

科學圖書大庫

# 泛函分析導論

(Hilbert空間的算子)

編著者 楊維哲

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫

版權所有

不許翻印

中華民國六十八年三月二十七日三版

## 泛函分析導論

(Hilbert 空間的算子)

基本定價 4.40

編著者 楊維哲 國立台灣大學數學系教授

本書如發現裝訂錯誤或缺頁情形時，敬請「刷掛」寄回調換。謝謝惠顧。

(67)局版臺業字第1810號

出版者 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話 7813686號  
7815250號

發行者 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

本書敬獻給

施 拱 星 教授  
永田雅宜 教授

楊 維 哲

# 目 錄

## 第一部份 Hilbert空間 及算子的意義

### 第一章 Hilbert空間的意義

- § 1 Hilbert 空間的定義…………… 1
- § 2 Hilbert 空間的例子  $L_2(\alpha, \beta)$  … 4
- § 3 Hilbert 空間的例子  $A_2(G)$  …… 7

### 第二章 Hilbert空間的推廣

- § 4 線性算子、連續性 10
- § 5 Banach 空間 …… 13
- § 6 單直空間的完備化 16
- § 7 準單直空間 …… 19

### 第三章 射 影

- § 8 直交補空間…………… 22
- § 9 射影分解…………… 24
- § 10 射影算子間的關係 27

### 第四章 直和及無序和

- § 11 Hilbert 空間的直和…………… 31
- § 12 無序和…………… 34
- § 13 無限個 Hilbert 空間的直和 …… 37

### 第五章 Riesz定理及應用

- § 14 Riesz 定理(又叫 Fréchet-Riesz 定理) …… 42
- § 15 Lebesgue-Nikodym 定理的證明…………… 47
- § 16 再生核…………… 51
- § 17 Bergmann 的核函數…………… 56

### 第六章 單直基

- § 18 單直基的意義· Gram-Schmidt 操作…………… 60
- § 19 Fourier 展開…………… 62
- § 20 維數…………… 65
- § 21 核函數再生核之具體表現—單直基之應用…………… 68

## 第七章 收斂及算子

- § 22 Gelfand 定理及共鳴定理…………… 72
- § 23 強收斂和弱收斂… 74
- § 24 算子的均勻收斂和收斂…………… 76

## 第八章 閉性與同伴

- § 25 同伴算子…………… 79
- § 26 閉算子…………… 80
- § 27 對稱性和自伴性… 83

## 第九章 測度與積分的複習

- § 28 備忘：積分論的一些事實…………… 88
- § 29 備忘：測度的集合 95
- § 30 Helly 的選出定理 98
- § 31 Herglotz 定理…101

## 第十章 矢值及算子值測度

- § 32 射影值及直交矢值測度……………108
- § 33 一般算子值及矢值測度……………112
- § 34 一般積分的性質…119
- § 35 無欄函數之積分…124

## 第二部分 值譜分解

## 第十一章 值譜分解緒論

- § 36 長期平均(遍歷性)定理……………134

§ 37 Bochner 定理……………138

§ 38 Fourier 變換 ……142

§ 39 Fourier 變換的值譜分解……………145

§ 40 單直算子值譜分解 147

## 第十二章 值譜分解，自伴算子

§ 41 J. Von Neumann 的值譜分解定理…152

§ 42 固有值譜……………160

§ 43 例：乘法算子及算子  $q \cdot p$  之值譜分解 167

§ 44 完全連續算子……………171

§ 45 自伴性之判認……………175

§ 46 正定算子的性質…181

## 第十三章 正規算子的值譜分解

§ 47 密在閉算子的標準寫法……………189

§ 48 正規算子的值譜分解……………193

§ 49 Hilbert 空間的完全連續算子，Schmidt 算子……………200

§ 50 可跡算子……………203

## 第十四章 正規算子底正規函數

§ 51 算子的函數關聯與可換性……………209

- § 52 同時值譜分解定理 212  
 § 53 單純值譜算子…… 214  
 § 54 空間的直積分與正  
 規算子的表現…… 216

### 第十五章 Neumark 的理論

- § 55 閉對稱算子之缺陷 222  
 § 56 例：算子  $\frac{1}{i} \frac{d}{dt}$  … 225  
 § 57 Neumark 的延拓… 232  
 § 58 Neumark 定理：廣  
 義的單么分解…… 235

