $W = \sqrt[p]{p(z)}$ 的枝点的判定	503
§ 8.2	黎曼曲面	505
1	黎曼曲面概念	505
2	多值函数与黎曼曲面	505

习 题 (8·1)	509
学习指导	509
第九章 复变函数论在流体力学上的应用	522
§ 9·1 不可压缩、无源、无旋、稳定的平面流动	522
§ 9·2 解析函数在流体力学上的意义	523
§ 9·3 关于飞机翼升力的计算	528
§ 9·4 圆域上的Dirichlet 问题.....	530
习 题 (9·1)	533
学习指导	534
编 后	

第一章 复数和复变函数

§ 1.1 复数概念

直到目前为止,所学过的数学课程的一切论证和运算,基本上是在实数范围内进行的.从本门课程起,将要迈出实数范围而进入复数领域.对于某些实数概念,尽管我们在数学分析中,已学习过,但必要时仍将引入或加以证明.这种重复还是需要的.

现今“集合论”的观点的“统治”地位,是现代数学特点之一.在数学课里包括中小学数学课,都业已渗透或应用集合论的观点、语言和记号.本书也将部分地应用.例如记号“ \in ”表“属于”,“ $\bar{\in}$ ”或“ \notin ”表“不属于”,“ \subset ”表“包含于”,“ \cup ”、“ \cap ”表示两集合的“并”、“交”等等.其他符号将随时引进.我们认为读者对上述记号的意义已有所了解.因而就不赘述了.

数学里讨论的对象,如代数讨论的对象是“数”、“式”,几何里讨论的对象是“点”或“直线”等,都称为“元素”或简称为“元”.由有限多个元素或无穷多个元素所组成的集体,称有限集合或无穷集合.

本章讨论的对象主要是复数和复数集.什么是复数,什么是复数集,它们都有哪些性质.这是本章讨论的主要课题.另一个课题是讨论复变函数概念及其某些性质.讨论复变函数,特别是讨论一种特殊的复变函数类——解析函数类,则是全书的任务.本章只引入复变函数概念,函数的极限和连续性.

1. 复数及其被认识的历史梗概

我们把形如

$$z = x + iy$$

的数称为复数 z 。其中 i 称为虚数单位，并规定 $i^2 = i \cdot i = -1$ ，或 $i = \sqrt{-1}$ （这里 $\sqrt{-1}$ 表示它可能取的两个值中的一个，普通取正值）； x 与 y 都是任意的实数。依次称为 z 的实部(Real)与虚部(Imaginary)。采用Weierstrass的符号，分别表示为

$$x = \operatorname{Re}z, \quad y = \operatorname{Im}z.$$

例如：复数 $\alpha = \sqrt{2} + i$ ，则 $\sqrt{2} = \operatorname{Re}\alpha$ ， $1 = \operatorname{Im}\alpha$ ；

$$\beta = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{5}}{2}i, \quad \text{则 } \frac{4}{3} = \operatorname{Re}\beta, \quad -\frac{\sqrt{5}}{2} = \operatorname{Im}\beta.$$

历史梗概①

远在三世纪，人们能解数字系数的某些一元方程。但对于 $x^2 + 1 = 0$ 却无办法。原因是受实数范围的限制。直到十六世纪中叶，意大利数学家Cardano（卡当）在解一元三次方程时得出方程：

$$x^3 + px + q = 0$$

的根为

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}}, \quad R = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

显然当 $R \geq 0$ 时， \sqrt{R} 为实数，方程有解。但当 $R < 0$ 时，在实数范围内 \sqrt{R} 无意义。于是为突破实数范围的限制而引入虚数。不但 \sqrt{R} 有意义，方程 $x^2 + 1 = 0$ 有解，并且使数域扩大。经过不少人的努力，使复数与平面上的点，与物理的向量联系起来，复数才在数学里巩固下来，从此数学也进入了新的阶段。在十八世纪，Euler（欧拉）在他的公式：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

