科學圖書大庫

# 泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者 楊 維 哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會
監修人　徐銘信　發行人　王洪鎧

# 科學圖書大庫



中華民國六十八年三月二十七日三版

# 泛函分析導論
## (Hilbert 空間的算子)

基本定價　4.40

編著者　楊維哲　國立台灣大學數學系教授



(67)局版臺業字第1810號

出版者　財團法人臺北市徐氏基金會　臺北市郵政信箱53-2號　電話7813686 7815250號
發行者　財團法人臺北市徐氏基金會　郵政劃撥賬戶第１５７９５號
承印者　大興圖書印製有限公司三重市三和路四段一五一號　電話9719739

本書敬獻給

施 拱 星　教授
永田雅宜　教授

楊 維 哲

# 目 錄

# 第一部分 Hilbert空間及算子的意義

## 第一章 H ilbert 空間的意義

### §1. Hilbert 空間的定義

**線性空間（或向量空間）** 以複數體（或實數體）作係數域的加法群$\boldsymbol{H}$就叫做線性空間或向量空間（linear space or victor space）。說得明白些，一個線性空間$\boldsymbol{H}$就是這樣的一個不空集，可以定義“加法”及“**係數乘法**”：

若 $x, y \in \boldsymbol{H}$， 則 $x+y \in \boldsymbol{H}$， (1)

若 $x \in \boldsymbol{H}$，$\alpha$ 爲複數（或實數）則 $\alpha \cdot x \in \boldsymbol{H}$； (2)

而這兩種運算必須滿足：

$V_1$ $x+y=y+x$； (3)

$V_2$ $(x+y)+z=x+(y+z)$； (4)

$V_3$ 對一切 $x, z$，必存在唯一的 $y$ 使 $x+y=z$； (5)

$V_4$ $1 \cdot x=x$； (6)

$V_5$ $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta) \cdot x$； (7)

$V_6$ $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$； (8)

$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$。 (9)

以上及以下，我們用希臘小字母 $\alpha$，$\beta$ 等表示“**數**”（scalar）（即複數體，或對應的實數體的元素），用羅馬小字母 $x$，$y$，$z$ 等表示“**向量**”亦即“矢”（vector）（即$\boldsymbol{H}$的元素）。必須注意：—(5)中的 $y$ 由 $x$，$z$ 唯一地定出，我們寫做 $y \equiv z-x$，而 $O_x \equiv x-x$ 和 $x$ 是無關的。它有：$y+O_x=y$，對一切 $y$ 都成立，而且 $0 \cdot y=O_x$，$(-1)y=O_x-y$，等等。這是很容易證明的。由於這個緣故，我們把向量$O_x$寫做$O$，把 $(-1)y$ 寫做 $-y$，不致於引起混淆。

**內積** 如果：對於$\boldsymbol{H}$的任何兩元 $x$，$y$ 所做成的有序的一對 $(x, y)$，

能夠定出一個複數，寫做$<x\,|\,y>$，而且又滿足下述的條件；那麼：這個$<\,|\,>$就叫做$\boldsymbol{H}$上的一個內積或**單直積**（inner-product or unitary product）。——條件是：

| | | |
|---|---|---|
| U.1. | $<x\,|\,x>\geqslant 0$，且$=0$，只當$x=0$時； | (10) |
| U.2. | $<x\,|\,y>^{*}=<y\,|\,x>$；（**Hermite 對稱性**）； | (11) |
| U.3. | $<x\,|\,y_1+y_2>=<x\,|\,y_1>+<x\,|\,y_2>$； | (12) |
| | $<x\,|\,\alpha y>=\alpha<x\,|\,y>$。 | (13) |

［即$<x\,|\,y>$對$y$是綫性的（linear）。］這樣一來，

$$<x_1+x_2\,|\,y>=<x_1\,|\,y>+<x_2\,|\,y>;$$

而且 $$<\alpha x\,|\,y>=\alpha^{*}<x\,|\,y>。$$

注意：$\alpha^{*}$表$\alpha$的共軛複數。

以下我們取定一個內積於$\boldsymbol{H}$，而叫$\boldsymbol{H}$是**單直空間或有內積空間**（inner product space or unitary space）。

