应用数学丛书

张量分析

黄克智　薛明德　陆明万

清华大学出版社

清 华 大 学

应 用 数 学 丛 书

第 3 卷

张 量 分 析

黄克智 薛明德 陆明万

清 华 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书是一本系统地阐述张量分析的专著，书中同时采用张量的抽象（实体）记法与分量记法。全书共分九章，内容包括矢量与张量的基本概念和代数运算，张量函数及其导数，曲线坐标张量分析和在力学中最常用的二阶张量的理论及其应用。各章附有习题，书末附有习题答案或提示。

本书可作为力学及有关专业本科生、研究生的教材，以及有关专业教师、科研及工程技术人员的参考书。

张量分析

黄克智　薛明德　陆明万

☆

清华大学出版社出版

北京　清华园

北京朝阳区关西庄印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

开本：850×1168 1/32　印张：$10\frac{3}{4}$　数字：276千字

1986年3月第一版　1986年3月第一次印刷

印数：0001～8000

书号：15235·146　定价：平装2.35元　精装3.50元

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书。丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等。限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处，诚恳希望广大读者批评指正。

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会

1983.4

目　录

引　言

自从爱因斯坦1915年发表广义相对论的著名论文以来，张量分析在理论物理中占有突出重要的地位。以后，张量分析在物理学发展中起了重要作用。同时，反过来，来自物理学（相对论，场论）的概念也促进了张量分析的发展。

近二十多年来连续介质力学的发展又重复着同一个历史。今天，不熟悉张量分析的人阅读连续介质力学的文献是很困难的，有时甚至是不可能的。张量分析与微分几何学一些分支已经渗透到连续介质力学中来。正如W. Flügge[8]所说，有了张量分析，连续介质力学就如鱼得水。

本书主要是为学习连续介质力学等作必要的准备，因此主要限于三维欧氏空间的讨论。在写作本书过程中主要参考书有：

（1）郭仲衡，非线性弹性理论，科学出版社，第一部份，1980，1—71页。

（2）A.Cemal Eringen, Treatise on Continuum Physics (in 3 volumes) Vol.1, Part I, Tensor Analysis, Academic Press, New York, 1972, 1—155.（有中译本）

（3）Л. И. Седов, Введение в Механику Сплошной Среды, гл. 1, Гос. Изд. Физ. -Мат. Лит., Москва, 1962, 13—91.

（4）D.C.Leigh, Nonlinear Continuum Mechanics, Chap. 2—5, McGraw-Hill, 1968.

（5）C.Truesdell, Handbuch der Physik, Bd. Ⅲ/3, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, B.

Tensor Functions, 1965, 20—35.

(6) C. Truesdell, A First Course in Rational Mechanics, Vol. 1. Appendix Ⅱ, 1977, 219—248.

(7) Lawrence E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, Appendix Ⅰ, Ⅱ, Prentice-Hall, Inc., 1969, 569—672.

(8) W. Flügge, Tensor Analysis and Continuum Mechanics, 1972, Springer-Verlag. (有中译本)

本书曾用作1981—83年清华大学研究生教材，虽曾数易其稿，但可能仍有错误，欢迎读者指正。姚振汉与顾璆琳同志曾参与第一稿的部分章节整理，在此对姚振汉同志表示感谢，对顾璆琳同志表示悼念。

第一章　矢量与张量

§1.1　关于矢量运算的公式

作为预备知识，本节给出若干矢量运算公式，其证明可在一般有关矢量运算的书中找到。

在笛卡儿坐标系x，y，z中，若设$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$分别为沿x，y，z轴的单位矢量，则任意矢量$\boldsymbol{P}$可以分解成这三个矢量的线性组合

$$\boldsymbol{P}=P_x\boldsymbol{i}+P_y\boldsymbol{j}+P_z\boldsymbol{k} \tag{1.1.1}$$

两个矢量$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的点积是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}&=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}=u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\\&=|\boldsymbol{u}|(\boldsymbol{v}\text{在}\boldsymbol{u}\text{上的投影})=|\boldsymbol{v}|(\boldsymbol{u}\text{在}\boldsymbol{v}\text{上的投影})\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