① 朱静航：《 $\sqrt{-1}$ 是数学发展的必然产物》，《吉林师大学报》1974年，第1期。

中，首先引入记号 i 。

2. 复数的算术运算

设复数 $z = x + iy$ ，称 $x - iy$ 为 z 的共轭复数。记为 $\bar{z} = x - iy$ 。

把实数 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 称为 z 的绝对值或模 ($\sqrt{\quad}$ 取正值) 把 $\text{tg}^{-1} \frac{y}{x}$ 称为 z 的辐角。

关于两个复数 $\alpha = a + bi$ 及 $\beta = c + di$ 的四则运算和相等，用下列等式来定义：

$$\alpha \pm \beta = (a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i,$$

$$\alpha\beta = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i,$$

$$\alpha/\beta = (a + bi)/(c + di) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i, \quad \beta \neq 0.$$

当且仅当 $a = c, b = d$ 时, $\alpha = \beta, a + bi = c + di$ 。

§ 1.2 复数的几何表示

1. 复数平面

法国数学家 Argand (阿刚) 在全体复数和坐标平面上的点之间建立起一一对应关系。即令复数 $z = x + iy$ 与坐标为 (x, y) 的点相对应，这个坐标平面称为复平面或称 Argand 平面，亦称 Gauss (高斯) 平面，用 S 来表示， S_z 表示 z 平面。

今后我们对于 S 的点和数就不加区别地使用。

复数 $z = x + yi$ ，或 (x, y) 也可以用 S_z 的一个自由向量 \vec{Oz} 来表示

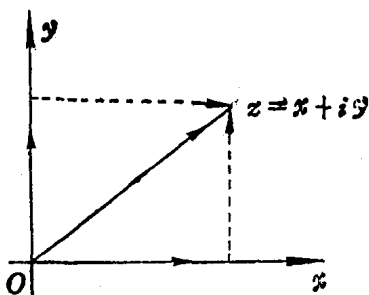


图 1.1

(如图1·1) . 它在轴上的射影为 \vec{Ox} 与 \vec{Oy} , 它们的和等于向量 \vec{Oz} .

下列不等式成立:

$$-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|,$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|.$$

把复数看成是两个向量之和, 也符合两个向量的加法运算. 这个和就是平行四边形的对角线 \vec{Oz} .

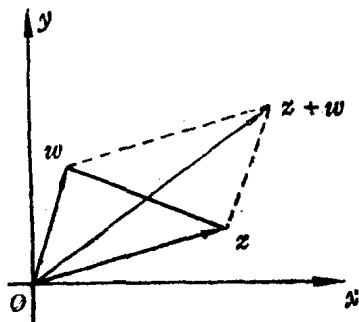


图 1·2

对于两个向量 z 与 $w \in S_z$, 差数模

$$|z - w|$$

就是 z 与 w 两点之间的距离. (图1·2)

下列不等式, 显然成立

$$|z - w| \geq |z| - |w|; \quad |z + w| \leq |z| + |w|.$$

其中只有当 z 与 w 共线且同方向时, 等号才成立.

把复数 z 表示成向量, 更可以增加复数的实际意义. 例如, 河流的水流, 设在每一点 (x, y) 的速度为 V , 可以写成复数形式为:

$$V = V_x + iV_y,$$

其中 V_x 与 V_y 是 V 的分速度. 速度 V 是分速度之和.