**模** $\|x\|\equiv\sqrt{<x\,|\,x>}$ 叫$x$的**模**（Norm）。 (14)

**定理 1** $\|x\|\geqslant 0$，且$=0$，當且只當$x=0$時； (15)

$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$；（**三角不等式**）； (16)

$\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$； (17)

$|<x\,|\,y>|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|$，（**Schwarz 不等式**）； (18)

等號只在：「$x$，$y$中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

**證明** (15) 是直接由 (10) 得來，(17) 是簡單的計算，(18) 如下來證。不論$\lambda$是什麼樣的實數

$$\|x+\lambda<y\,|\,x>y\|^2\geqslant 0,$$

即 $$<(x+\lambda<y\,|\,x>y)\,|\,(x+\lambda<y\,|\,x>y)>\geqslant 0,$$

即 $$\|x\|^2+2\lambda\,|<x\,|\,y>|^2+\lambda^2|<y\,|\,x>|^2\|y\|^2\geqslant 0,$$

故判別式 $$|<x\,|\,y>|^4-\|x\|^2\|y\|^2|<y\,|\,x>|^2\leqslant 0,$$

即，若 $<x\,|\,y>\neq 0$，則 $|<x\,|\,y>|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2$。

此即 Schwarz 不等式；若$<x\,|\,y>=0$，Schwarz 不等式是當然成立的。在 (18) 成爲等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是$|<x\,|\,y>|=\|x\|\cdot\|y\|=0$的情形，此時或者$x=0$或是$y=0$，

即其一爲它一的零倍；另一個是 $|<x|y>|=\|x\|\cdot\|y\|\neq 0$ 的情形，那麼，如上所述，$\lambda$ 底二次式 $\|x+\lambda<y|x>y\|^2$ 的判別式爲0，一定有某一 $\lambda$ 值存在，使 $\|x+\lambda<y|x>\|^2=0$，即 $x=-\lambda<y|x>y$，而 $x$ 爲 $y$ 的常數倍。

現在轉到（16），那就很簡單：

$$\|x+y\|^2=<x+y|x+y>=\|x\|^2+<x|y>+<y|x>+\|y\|^2$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2 \qquad \#$$

**距離** 在$\boldsymbol{H}$中，若令

$$d(x,y)\equiv\|x-y\| \tag{19}$$

作 $x,y$ 間的距離（distance）那麼它滿足所謂**距離公理**（metric axioms）：

$$M_1 \quad d(x,y)\geqslant 0,=0, \text{當且只當 } x=y; \tag{20}$$
$$M_2 \quad d(x,y)=d(y,x); \tag{21}$$
$$M_3 \quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z) \text{（三角不等式）。} \tag{22}$$

於是有內積的空間$\boldsymbol{H}$就成爲一個**有距空間**（metric space）。以有距空間的眼光來看$\boldsymbol{H}$，我們又常把向量 $x$ 叫做點 $x$。

**收斂與完備** 距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當 $\lim d(x_n,x)=0$ $(n\to\infty)$ 時，我們說點列 $(x_n)$ **收斂到**（converges to）點 $x$，$x$ 稱爲 $(x_n)$ 的**極限**（limit），而用 $\lim x_n=x$ $(n\to\infty)$ 或 $x_n\to x$ 來表示。當 $x_n\to x$ 時，由於 $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$，所以 $\lim\|x_n-x_m\|=0$ $(n,m\to\infty)$，換句話說"收斂點列 $(x_n)$，必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n,x_m)=0 \quad (n,m\to\infty)\text{"} \tag{23}$$