## 第三部分 應用及補充

### 第十六章 Hilbert 張量數

- § 59 張量積…… 239  
 § 60 對稱性、Grassmann  
 數…… 244

### 第十七章 吉田理論

- § 61 一參數半群 …… 251  
 § 62 半群底母算子…… 255  
 § 63 母算子底例…… 260  
 § 64 由母算子定半群及  
 母算子的刻劃…… 265  
 § 65 Trotter-Kato 的  
 加法公式…… 271

### 第十八章 一些機率分佈

- § 66 Bochner-Khinchin  
 定理 Stone 定理… 277  
 § 67 常態分佈…… 281

- § 68 Hermite 多項式… 283  
 § 69 調和振子…… 289  
 § 70 Poisson 變數的函  
 數：Charlier 變數 294

### 第十九章 過程論

- § 71 Hilbert 空間與仿  
 機率空間…… 298  
 § 72 直交矢值測度與仿  
 公平賭程…… 305  
 § 73 Wiener 過程…… 307  
 § 74 附錄 Lévy 過程… 311

### 第二十章 迴旋

- § 75 仿平穩過程…… 317  
 § 76 相關函數的意義… 320  
 § 77 對擬平穩過程的線  
 性運算(或稱濾過) 322  
 § 78 自迴歸敘列…… 327  
 § 79 ARMA 敘列…… 331  
 § 80 Wold 分解…… 332  
 § 81 預測…… 336  
 § 82 常態平穩過程…… 348  
 § 83 抽象的 Ito 積分… 352  
 § 84 多重 Wiener 積分… 357  
 § 85 仿平穩增量過程… 363  
 § 86 仿 Markov 過程及  
 Langevin 方程… 367

### 第二十一章 保測性和遍

#### 歷性

- § 87 保測變換…… 371  
 § 88 測度的可遷性和遍

歷性.....	373	§ 101 Sobolev 補題.....	427
§ 89 長期平均定理.....	376	§ 102 Gårding 不等式.....	431
§ 90 平穩定常過程的遍 歷性.....	378	§ 103 Friedrichs 定理.....	436
<b>第二十二章 在量子力學     的應用</b>		<b>第二十四章 Hilbert 空間     上的測度</b> ...	442
§ 91 Wigner 定理.....	381	§ 104 擬不變測度.....	442
§ 92 量子力學的公理化	384	§ 105 正定號連續函數.....	448
§ 93 Feynman 積分.....	389	§ 106 Kakutani 內積.....	455
§ 94 Hamilton 算子自 伴性的認定.....	394	§ 107 Gauss 測度.....	460
§ 95 正準交換關係.....	399	§ 108 再論 C. C. R. ...	467
§ 96 Fock 表現.....	406	<b>附 錄</b> .....	472
<b>第二十三章 荷佈空間</b> ...	411	§ 附 1 一個 Mini - 課 程的大綱.....	472
§ 97 核式列直空間, 極 限空間.....	411	§ 附 2 可換的重度論.....	479
§ 98 荷佈空間 $D, W_k$ 與 $H_k$ .....	414	§ 註解 譯詞及符號.....	488
§ 99 環體 $T^N$ 上的荷佈	418	書目和建議.....	490
§ 100 空間 $S$ .....	423	索引.....	493
		跋.....	494

# 第一部分 Hilbert 空間及 算子的意義

## 第一章 Hilbert 空間的意義

### § 1. Hilbert 空間的定義

**線性空間 (或向量空間)** 以複數體 (或實數體) 作係數域的加法群  $H$  就叫做**線性空間**或**向量空間** (linear space or vector space)。說得明白些, 一個線性空間  $H$  就是這樣的一個不空集, 可以定義“加法”及“係數乘法”:

$$\text{若 } x, y \in H, \text{ 則 } x + y \in H, \quad (1)$$

$$\text{若 } x \in H, \alpha \text{ 爲複數 (或實數) 則 } \alpha \cdot x \in H; \quad (2)$$

