复变函数论

丁11210/21版7.19 0174.5/15

序　　言

“复变函数论”这门课程的基础是数学分析.

根据国家的统一教学计划，这门课程是数学专业的基础课，也是必修课. 它研究的对象是解析函数——一种特殊的复变函数类，所以也称为**解析函数论**. 数学里专门研究函数的领域称为**分析**——它以变量间的依赖关系作为自己的对象. 单复变函数论（简称**函数论**）和数学分析（微积分）、微分方程、微分几何等，都是分析这个领域的重要组成部分，因此复变函数论亦称**复分析**. 它在初期是实变函数分析在复数域的推广，它的基本概念如函数、极限、连续、导数等等，在形式上与数学分析里的相应概念相类似. 在推广的过程中有所发展，到十九世纪中叶，逐步形成了数学里分析领域重要分枝.

这门课程，不但数学专业必读，其他如物理以及工科等各有关专业，都要程度不同地涉及其中的某些内容. 特别是复变函数论的理论和方法，在流体力学、空气动力学、弹性理论、电磁学等物理和工程技术各学科中，都有广泛的应用，并是解决有关问题的有力工具.

根据1980年教育部颁发的关于“复变函数论教学大纲”，其主要内容为复变函数的微商、积分、级数、留数理论、共形映射、解析开拓和黎曼曲面等. 这些内容基本上是围绕 L. Euler, A. L. Cauchy, 以及后来的P. G. L. Dirichlet, K. Weierstrass, G. F. B. Riemann 的工作，和解析函数的特征性质展开的. 这些内容尽管是较古但是又是最基本的理论和方法，这对于我们加深数学修养，增

强数学工作能力，显然是必须的；为学习后继课程，自学和钻研些有关问题，打下必要的基础。

本书除了一些必备的基础知识外，还适当地纳入了某些现代的内容，指出了某些新发展的方向，这对于巩固和加深基础知识，扩大眼界，了解发展趋势，培养能力是有益的。

本书中带*号的内容，如时间紧，可以省略或粗读。

书中第一章主要是基本概念，着重讨论了复数的性质和运算法则，以及复变函数的函数、极限和连续等概念。如果读者对数学分析有一定基础，本章可以粗读。第二至六章要求精读，这是本书的中心，它们反映了解析函数在相应条件下的特征，如满足C.—R.方程，可以用多项式逼近，沿闭路积分为零，展开成幂级数，留数定理，共形映射等，七、八、九三章可以作为一般的学习和要求。但也要了解其主要问题、思路和方法。

我们针对自学这个特点，较多地安排了一定数量的例题和习题，以及解答.我们认为例题和习题是帮助读者深刻理解概念、定理，论证和计算问题，获取思考方法等，必不可少的内容。因之要求读者，在读完章节之后，一定要阅读例题，选作习题（不要求全作），才能深入理解所学的知识和问题的本质。还要从实际出发，循序渐进，刻苦钻研。

编者

目　录

第一章　复数和复变函数

§1·1　复数概念

直到目前为止，所学过的数学课程的一切论证和运算，基本上是在实数范围内进行的．从本门课程起，将要迈出实数范围而进入复数领域．对于某些实数概念，尽管我们在数学分析中，已学习过，但必要时仍将引入或加以证明．这种重复还是需要的．

现今"集合论"的观点的"统治"地位，是现代数学特点之一．在数学课里包括中小学数学课，都业已渗透或应用集合论的观点、语言和记号．本书也将部分地应用．例如记号"$\in$"表"属于"，"$\overline{\in}$"或"$\notin$"表"不属于"，"$\subset$"表"包含于"，"$\cup$"、"$\cap$"表示两集合的"并"、"交"等等．其他符号将随时引进．我们认为读者对上述记号的意义已有所了解．因而就不赘述了．

数学里讨论的对象，如代数讨论的对象是"数"、"式"，几何里讨论的对象是"点"或"直线"等，都称为"元素"或简称为"元"．由有限多个元素或无穷多个元素所组成的集体，称**有限集合**或**无穷集合**．

本章讨论的对象主要是复数和复数集．什么是复数，什么是复数集，它们都有哪些性质．这是本章讨论的主要课题．另一个课题是讨论复变函数概念及其某些性质．讨论复变函数，特别是讨论一种特殊的复变函数类——解析函数类，则是全书的任务．本章只引入复变函数概念，函数的极限和连续性．