這句話的逆倒不必是眞的。但如果它是成立的，即是："當 $(x_n)$ 是 Cauchy 點列時，必定存在一個點 $x$，使 $x_n\to x$"，那麼$\boldsymbol{H}$就叫做 **Hilbert空間**，[剛剛的這條件，是**完備性**（Completeness）條件。一個完備的內積空間，就是個 Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準Hilbert空間**。完備性的欠缺，是可以用一種"**完備化**"的步驟來補救以後（§6）就會談到]。[又，必須注意，在有內積空間（其實是：在有距空間）收斂點列 $(x_n)$ 的極限都是唯一的：

若 $x_n \to x$，且 $x_n \to y$，則 $x = y$，這是由三角不等式得來的。]

**定理 2** 內積 $\langle x \mid y \rangle$ 是 $x, y$ 的連續函數，即是說：若 $x_n \to x$ 且 $y_n \to y$，則 $\langle x_n \mid y_n \rangle \to \langle x \mid y \rangle$。

**系理** $x_n \to x$ 則 $\|x_n\| \to \|x\|$。(**模的連續性!**)

**證明** $\|x_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x\|$，故 $\|x_n\|$ **有界**（bounded），

且
$$\begin{aligned} \therefore\ & |\langle x \mid y \rangle - \langle x_n \mid y_n \rangle| \\ & = |\langle x - x_n \mid y \rangle + \langle x_n \mid y - y_n \rangle| \\ & \leqslant \|x - x_n\|\,\|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \to 0。 \end{aligned}$$
#

## § 2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$\boldsymbol{L_2(\alpha, \beta)}$ 設 $(\alpha, \beta)$ 是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有"定義在這區域上的複數值可測函數 $x(t)$，而 $|x|^2$ 爲可積分的"，這些函數的總集以 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 表示，要注意：這裏所說的"可積分"都是指 Lebesgue 式的可積。

這個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 自然地是個線性空間（參看下述定理一證明的首段）——如果我們對於"加法"與"係數乘法"是這樣定義的：

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t)。$$

其次我們定義兩個 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 中的元 $x, y$ 間的"**準內積**"（pseudo-unitary product）：爲 $\langle x \mid y \rangle = \int_\alpha^\beta x^*(t)\, y(t)\, dt$。這樣一來，"內積"的條件 §1，(10)－(13)中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數 $x$，則 $x \neq 0$，但 $\langle x \mid x \rangle = 0$，即 §1, 1 的 (10) 不成立。

爲了做出一個有內積的空間，我們通常把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 改造一下：把"幾幾乎到處相同"的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的元，分做一類一類，兩函數爲同類的條件是"幾幾乎到處相同"，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成功一個集，寫爲 $L_2(\alpha, \beta)$。$\boldsymbol{L_2(\alpha, \beta)}$ 的一元就是 $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$ 的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。$L_2(\alpha, \beta)$ 的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說：$L_2(\alpha, \beta)$ 是區間 $(\alpha, \beta)$ 上的平方可積的可測函數之全

體，[到此爲止，和$\mathfrak{L}_2(\alpha,\beta)$沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，（向量）。

**定理 1** $L_2(\alpha,\beta)$ 是個Hilbert 空間。

**證明** $x$ 及 $y$ 均屬於 $L_2(\alpha,\beta)$ 時，$x+y\in L_2(\alpha,\beta)$，這是由於

$$|\gamma+\delta|^2\leqslant 2(|\gamma|^2+|\delta|^2)。$$

又$<x\mid y>$的存在，由

$$2|\gamma\delta|\leqslant|\gamma|^2+|\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\|=\left(\int_\alpha^\beta|x(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設 $\lim\|x_n-x_m\|=0$，於是我們取出 $(x_n)$ 的一個適當的子列 $(x_{\underline{k}}: k=1,2,\cdots)$ 使得

$$\sum_k\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|<\infty,$$

於是我們令

$$y_m(t)\equiv|x_{\underline{1}}(t)|+\sum_{k=1}^{m-1}|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}(t)|,$$