而這兩種運算必須滿足:

$$V_1 \quad x + y = y + x; \quad (3)$$

$$V_2 \quad (x + y) + z = x + (y + z); \quad (4)$$

$$V_3 \quad \text{對一切 } x, z, \text{ 必存在唯一的 } y \text{ 使 } x + y = z; \quad (5)$$

$$V_4 \quad 1 \cdot x = x; \quad (6)$$

$$V_5 \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x; \quad (7)$$

$$V_6 \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y; \quad (8)$$

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x. \quad (9)$$

以上及以下, 我們用希臘小字母  $\alpha, \beta$  等表示“數” (scalar) (即複數體, 或對應的實數體的元素), 用羅馬小字母  $x, y, z$  等表示“向量”亦即“矢” (vector) (即  $H$  的元素)。必須注意: (5) 中的  $y$  由  $x, z$  唯一地定出, 我們寫做  $y \equiv z - x$ , 而  $O_x \equiv x - x$  和  $x$  是無關的。它有:  $y + O_x = y$ , 對一切  $y$  都成立, 而且  $0 \cdot y = O_x$ ,  $(-1)y = O_x - y$ , 等等。這是很容易證明的。由於這個緣故, 我們把向量  $O_x$  寫做  $O$ , 把  $(-1)y$  寫做  $-y$ , 不致於引起混淆。

**內積** 如果: 對於  $H$  的任何兩元  $x, y$  所做成的有序的一對  $(x, y)$ ,



能夠定出一個複數，寫做  $\langle x | y \rangle$ ，而且又滿足下述的條件；那麼：這個  $\langle | \rangle$  就叫做  $H$  上的一個內積或單直積 (inner-product or unitary product)。——條件是：

$$U.1. \quad \langle x | x \rangle \geq 0, \text{ 且 } = 0, \text{ 只當 } x = 0 \text{ 時}; \quad (10)$$

$$U.2. \quad \langle x | y \rangle^* = \langle y | x \rangle; \quad (\text{Hermite 對稱性}); \quad (11)$$

$$U.3. \quad \langle x | y_1 + y_2 \rangle = \langle x | y_1 \rangle + \langle x | y_2 \rangle; \quad (12)$$

$$\langle x | \alpha y \rangle = \alpha \langle x | y \rangle. \quad (13)$$

[即  $\langle x | y \rangle$  對  $y$  是線性的 (linear)。] 這樣一來，

$$\langle x_1 + x_2 | y \rangle = \langle x_1 | y \rangle + \langle x_2 | y \rangle;$$

$$\text{而且} \quad \langle \alpha x | y \rangle = \alpha^* \langle x | y \rangle.$$

注意： $\alpha^*$  表  $\alpha$  的共軛複數。

以下我們取定一個內積於  $H$ ，而叫  $H$  是單直空間或有內積空間 (inner product space or unitary space)。

**模**  $\|x\| \equiv \sqrt{\langle x | x \rangle}$  叫  $x$  的模 (Norm)。 (14)

**定理 1**  $\|x\| \geq 0$ , 且  $= 0$ , 當且只當  $x = 0$  時; (15)

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|; \quad (\text{三角不等式}); \quad (16)$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|; \quad (17)$$

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad (\text{Schwarz 不等式}); \quad (18)$$

等號只在：「 $x, y$  中的一個是另一個的常數倍」時才成立。

**證明** (15) 是直接由 (10) 得來，(17) 是簡單的計算，(18) 如下來證。不論  $\lambda$  是什麼樣的實數

$$\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 \geq 0,$$

$$\text{即} \quad \langle (x + \lambda \langle y | x \rangle y) | (x + \lambda \langle y | x \rangle y) \rangle \geq 0,$$

$$\text{即} \quad \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \lambda^2 \langle y | x \rangle^2 \|y\|^2 \geq 0,$$

$$\text{故判別式} \quad \langle x | y \rangle^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0,$$

$$\text{即若} \quad \langle x | y \rangle \neq 0, \text{ 則} \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

此即 Schwarz 不等式；若  $\langle x | y \rangle = 0$ ，Schwarz 不等式是當然成立的。在 (18) 成爲等式時，我們又可以分兩種情形來討論，一個是  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| = 0$  的情形，此時或者  $x = 0$  或是  $y = 0$ ，

即其一爲它一的零倍；另一個是  $|\langle x | y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \neq 0$  的情形，那麼，如上所述， $\lambda$  底二次式  $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2$  的判別式爲 0，必定有某一  $\lambda$  值存在，使  $\|x + \lambda \langle y | x \rangle y\|^2 = 0$ ，即  $x = -\lambda \langle y | x \rangle y$ ，而  $x$  爲  $y$  的常數倍。