矢量的点积服从分配律

$$\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.1.3}$$

两个矢量$\boldsymbol{u}$与$\boldsymbol{v}$的叉积是

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\u_x&u_y&u_z\\v_x&v_y&v_z\end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

如果对换两个矢量的顺序，则叉积反号

$$\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} \tag{1.1.5a}$$

叉积也服从分配律

$$\boldsymbol{P}\times(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{u}+\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{v} \tag{1.1.5b}$$

三个矢量$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$的混合积是

$$[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}]=(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})$$

$$=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix} \tag{1.1.6a}$$

如果将三个矢量在混合积中的次序互换，应满足

$$[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}]=[\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u}]=[\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}]=-[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v}]$$
$$=-[\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u},\ \boldsymbol{w}]=-[\boldsymbol{w},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{u}] \tag{1.1.6b}$$

可以证明，混合积的物理意义是以$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$为三个棱边所组成的平行六面体的体积。

三个矢量$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$的二重叉积满足如下恒等式

$$\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w})\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{w} \tag{1.1.7}$$

由三个矢量$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$的两两点积所构成的行列式等于三个矢量所构成的体积的平方。即

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix}=[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}]^2 \tag{1.1.8}$$

上式可以这样证明：

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v} & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_xu_x+u_yu_y+u_zu_z & u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z & u_xw_x+u_yw_y+u_zw_z \\ v_xu_x+v_yu_y+v_zu_z & v_xv_x+v_yv_y+v_zv_z & v_xw_x+v_yw_y+v_zw_z \\ w_xu_x+w_yu_y+w_zu_z & w_xv_x+w_yv_y+w_zv_z & w_xw_x+w_yw_y+w_zw_z \end{vmatrix}$$

$$=\left|\begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}\begin{vmatrix} u_x & v_x & w_x \\ u_y & v_y & w_y \\ u_z & v_z & w_z \end{vmatrix}=[\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}]^2$$

用同样方法可以证明

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}' \\ \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{u}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{v}' & \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w}' \end{vmatrix} = [\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w}][\boldsymbol{u}',\ \boldsymbol{v}',\ \boldsymbol{w}'] \tag{1.1.9}$$

式中除$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{w}$外，$\boldsymbol{u}'$，$\boldsymbol{v}'$，$\boldsymbol{w}'$亦为三个任意矢量。

§1.2 斜角直线坐标系的基矢量，矢量的分量与点积

一、二维问题

考虑图1.1所示斜角直线坐标系x^1，x^2，两轴夹角为φ，若选沿x^1及x^2轴的参考矢量为$\boldsymbol{g}_1$及$\boldsymbol{g}_2$（它们可以不是单位矢量），则任意矢量$\boldsymbol{P}$可以用它沿x^1及x^2轴的分矢量$P^1\boldsymbol{g}_1$及$P^2\boldsymbol{g}_2$之和来表示，即

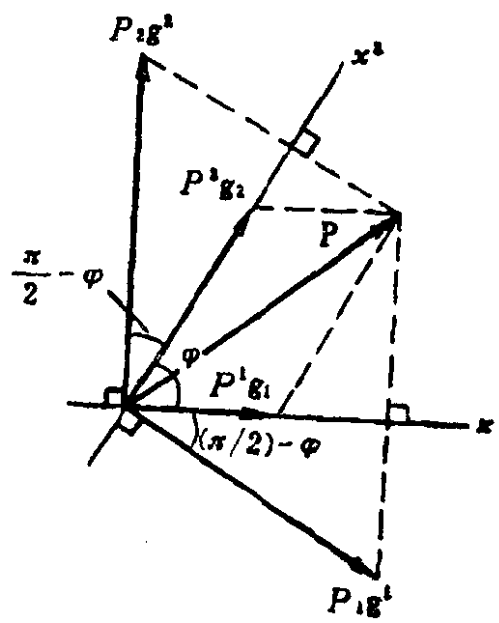

图 1.1

$$\boldsymbol{P} = P^1\boldsymbol{g}_1 + P^2\boldsymbol{g}_2 = \sum_{\alpha=1}^{2} P^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha = P^\alpha \boldsymbol{g}_\alpha \tag{1.2.1}$$