1. 复数及其被认识的历史梗概

我们把形如

$$z=x+iy$$

的数称为**复数** z. 其中 i 称为**虚数单位**,并规定 $i^2=i\cdot i=-1$, 或 $i=\sqrt{-1}$ (这里 $\sqrt{-1}$ 表示它可能取的两个值中的一个，普通取正值)；x 与 y 都是任意的实数. 依次称为 z 的**实部**(Real) 与**虚部**(Imaginary). 采用Weierstrass的符号，分别表示为

$$x=\operatorname{Re}z,\quad y=\operatorname{Im}z.$$

例如：复数 $\alpha=\sqrt{2}+i$, 则 $\sqrt{2}=\operatorname{Re}\alpha$, $1=\operatorname{Im}\alpha$;

$$\beta=\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{5}}{2}i,\quad 则\ \frac{4}{3}=\operatorname{Re}\beta,\quad -\frac{\sqrt{5}}{2}=\operatorname{Im}\beta.$$

历史梗概①

远在三世纪,人们能解数字系数的某些一元方程. 但对于 $x^2+1=0$ 却无办法. 原因是受实数范围的限制. 直到十六世纪中叶，意大利数学家Cardano（卡当）在解一元三次方程时得出方程:

$$x^3+px+q=0$$

的根为

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{R}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{R}},\quad R=\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}.$$

显然当 $R\geqslant 0$ 时，$\sqrt{R}$ 为实数，方程有解. 但当 $R<0$ 时，在实数范围内 $\sqrt{R}$ 无意义. 于是为突破实数范围的限制而引入虚数. 不但 $\sqrt{R}$ 有意义，方程 $x^2+1=0$ 有解，并且使数域扩大. 经过不少人的努力，使复数与平面上的点，与物理的向量联系起来，复数才在数学里巩固下来，从此数学也进入了新的阶段. 在十八世纪，Euler（欧拉）在他的公式:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$$

① 朱静航:《$\sqrt{-1}$ 是数学发展的必然产物》,《吉林师大学报》1974年,第1期.

中，首先引入记号i.

2. 复数的算术运算

设复数$z=x+iy$，称 $x-iy$ 为z的**共轭复数**．记为$\bar{z}=x-iy$.
把实数$\sqrt{x^2+y^2}$称为z的**绝对值或模**（$\sqrt{\ }$取正值）把$\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$称为 z **的辐角**.

关于两个复数$\alpha=a+bi$及$\beta=c+di$的四则运算和相等，用下列等式来定义：

$$\alpha\pm\beta=(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i,$$

$$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$

$$\alpha/\beta=(a+bi)/(c+di)=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,\quad \beta\neq 0.$$

当且仅当$a=c$，$b=d$时，$\alpha=\beta$，$a+bi=c+di$.

§ 1·2　复数的几何表示

1. 复数平面

法国数学家 Argand（阿刚）在全体复数和坐标平面上的点之间建立起一一对应关系．即令复数$z=x+iy$与坐标为(x,y)的点相对应，这个坐标平面称为复平面或称Argand平面，亦称 Gauss（高斯）平面，用S来表示，S_z表z平面.

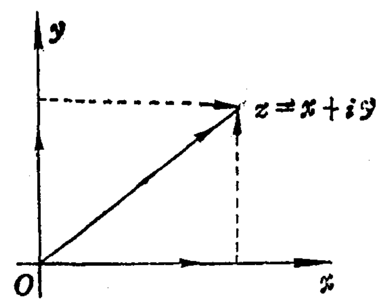

图 1·1

今后我们对于S的点和数就不加区别地使用.

复数 $z=x+yi$，或(x,y)也可以用S_z的一个自由向量$\overrightarrow{Oz}$来表示

（如图1·1）．它在轴上的射影为$\overrightarrow{Ox}$与$\overrightarrow{Oy}$，它们的和等于向量$\overrightarrow{Oz}$．下列不等式成立：