現在轉到 (16)，那就很簡單：

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \quad \# \end{aligned}$$

**距離** 在  $H$  中，若令

$$d(x, y) \equiv \|x - y\| \quad (19)$$

作  $x, y$  間的距離 (distance) 那麼它滿足所謂距離公理 (metric axioms)：

$$M_1 \quad d(x, y) \geq 0, = 0, \text{ 當且只當 } x = y; \quad (20)$$

$$M_2 \quad d(x, y) = d(y, x); \quad (21)$$

$$M_3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{三角不等式}). \quad (22)$$

於是具有內積的空間  $H$  就成爲一個有距空間 (metric space)。以有距空間的眼光來看  $H$ ，我們又常把向量  $x$  叫做點  $x$ 。

**收斂與完備** 距離既然有意義，我們就可以談論收斂了：當  $\lim d(x_n, x) = 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 時，我們說點列  $(x_n)$  **收斂到** (converges to) 點  $x$ ， $x$  稱爲  $(x_n)$  的**極限** (limit)，而用  $\lim x_n = x$  ( $n \rightarrow \infty$ ) 或  $x_n \rightarrow x$  來表示。當  $x_n \rightarrow x$  時，由於  $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - x\| + \|x - x_m\|$ ，所以  $\lim \|x_n - x_m\| = 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ )，換句話說“收斂點列  $(x_n)$ ，必是 Cauchy 點列：

$$\lim d(x_n, x_m) = 0 \quad (n, m \rightarrow \infty) \quad (23)$$

這句話的逆倒不必是真的。但如果它是成立的，即是：“當  $(x_n)$  是 Cauchy 點列時，必定存在一個點  $x$ ，使  $x_n \rightarrow x$ ”，那麼  $H$  就叫做 **Hilbert 空間**，[ 剛剛的這條條件，是**完備性** (Completeness) 條件。一個完備的內積空間，就是個 Hilbert 空間，而一個有內積空間，不論它是不是完備，也就叫做一個**準 Hilbert 空間**。完備性的欠缺，是可以用一種“完備化”的步驟來補救以後 (§6) 就會談到 ]。[ 又，必須注意，在有內積空間 (其實是：在有距空間) 收斂點列  $(x_n)$  的極限都是唯一的：

若  $x_n \rightarrow x$ ，且  $x_n \rightarrow y$ ，則  $x = y$ ，這是由三角不等式得來的。]

**定理 2** 內積  $\langle x | y \rangle$  是  $x, y$  的連續函數，即是說：若  $x_n \rightarrow x$  且  $y_n \rightarrow y$ ，則  $\langle x_n | y_n \rangle \rightarrow \langle x | y \rangle$ 。

**系理**  $x_n \rightarrow x$  則  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$ 。(模的連續性！)

**證明**  $\|x_n\| \leq \|x_n - x\| + \|x\|$ ，故  $\|x_n\|$  有界 (bounded)，

$$\begin{aligned} \text{且 } \therefore |\langle x | y \rangle - \langle x_n | y_n \rangle| &= |\langle x - x_n | y \rangle + \langle x_n | y - y_n \rangle| \\ &\leq \|x - x_n\| \|y\| + \|x_n\| \cdot \|y - y_n\| \rightarrow 0. \quad \# \end{aligned}$$

## § 2. Hilbert 空間的例子 $L_2(\alpha, \beta)$

$L_2(\alpha, \beta)$  設  $(\alpha, \beta)$  是實數軸上的一個區間，有限或無限都好。我們考慮所有“定義在這區域上的複數值可測函數  $x(t)$ ，而  $|x|^2$  為可積分的”，這些函數的總集以  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  表示，要注意：這裏所說的“可積分”都是指 Lebesgue 式的可積。

這個  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  自然地是個線性空間(參看下述定理—證明的首段)——如果我們對於“加法”與“係數乘法”是這樣定義的：

$$(x + y)(t) = x(t) + y(t); \quad (\alpha \cdot x)(t) = \alpha \cdot x(t).$$

其次我們定義兩個  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  中的元  $x, y$  間的“準內積”(pseudo-unitary product)：為  $\langle x | y \rangle = \int_{\alpha}^{\beta} x^*(t) y(t) dt$ 。這樣一來，“內積”

的條件 §1, (10) — (13) 中，我們可以證明只有 (10) 不滿足——我們知道：可以拿一個幾乎到處取值 0，而又不全等於 0 的函數  $x$ ，則  $x \neq 0$ ，但  $\langle x | x \rangle = 0$ ，即 §1, 1 的 (10) 不成立。