那麼 $y_m\in L_2(\alpha,\beta)$，而且對於幾幾乎一切 $t$，在$m\to\infty$時，$\lim y_m(t)$ 存在且$<\infty$。利用Lebesgue-Fatou的定理，

$$\int_\alpha^\beta(\lim y_m(t)^2)dt\leqslant\lim\int_\alpha^\beta y_m(t)^2\,dt=\lim\|y_m\|^2$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\left(\|x_{\underline{1}}\|+\sum_{k=1}^{m-1}\|x_{\underline{k+1}}-x_{\underline{k}}\|\right)^2<\infty,$$

故 $$x_{\underline{m}}(t)=x_{\underline{1}}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}(x_{\underline{k+1}}(t)-x_{\underline{k}}(t)),$$

在$m\to\infty$時，對幾幾乎一切 $t$ 都收斂，並且極限函數 $x_\infty(t)\equiv\lim x_{\underline{m}}(t)$ 屬於 $L_2(\alpha,\beta)$ ($\because\|x_{\underline{m}}\|\leqslant\lim\|y_k\|$)。最後，這個 $x_\infty$ 不

但是 $x_{\underline{m}}$ “幾乎逐點收斂”的極限而且也是“模意味下的極限”：

$$\|x_\infty - x_{\underline{k}}\| = \lim_{m\to\infty}\|x_{\underline{m}} - x_{\underline{k}}\| \leqslant \sum_{i=k}^{\infty}\|x_{\underline{i+1}} - x_{\underline{i}}\| \longrightarrow 0 \ ,$$

當 $k\to\infty$時。

再利用不等式，我們可以把子列（$x_{m}$）的收斂（模意味的）改爲函數列（$x_n$）本身的收斂：

$$\lim_{m\to\infty}\|x_\infty - x_m\| \leqslant \lim\|x_\infty - x_{\underline{m}}\| + \lim\|x_{\underline{m}} - x_m\| = 0_{\circ} \qquad \#$$

**注意**：我們已在上面證出：$L_2(\alpha,\beta)$ 中的點列（$x_n$）若收斂,(這當然是指模意味下的收斂),那麼我們可找到一個子列（$x_{\underline{m}}$)使得它是“幾幾乎逐點地”收斂：$x_{\underline{m}}(t)\to x(t)$ （$k\to\infty$),對幾幾乎一切 $t$ 成立。

**補註一**：空間$\mathfrak{L}_2$ 是個**函數空間**（function space）∵元素都是函數，但空間 $L_2$ 則否！但通常不去區別$\mathfrak{L}_2$和$L_2$!!

**補註二**：$L_2(\alpha,\beta)$ 是區間 $(\alpha,\beta)$ 上一切平方可積（Lebesque 意味的可積）的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作爲相同，在我們的構建過程，$(\alpha,\beta)$ 區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間（$\Omega,\mu$）來代替區間（$\alpha,\beta$）也可以，卽是，令

$L_2(\Omega)$ 是一切$\Omega$上的複數値，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left.\begin{aligned} f(\omega)+g(\omega) &\equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f)\cdot(\omega) &= \alpha\cdot f(\omega), \end{aligned}\right\} \quad \omega\in\Omega,$$

$$\langle f\,|\,g\rangle \equiv \int f^*(\omega)\,g(\omega)\,\mu(d\omega),$$

並且，規定幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這 $L_2(\Omega)$ 確實是個Hilbert 空間。

並且，所有的Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，(見 §19 的注意)。

**例**：下面這個Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令$\Omega$是一切自然數之集$\boldsymbol{N}$，以元素**數目**（cardinal number)來做子集的測度，那麼 $L_2(\boldsymbol{N})$ 可以這樣來描寫：

$\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2<\infty$ 那樣的複數列 $x\equiv(\xi_n)$ 之全體是個Hilbert空間，但對 $x\equiv(\xi_n)$，$y\equiv(\eta_n)$，我們令

$$x+y\equiv(\xi_n+\eta_n),\quad \alpha x\equiv(\alpha\xi_n),\quad <x|y>\equiv\sum\xi_n^*\eta_n;$$