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant |z|,$$

$$-|z|\leqslant \mathrm{Im}z\leqslant |z|.$$

把复数看成是两个向量之和，也符合两个向量的加法运算．这个和就是平行四边形的对角线$\overrightarrow{Oz}$．

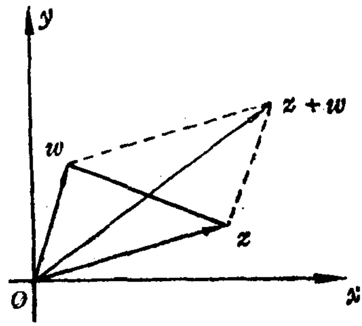

图 1·2

对于两个向量z与$w\in S_z$，差数模

$$|z-w|$$

就是z与w两点之间的距离．（图1·2）

下列不等式，显然成立

$$|z-w|\geqslant |z|-|w|;\quad |z+w|\leqslant |z|+|w|.$$

其中只有当z与w共线且同方向时，等号才成立．

把复数z表示成向量，更可以增加复数的实际意义．例如，河流的水流，设在每一点(x, y)的速度为V，可以写成复数形式为：

$$V=V_x+iV_y$$

其中V_x与V_y是V的分速度．速度V是分速度之和．

2．复数的极坐标形式

应用直角坐标(x, y)与极坐标(ρ, θ)之间的对应关系：

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta$$

则
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\qquad \theta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{y}{x}.$$

$z=x+iy$与$\bar{z}=x-iy$可以分别表示成极坐标的形式：

$$z=x+iy=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta).$$

应用Euler公式，则得z的指数表示式：

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)=\rho e^{i\theta},\quad \bar{z}=\rho(\cos\theta-i\sin\theta)=\rho e^{-i\theta}.$$

其中：$\rho=|z|=|\bar{z}|=\sqrt{x^2+y^2}$是$z$的模．$\theta$与$(-\theta)$分别称为$z$与$\bar{z}$的

辐角．并分别记为Arg$z$和Arg$\bar{z}$．（Arg是Argument的缩写）．

设ϕ是z的辐角，则$\phi+2k\pi$(k为整数）仍是z的辐角．故Arg$z=\phi+2k\pi$是多值的．我们规定Arg$z$的位于$(-\pi,\ \pi]$的值称为**Arg$z$的主值**，记为arg$z$．即$-\pi<\arg z\leqslant\pi$（或$0\leqslant\arg z<2\pi$）．于是，

$$\operatorname{Arg}z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots.$$

显然，互为共轭的复数z与$\bar{z}$，具有相同的模，辐角的主值相差一个符号．即

$$\arg\bar{z}=-\arg z.$$

它们的几何位置，对于实轴为对称．而且

$$\sqrt{z\bar{z}}=|z|.$$

当z为正实轴上的点，z为正实数，则$\arg z=0$；当z为负实轴上的点，z为负实数，则$\arg z=\pi$；当$z=0$时，其辐角失去意义，即$z=0$是唯一辐角未定义的复数．

应用复数的指数形式（或极坐标形式），则

$$z_1\cdot z_2=\rho_1e^{i\theta_1}\cdot\rho_2e^{i\theta_2}=\rho_1\rho_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\ (\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]=\rho_1\rho_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

$$z_1/z_2=\rho_1e^{i\theta_1}/\rho_2e^{i\theta_2}=\frac{\rho_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)]=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}.$$

这就是说：

$$|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|},$$

$$\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2)=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2,\quad \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg}z_1-\operatorname{Arg}z_2.$$

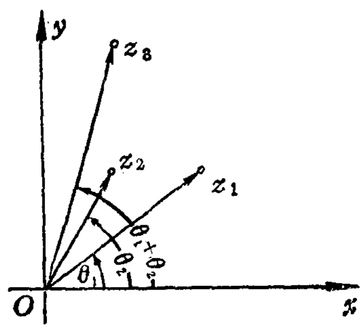

图 1·3

这里应理解为：等式两端所

代表的是同样的一组值．因为Arg$z$是多值函数．（图1·3）所表现的是主值arg$z$.