為了做出一個有內積的空間，我們通常把  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  改造一下：把“幾幾乎到處相同”的兩個函數看做一個東西；換句話說，我們把  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  的元，分做一類一類，兩函數為同類的條件是“幾幾乎到處相同”，這樣的分類是行得通的，於是所有函數類的全體成一個集，寫為  $L_2(\alpha, \beta)$ 。

$L_2(\alpha, \beta)$  的一元就是  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  的一類函數，我們可以隨便拿出一個函數來代表這元。 $L_2(\alpha, \beta)$  的元與元之間的加法，內積，或者元與數相乘，這些運算都可以用它們的代表來操作，而且這些操作都和代表的取法無關。這樣，我們可以說： $L_2(\alpha, \beta)$  是區間  $(\alpha, \beta)$  上的平方可積的可測函數之全

體，[到此為止，和  $\mathfrak{L}_2(\alpha, \beta)$  沒區別]，但是，把幾幾乎到處相同的函數們視做同一個元，(向量)。

**定理 1**  $L_2(\alpha, \beta)$  是個 Hilbert 空間。

**證明**  $x$  及  $y$  均屬於  $L_2(\alpha, \beta)$  時， $x + y \in L_2(\alpha, \beta)$ ，這是由於

$$|\gamma + \delta|^2 \leq 2(|\gamma|^2 + |\delta|^2)。$$

又  $\langle x | y \rangle$  的存在，由

$$2|\gamma\delta| \leq |\gamma|^2 + |\delta|^2$$

就可以知道。現在只要證明對於模

$$\|x\| = \left( \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

底完備性就可以了。

設  $\lim \|x_n - x_m\| = 0$ ，於是我們取出  $(x_n)$  的一個適當的子列  $(x_k: k=1, 2, \dots)$  使得

$$\sum_k \|x_{k+1} - x_k\| < \infty,$$

於是我們令

$$y_m(t) \equiv |x_1(t)| + \sum_{k=1}^{m-1} |x_{k+1}(t) - x_k(t)|,$$

那麼  $y_m \in L_2(\alpha, \beta)$ ，而且對於幾幾乎一切  $t$ ，在  $m \rightarrow \infty$  時， $\lim y_m(t)$  存在且  $< \infty$ 。利用 Lebesgue-Fatou 的定理，

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (\lim y_m(t))^2 dt &\leq \lim \int_{\alpha}^{\beta} y_m(t)^2 dt = \lim \|y_m\|^2 \\ &\leq \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \|x_1\| + \sum_{k=1}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \right)^2 < \infty, \end{aligned}$$

$$\text{故 } \underline{x}_m(t) = x_1(t) + \sum_{k=1}^{m-1} (x_{k+1}(t) - x_k(t)),$$

在  $m \rightarrow \infty$  時，對幾幾乎一切  $t$  都收斂，並且極限函數  $x_{\infty}(t) \equiv \lim x_m(t)$  屬於  $L_2(\alpha, \beta)$  ( $\because \|x_m\| \leq \lim \|y_k\|$ )。最後，這個  $x_{\infty}$  不

但是  $x_m$  “幾乎逐點收斂”的極限而且也是“模意味下的極限”：

$$\|x_\infty - x_k\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x_m - x_k\| \leq \sum_{i=k}^{\infty} \|x_{i+1} - x_i\| \rightarrow 0,$$

當  $k \rightarrow \infty$  時。

再利用不等式，我們可以把子列  $(x_m)$  的收斂（模意味的）改爲函數列  $(x_n)$  本身的收斂：

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_\infty - x_m\| \leq \lim \|x_\infty - x_m\| + \lim \|x_m - x_m\| = 0. \quad \#$$

**注意：**我們已在上面證出： $L_2(\alpha, \beta)$  中的點列  $(x_n)$  若收斂，（這當然是指模意味下的收斂），那麼我們可找到一個子列  $(x_m)$  使得它是“幾幾乎逐點地”收斂： $x_m(t) \rightarrow x(t)$  ( $k \rightarrow \infty$ )，對幾幾乎一切  $t$  成立。

**補註一：**空間  $\mathcal{L}_2$  是個函數空間（function space）：元素都是函數，但空間  $L_2$  則否！但通常不去區別  $\mathcal{L}_2$  和  $L_2$ ！！

**補註二：** $L_2(\alpha, \beta)$  是區間  $(\alpha, \beta)$  上一切平方可積（Lebesgue 意味的可積）的可測函數之總集，但以幾幾乎到處相同的函數作爲相同，在我們的構建過程， $(\alpha, \beta)$  區間的性質，我們只用到測度的一面。事實上，隨便拿一個測度空間  $(\Omega, \mu)$  來代替區間  $(\alpha, \beta)$  也可以，即是，令