這個空間是**古典的 Hilbert 空間**。

## § 3.　Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設 $G$ 是Gauss平面的一個有欄開域，考慮 $G$ 上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G |f(z)|^2\,dxdy<\infty,\quad z\equiv x+iy$$

這樣的函數之全體我們以 $\underline{A_2(G)}$ 表示。

以　$(f+g)(z)=f(z)+g(z)$，$(\alpha f)(z)=\alpha f(z)$，

$$<f|g>\equiv\iint_G f^*(z)g(z)\,dxdy,\tag{1}$$

可定出個 Hilbert 空間。

**證明**：除了完備性之外，其餘的和 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形一樣。不過我們在這裏必須注意：$A_2(G)$ 確是個函數空間，即 $A_2(G)$ 的元是<u>一個函數</u>，而 $L_2(\alpha,\beta)$ 的元是<u>一類函數</u>。[ 幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！] 設 $(f_n)$ 是個Canchy 點列：$\|f_n-f_m\|\to0$（$n$，$m\to\infty$）於是仿照 $L_2(\alpha,\beta)$ 的情形，我們可以找到一個 $(f_n)$ 的子列 $(f_{\underline{m}})$，使得

$$\left\{\begin{array}{l}\text{在}G\text{的幾幾乎一切點上，}\lim f_{\underline{m}}(z)=f_\infty(z)\text{ 存在，}\\ \iint|f_\infty(z)|^2\,dxdy<\infty\text{。}\end{array}\right.\tag{2}$$

我們首先證明 $f_\infty$ 是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在 $G$ 的一點 $z_0$，總有個鄰區存在使得 $(f_{\underline{m}})$ 在這鄰區內均勻收斂到 $f_\infty$ 就好了。今設 $\{z:|z-z_0|<\gamma\}$ 全含於 $G$ 內，再取 $\gamma_0>0$，$\delta>0$，使 $\gamma_0+\delta<\gamma$，我們有：當 $|z-z_0|\leqslant\gamma_0$ 時，區域 $\{w:|w-z|\leqslant\delta\}\subset\{w:|w-z_0|<\gamma\}\subset G$，於是

$$
\begin{aligned}
&|f_m(z)-f_n(z)|^2 \\
&\leqslant \frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{|w-z|<\delta} |f_m(w)-f_n(w)|^2\,du\,dv \\
&\leqslant \frac{1}{\pi\delta^2}\iint_G |f_m(w)-f_n(w)|^2\,du\,dv \\
&= \frac{1}{\pi\delta^2}\|f_m-f_n\|^2 \to 0\ , \quad (m,\ n\to\infty); \qquad (3)
\end{aligned}
$$

即 $(f_m)$ 爲均匀收斂於 $|z-z_0|<\gamma_0$ 中。［上面用到了一個引理：若 $f$ 正則於開領域 $G$，而 $z\in G$，

$$\{w:|w-z|\leqslant\delta\}\subset G\text{，則 }|f(z)|^2\leqslant\frac{1}{\pi\delta^2}\iint_{|w-z|<\delta}|f(w)|^2du\,dv。 \qquad (4)$$

這個證明很簡單，把 $f$ 用 Taylor 展開於 $z$，

$$f(w)\equiv\sum_0^\infty a_n(w-z)^n\ , \qquad |w-z|<\delta_0(>\delta>0),$$

令 $w-z=\rho e^{i\theta}$, 則 $|f(w)|^2=\sum_{n,m}a_n a_m^*\rho^{n+m}e^{i(n-m)\theta}$

在 $|w-z|<\delta$ 內絕對均匀收斂，可以逐項積分，

$$
\begin{aligned}
\therefore \iint_{|w-z|<\delta}|f(w)^2|\,du\,dv &= \int_0^\delta\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}|f(w)|^2\,d\theta \\
&= \sum_0^\infty|a_n|^2\frac{1}{2n+2}\,\delta^{2n+2}\,2\pi\geqslant\pi\delta^2|f(z)|^2\ ,
\end{aligned}
$$