显然，$|z\cdot\bar{z}|=|z||\bar{z}|=|z|^2$；$\sqrt{z\bar{z}}=|z|$；

$$\arg(z\cdot\bar{z})=\arg z+\arg\bar{z}=\arg z-\arg z=0$$

3．De Moivre公式和复数的n次方根

设$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$，$n$是正整数，则

$$z^n=\rho^n(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

称为**De Moivre（棣莫弗）公式**（学习指导中证n为有理数）．

利用这个公式，复数的乘方运算可以施行．同时开n次方也易于导得．即满足方程

$$w^n=z,\quad z\neq 0.$$

的w称为z的n次方根，记为$\sqrt[n]{z}=z^{\frac{1}{n}}$．现设

$$z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta),\quad w=r(\cos\phi+i\sin\phi)$$

于是：

$$r^n(\cos n\phi+i\sin n\phi)=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$$r^n=\rho,\quad n\phi=\theta+2k\pi.\ （k是整数）$$

因为r与ρ都是正实数，

$$r=+\sqrt[n]{\rho}=\rho^{\frac{1}{n}};\quad \phi=\frac{1}{n}(\theta+2k\pi).$$

其中$r=+\sqrt[n]{\rho}$是ρ的正实根．因之，

$$w_k=z^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{z}=+\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

（k是整数）．这里的k尽管是任意的整数，但所得到的w的值，只有n个是互不相同的根．它们是

$$w_0=+\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right),$$

$$w_1 = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right),$$

························

$$w_{n-1} = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

它们的模都是$+\sqrt[n]{\rho}$。即都位于以原点为中心，半径为$+\sqrt[n]{\rho}$的圆周上．相邻两根的辐角的差都是$\frac{2\pi}{n}$. 因此，这n个根恰好把圆周分成n等分．它们是圆周的内接正n边形的顶点．

总之，当$z\neq0$时，它的n个n次方根为$w_k = z_k$, $k=0,\ 1,\ 2,\cdots n-1$。

$$z_k = z^{\frac{1}{n}} = +\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right),\quad k=0,\ 1,\ 2,$$

$\cdots$, $n-1$。

在特殊情形下，设$\rho=1$, $n=8$, 则 $z=1$ 的 8 次方根，分布在以原点为中心半径为 1 的圆周上（图 1·4 是 8 个方根分布情况）．

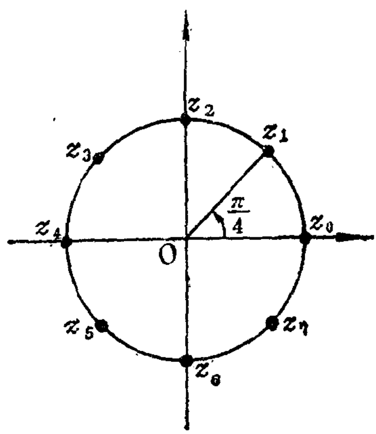

图1·4

例 1 设$z=1$, $n=3$, 则z的立方根为：

$$z_k = z^{\frac{1}{3}} = \cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3},\ k=0,1,2.$$

这三个方根是：

$$z_1 = 1,\ z_2 = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z_3 = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

它们同位于原点为中心，半径为 1 的圆周上，相邻两点的辐角相差 $\frac{2}{3}\pi$。它们是圆周的内接正三角形的顶点。

§ 1·3 扩充的复数平面

在全体复数里加添称为"无穷大"，记为∞的新元素，对应的是坐标平面添加了一点称为**无穷远点**，仍记为∞。这个平面称为**扩充的复平面**，记为$\hat{S}$，即$\hat{S}=S\cup\{\infty\}$。我们把与有限复数相对应的点称为有限(远)点，即S上的点。

新元素"∞"参加运算，由下列关系来定义，即定义$\infty=\frac{1}{0}$，于是当

$z\neq\infty$时，$z\pm\infty=\infty\pm z=\infty$；$z\neq 0$时，$z\cdot\infty=\infty\cdot z=\infty$，$\frac{z}{0}=\infty$，$\infty\cdot\infty=\infty$。当$z\neq\infty$时，$\frac{z}{\infty}=0$，$\frac{\infty}{z}=\infty$。但下列诸式无意义：

$$\infty\pm\infty,\quad 0\cdot\infty,\quad \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0}$$

我们曾把复数表示成平面的点或向量。有时也用其他几何方法来表示。球极平面射影变换是用球面上的点表示复数的又一几何方法。利用这种方法可以得出$\hat{S}$的直观模型，及无穷远点的几何意义，球面上的N点（北极）是∞的射影。

现取欧氏空间的球面Σ，设其方程为：

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_3.$$

它的南极是S的原点，Σ与S相切于原点（图1·5）。

设Σ的中心为$O\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，球的半径为$\frac{1}{2}$。北极$N$的坐标设为$N(0,\ 0,\ 1)$。连结$N$与平面$S_z$上的点$z=x+iy$的直线过球面$\Sigma$上