$L_2(\Omega)$  是一切  $\Omega$  上的複數值，平方可積的可測函數之集，而其運算是

$$\left. \begin{aligned} f(\omega) + g(\omega) &\equiv (f+g)(\omega), \\ (\alpha f) \cdot (\omega) &= \alpha \cdot f(\omega) \end{aligned} \right\} \omega \in \Omega,$$

$$\langle f | g \rangle \equiv \int f^*(\omega) g(\omega) \mu(d\omega),$$

並且，規定幾乎到處相同的函數看做相同。我們可以把定理 1 的證明完全重複地拿來用，證明這  $L_2(\Omega)$  確實是個 Hilbert 空間。

並且，所有的 Hilbert 空間都是這種型式的，我們可以這麼說，（見 § 19 的注意）。

**例：**下面這個 Hilbert 空間的例子，也是這種型式的：令  $\Omega$  是一切自然數之集  $\mathbf{N}$ ，以元素數目（cardinal number）來做子集的測度，那麼  $L_2(\mathbf{N})$  可以這樣來描寫：

$\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 < \infty$  那樣的複數到  $x \equiv (\xi_n)$  之全體是個 Hilbert 空間，但對  $x \equiv (\xi_n)$ ， $y \equiv (\eta_n)$ ，我們令

$$x + y \equiv (\xi_n + \eta_n), \quad \alpha x \equiv (\alpha \xi_n), \quad \langle x | y \rangle \equiv \sum \xi_n^* \eta_n;$$

這個空間是古典的 Hilbert 空間。

### § 3. Hilbert 空間的例子 $A_2(G)$

設  $G$  是 Gauss 平面的一個有欄開域，考慮  $G$  上的單值解析（正則）函數並且是平方可積的：

$$\iint_G |f(z)|^2 dx dy < \infty, \quad z \equiv x + iy$$

這樣的函數之全體我們以  $A_2(G)$  表示。

以  $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ ， $(\alpha f)(z) = \alpha f(z)$ ，

$$\langle f | g \rangle \equiv \iint_G f^*(z) g(z) dx dy, \quad (1)$$

可定出個 Hilbert 空間。

**證明：**除了完備性之外，其餘的和  $L_2(\alpha, \beta)$  的情形一樣。不過我們在這裏必須注意： $A_2(G)$  確是個函數空間，即  $A_2(G)$  的元是一個函數，而  $L_2(\alpha, \beta)$  的元是一類函數。[幾幾乎到處相同的解析函數，自然是同一個函數！] 設  $(f_n)$  是個 Cauchy 點列： $\|f_n - f_m\| \rightarrow 0$  ( $n, m \rightarrow \infty$ ) 於是仿照  $L_2(\alpha, \beta)$  的情形，我們可以找到一個  $(f_n)$  的子列  $(f_m)$  使得

$$\begin{cases} \text{在 } G \text{ 的幾幾乎一切點上，} \lim f_m(z) = f_\infty(z) \text{ 存在，} \\ \iint |f_\infty(z)|^2 dx dy < \infty. \end{cases} \quad (2)$$

我們首先證明  $f_\infty$  是個解析正則函數。爲了這個，我們只須證明在  $G$  的一點  $z_0$ ，總有個鄰區存在使得  $(f_m)$  在這鄰區內均勻收斂到  $f_\infty$  就好了。今設  $\{z : |z - z_0| < \gamma\}$  全含於  $G$  內，再取  $\gamma_0 > 0$ ， $\delta > 0$ ，使  $\gamma_0 + \delta < \gamma$ ，我們有：當  $|z - z_0| \leq \gamma_0$  時，區域  $\{w : |w - z| \leq \delta\} \subset \{w : |w - z_0| < \gamma\} \subset G$ ，於是

$$\begin{aligned}
& |f_m(z) - f_n(z)|^2 \\
& \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f_m(w) - f_n(w)|^2 d u d v \\
& \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_0 |f_m(w) - f_n(w)|^2 d u d v \\
& = \frac{1}{\pi \delta^2} \|f_m - f_n\|^2 \rightarrow 0, \quad (m, n \rightarrow \infty); \tag{3}
\end{aligned}$$