$(\because\ a_0\equiv f(z))$。 #

**注意：** 在 $A_2(G)$, 若 $f_n\to f$, 則在 $G$ 之任一緊緻子域（compact subregion）上, $f_n(z)\to f(z)$ 爲均匀收斂。

**證：** $|f_n(z)-f(z)|^2 \leqslant \dfrac{1}{\pi\delta^2}\displaystyle\iint_{|w-z|<\delta} |f_n(w)-f(w)|^2\,du\,dv$,

$(w \equiv u+iv)$, 故也。

# 第二章　Hilbert空間的推廣

## §4.　線性算子，連續性

**子空間**　線性空間$\boldsymbol{H}$的一個子集$\boldsymbol{K}$，若有：「$x, y \in \boldsymbol{K}$時，必$\alpha x + \beta y \in \boldsymbol{K}$，不論$\alpha, \beta$是什麼樣的數」，那麼$\boldsymbol{K}$是線性空間$\boldsymbol{H}$的**子**[**線性**]**空間**（subspace）。——$\boldsymbol{K}$本身也是個線性空間。

如果$\boldsymbol{H}$還是單直空間，那麼$\boldsymbol{H}$底線性子空間$\boldsymbol{K}$也自然是個單直空間，叫$\boldsymbol{H}$的子[單直]空間，如果$\boldsymbol{H}$是 Hilbert 空間，則$\boldsymbol{H}$底子綫性空間$\boldsymbol{K}$自然地擁有內積的構造，但不必完備！而$\boldsymbol{K}$能爲 Hilbert 空間的充要條件是：$\boldsymbol{K}$是閉的。即「$x_n \to x$，$x_n \in \boldsymbol{K}$，$(x \in \boldsymbol{H})$，$\Rightarrow x \in \boldsymbol{K}$」。Hilbert 空間$\boldsymbol{H}$底閉的子空間叫做子Hilbert 空間。

**線性算子**　設$\boldsymbol{K}_1$，$\boldsymbol{H}_1$，$\boldsymbol{H}_2$是綫性空間，$\boldsymbol{K}_1$是$\boldsymbol{H}_1$的子空間，假如對$\boldsymbol{K}_1$的任一元$x$，我們對應地給出一個$\boldsymbol{H}_2$的元$Tx$，那麼我們就得到一個定義在$\boldsymbol{K}_1$上到$\boldsymbol{H}_2$的函數$T$了。當

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T x + \beta T y \qquad (1)$$

對一切數$\alpha, \beta$，及向量$x, y \in \boldsymbol{K}_1$均成立時，$T$叫$\boldsymbol{K}_1$上到$\boldsymbol{H}_2$內的[線性]算子。（linear operator），爲了$\boldsymbol{K}_1 \subset \boldsymbol{H}_1$，我們說$T$是從$\boldsymbol{H}_1$內到$\boldsymbol{H}_2$內的算子，$\boldsymbol{K}_1$是$T$的**定義域**$\boldsymbol{D}(T) = \boldsymbol{K}_1$，而$\boldsymbol{K}_2 \equiv \{Tx : x \in \boldsymbol{K}_1\}$叫做$T$的**像域**，以$\boldsymbol{W}(T)$表示之，$\boldsymbol{H}_2$則稱爲$T$的値域。$\boldsymbol{W}(T)$，由於$T$的線性，自然也是線性空間，[通常我們說$T$是從$\boldsymbol{H}_1$內到$\boldsymbol{W}(T)$上的算子。這種“上”（on）和“內”（in）的用法，很明確有用。]

**注意**：若(1)式代以$T(\alpha x + \beta y) = \alpha^* T x + \beta^* T y$，則$T$是**共軛線性**。

**汎函**　特別當値域是複數體時，算子叫[**線性**]**汎函**（linear functional）。

**連續性**　合乎下列條件的算子$T$叫連續的（continuous）。當$x_n$，$x_0$ $(T)$，