2. 复数的极坐标形式

应用直角坐标 (x, y) 与极坐标 (ρ, θ) 之间的对应关系:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\text{则} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}.$$

$z = x + iy$ 与 $\bar{z} = x - iy$ 可以分别表示成极坐标的形式:

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \bar{z} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta).$$

应用 Euler 公式, 则得 z 的指数表示式:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta}, \quad \bar{z} = \rho(\cos \theta - i \sin \theta) = \rho e^{-i\theta}.$$

其中: $\rho = |z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 是 z 的模. θ 与 $(-\theta)$ 分别称为 z 与 \bar{z} 的

辐角，并分别记为 $\text{Arg}z$ 和 $\text{Arg}\bar{z}$ 。（ Arg 是 Argument 的缩写）。

设 ϕ 是 z 的辐角，则 $\phi + 2k\pi$ (k 为整数) 仍是 z 的辐角。故 $\text{Arg}z = \phi + 2k\pi$ 是多值的。我们规定 $\text{Arg}z$ 的位于 $(-\pi, \pi]$ 的值称为 $\text{Arg}z$ 的主值，记为 $\text{arg}z$ 。即 $-\pi < \text{arg}z \leq \pi$ (或 $0 \leq \text{arg}z < 2\pi$)。于是，

$$\text{Arg}z = \text{arg}z + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

显然，互为共轭的复数 z 与 \bar{z} ，具有相同的模，辐角的主值相差一个符号。即

$$\text{arg}\bar{z} = -\text{arg}z.$$

它们的几何位置，对于实轴为对称。而且

$$\sqrt{z\bar{z}} = |z|.$$

当 z 为正实轴上的点， z 为正实数，则 $\text{arg}z = 0$ ；当 z 为负实轴上的点， z 为负实数，则 $\text{arg}z = \pi$ ；当 $z = 0$ 时，其辐角失去意义，即 $z = 0$ 是唯一辐角未定义的复数。

应用复数的指数形式（或极坐标形式），则

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} = \rho_1 \rho_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}. \end{aligned}$$

$$z_1 / z_2 = \rho_1 e^{i\theta_1} / \rho_2 e^{i\theta_2} = \frac{\rho_1 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{\rho_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

这就是说：

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| |z_2|,$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\text{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \text{Arg}z_1 +$$

$$\text{Arg}z_2, \quad \text{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \text{Arg}z_1 - \text{Arg}z_2.$$

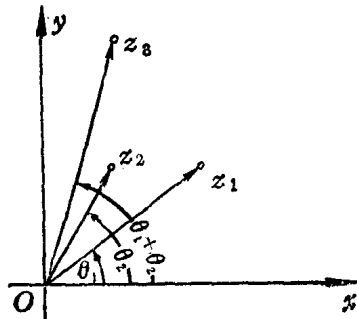


图 1.3

这里应理解为：等式两端所

代表的是同样的一组值。因为 $\text{Arg}z$ 是多值函数。(图1·3) 所表现的是主值 $\text{arg}z$ 。

$$\begin{aligned} \text{显然, } |z \cdot \bar{z}| &= |z| |\bar{z}| = |z|^2; \quad \sqrt{z \bar{z}} = |z|; \\ \text{arg}(z \cdot \bar{z}) &= \text{arg}z + \text{arg}\bar{z} = \text{arg}z - \text{arg}z = 0 \end{aligned}$$

3. De Moivre公式和复数的n次方根

设 $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, n 是正整数, 则

$$z^n = \rho^n (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \rho^n (\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

称为 De Moivre (棣莫弗) 公式 (学习指导中证 n 为有理数)。

利用这个公式, 复数的乘方运算可以施行。同时开 n 次方也易于导得。即满足方程

$$w^n = z, \quad z \neq 0.$$

的 w 称为 z 的 n 次方根, 记为 $\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}$ 。现设

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \quad w = r(\cos\phi + i\sin\phi)$$

于是:

$$r^n (\cos n\phi + i\sin n\phi) = \rho (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r^n = \rho, \quad n\phi = \theta + 2k\pi. \quad (k \text{ 是整数})$$

因为 r 与 ρ 都是正实数,

$$r = + \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}; \quad \phi = \frac{1}{n}(\theta + 2k\pi).$$

其中 $r = + \sqrt[n]{\rho}$ 是 ρ 的正实根。因之,

$$w_k = z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z} = + \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