即  $(f_m)$  為均勻收斂於  $|z - z_0| < r_0$  中。〔上面用到了一個引理：若  $f$  正則於開領域  $G$ ，而  $z \in G$ ，

$$\{w : |w - z| \leq \delta\} \subset G, \text{ 則 } |f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f(w)|^2 d u d v. \tag{4}$$

這個證明很簡單，把  $f$  用 Taylor 展開於  $z$ ，

$$f(w) \equiv \sum_0^{\infty} a_n (w - z)^n, \quad |w - z| < \delta_0 (\delta_0 > 0),$$

$$\text{令 } w - z = \rho e^{i\theta}, \text{ 則 } |f(w)|^2 = \sum_{n,m} a_n a_m^* \rho^{n+m} e^{i(n-m)\theta}$$

在  $|w - z| < \delta$  內絕對均勻收斂，可以逐項積分，

$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{|w-z| < \delta} |f(w)|^2 d u d v &= \int_0^{\delta} \rho d \rho \int_0^{2\pi} |f(w)|^2 d \theta \\
&= \sum_0^{\infty} |a_n|^2 \frac{1}{2n+2} \delta^{2n+2} 2\pi \geq \pi \delta^2 |f(z)|^2, \\
& \quad (\because a_0 \equiv f(z)) \quad \#
\end{aligned}$$

**注意：**在  $A_2(G)$ ，若  $f_n \rightarrow f$ ，則在  $G$  之任一緊緻子域 (compact subregion) 上， $f_n(z) \rightarrow f(z)$  為均勻收斂。

$$\text{證： } |f_n(z) - f(z)|^2 \leq \frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|w-z| < \delta} |f_n(w) - f(w)|^2 du dv,$$

( $w \equiv u + iv$ ), 故也。



## 第二章 Hilbert 空間的推廣

### § 4. 線性算子，連續性

**子空間** 線性空間  $H$  的一個子集  $K$ ，若有：「 $x, y \in K$  時，必  $\alpha x + \beta y \in K$ ，不論  $\alpha, \beta$  是什麼樣的數」，那麼  $K$  是線性空間  $H$  的子 [ 線性 ] 空間 (subspace)。—— $K$  本身也是個線性空間。

如果  $H$  還是單直空間，那麼  $H$  底線性子空間  $K$  也自然是個單直空間，叫  $H$  的子 [ 單直 ] 空間，如果  $H$  是 Hilbert 空間，則  $H$  底子線性空間  $K$  自然地擁有內積的構造，但不必完備！而  $K$  能為 Hilbert 空間的充要條件是： $K$  是閉的。即「 $x_n \rightarrow x, x_n \in K, (x \in H), \Rightarrow x \in K$ 」。Hilbert 空間  $H$  底閉的子空間叫做子 Hilbert 空間。

**線性算子** 設  $K_1, H_1, H_2$  是線性空間， $K_1$  是  $H_1$  的子空間，假如對  $K_1$  的任一元  $x$ ，我們對應地給出一個  $H_2$  的元  $Tx$ ，那麼我們就得到一個定義在  $K_1$  上到  $H_2$  的函數  $T$  了。當

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty \quad (1)$$

對一切數  $\alpha, \beta$ ，及向量  $x, y \in K_1$  均成立時， $T$  叫  $K_1$  上到  $H_2$  內的 [ 線性 ] 算子。(linear operator)，為了  $K_1 \subset H_1$ ，我們說  $T$  是從  $H_1$  內到  $H_2$  內的算子， $K_1$  是  $T$  的定義域  $D(T) = K_1$ ，而  $K_2 \equiv \{Tx : x \in K_1\}$  叫做  $T$  的像域，以  $W(T)$  表示之， $H_2$  則稱為  $T$  的值域。 $W(T)$ ，由於  $T$  的線性，自然也是線性空間，[ 通常我們說  $T$  是從  $H_1$  內到  $W(T)$  上的算子。這種“上”(on)和“內”(in)的用法，很明確有用。]

**注意**：若(1)式代以  $T(\alpha x + \beta y) = \alpha^*Tx + \beta^*Ty$ ，則  $T$  是共軛線性。

**汎函** 特別當值域是複數體時，算子叫 [ 線性 ] 汎函 (linear functional)。

**連續性** 合乎下列條件的算子  $T$  叫連續的 (continuous)。當  $x_n, x_0$  (T)，