(k 是整数)。这里的 k 尽管是任意的整数, 但所得到的 w 的值, 只有 n 个是互不相同的根。它们是

$$w_0 = + \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$$

$$w_1 = +\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{n} \right),$$

.....

$$w_{n-1} = +\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right).$$

它们的模都是 $+\sqrt[n]{\rho}$ 。即都位于以原点为中心，半径为 $+\sqrt[n]{\rho}$ 的圆周上。相邻两根的辐角的差都是 $\frac{2\pi}{n}$ 。因此，这 n 个根恰好把圆周分成 n 等分。它们是圆周的內接正 n 边形的顶点。

总之，当 $z \neq 0$ 时，它的 n 个 n 次方根为 $w_k = z_k, k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ 。

$$z_k = z^{\frac{1}{n}} = +\sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), k = 0, 1, 2,$$

$\dots, n-1$ 。

在特殊情形下，设 $\rho = 1$ ， $n = 8$ ，则 $z = 1$ 的 8 次方根，分布在以原点为中心半径为 1 的圆周上（图 1.4 是 8 个方根分布情况）。

例 1 设 $z = 1, n = 3$ ，则 z 的立方根为：

$$z_k = z^{\frac{1}{3}} = \cos \frac{2k\pi}{3} +$$

$$i \sin \frac{2k\pi}{3}, k = 0, 1, 2.$$

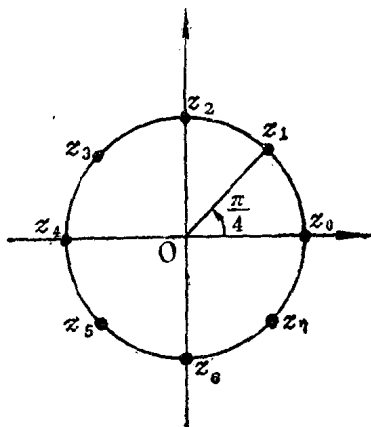


图 1.4

这三个方根是：

$$z_0 = 1, z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

它们同位于原点为中心，半径为 1 的圆周上，相邻两点的辐角相差 $\frac{2}{3}\pi$ 。它们是圆周的內接正三角形的顶点。

§ 1.3 扩充的复数平面

在全体复数里加添称为“无穷大”，记为 ∞ 的新元素，对应的是坐标平面添加了一点称为无穷远点，仍记为 ∞ 。这个平面称为扩充的复平面，记为 \widehat{S} ，即 $\widehat{S} = S \cup \{\infty\}$ 。我们把与有限复数相对应的点称为有限(远)点，即 S 上的点。

新元素“ ∞ ”参加运算，由下列关系来定义，即定义 $\infty = \frac{1}{0}$ ，于是

当

$$z \neq \infty \text{ 时, } z \pm \infty = \infty \pm z = \infty; z \neq 0 \text{ 时, } z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty,$$

$$\frac{z}{0} = \infty, \infty \cdot \infty = \infty. \text{ 当 } z \neq \infty \text{ 时, } \frac{z}{\infty} = 0, \frac{\infty}{z} = \infty. \text{ 但下列诸式无}$$

意义:

$$\infty \pm \infty, 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$$

我们曾把复数表示成平面的点或向量。有时也用其他几何方法来表示。球极平面射影变换是用球面上的点表示复数的又一几何方法。利用这种方法可以得出 \widehat{S} 的直观模型，及无穷远点的几何意义，球面上的 N 点(北极)是 ∞ 的射影。

现取欧氏空间的球面 Σ ，设其方程为：

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_3.$$

它的南极是 S 的原点， Σ 与 S 相切于原点(图 1.5)。

设 Σ 的中心为 $O(0, 0, \frac{1}{2})$ ，球的半径为 $\frac{1}{2}$ 。北极 N 的坐标设为

$N(0, 0, 1)$ 。连结 N 与平面 S_x 上的点 $z = x + iy$ 的直线过球面 Σ 上