其中P^1及P^2称为矢量$\boldsymbol{P}$的分量。上式中最后的表达式省略了求和符号，即采用了**爱因斯坦求和约定**。其中α称为**哑指标**，它在同一项中，以一个上指标和一个下指标的形式共出现两次。在二维问题中，哑指标表示应对其取值范围$\alpha=1$，2求和。本书规定希腊字母指标（如α，β等）取值1与2，用于二维问题。而在三维问题中，则用拉丁字母指标（如i，j等），取值1，2与3。显然每一对哑指标的字母可以用另一对字母任意代换，即

$$\boldsymbol{P}=P^{\alpha}\boldsymbol{g}_{\alpha}=P^{\beta}\boldsymbol{g}_{\beta} \tag{1.2.1a}$$

因为哑指标无论采用什么字母，都同样表示对其取值范围求和。

在一定坐标系中，当参考矢量$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$选定后，用初等代数的方法可以求出任意矢量$\boldsymbol{P}$的分量P^1及P^2。若引入沿x^1及x^2轴的单位矢量$\boldsymbol{i}_1$及$\boldsymbol{i}_2$，则有

$$\boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_1=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_2=1,\quad \boldsymbol{i}_1\cdot\boldsymbol{i}_2=\boldsymbol{i}_2\cdot\boldsymbol{i}_1=\cos\varphi \tag{1.2.2a}$$

$$\boldsymbol{g}_1=|\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1,\qquad \boldsymbol{g}_2=|\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2 \tag{1.2.2b}$$

代入（1.2.1）式得

$$\boldsymbol{P}=P^1|\boldsymbol{g}_1|\boldsymbol{i}_1+P^2|\boldsymbol{g}_2|\boldsymbol{i}_2$$

上式分别点乘$\boldsymbol{i}_1$及$\boldsymbol{i}_2$，并应用（1.2.2a）式，得

$$\begin{aligned}P^1|\boldsymbol{g}_1|+P^2|\boldsymbol{g}_2|\cos\varphi&=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_1\\ P^1|\boldsymbol{g}_1|\cos\varphi+P^2|\boldsymbol{g}_2|&=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{i}_2\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

由此可联立解得P^1及P^2。这种解联立方程的方法运算起来并不方便，为此引入另一对与$\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$对偶的参考矢量$\boldsymbol{g}^1$及$\boldsymbol{g}^2$（一般也不是单位矢量，见图1.1），它们分别与$\boldsymbol{g}_2$及$\boldsymbol{g}_1$相垂直，即

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_2=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_1=0 \tag{1.2.4a}$$

并使

$$\boldsymbol{g}^1\cdot\boldsymbol{g}_1=\boldsymbol{g}^2\cdot\boldsymbol{g}_2=1 \tag{1.2.4b}$$

此式表示$\boldsymbol{g}^1$与$\boldsymbol{g}_1$及$\boldsymbol{g}^2$与$\boldsymbol{g}_2$的夹角均为锐角，且由图1.1知此夹角为$\frac{\pi}{2}-\varphi$（当φ为锐角）或$\varphi-\frac{\pi}{2}$（当φ为钝角），故

$$|\boldsymbol{g}^1|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_1|\sin\varphi}\qquad |\boldsymbol{g}^2|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_2|\sin\varphi} \tag{1.2.4c}$$

（1.2.4）诸式可统一写成对偶条件

$$\boldsymbol{g}^{\alpha}\cdot\boldsymbol{g}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{1.2.5}$$

其中δ^{α}_{β}称为Kronecker δ，其值为

$$\delta^{\alpha}_{\beta}=\begin{cases}1 & 当\alpha=\beta\\ 0 & 当\alpha\neq\beta\end{cases} \tag{1.2.6}$$

参考矢量$\boldsymbol{g}_{\beta}$称为**协变基矢量**，用下指标表示；参考矢量$\boldsymbol{g}^{\alpha}$称为

逆变基矢量，用上指标表示。由(1.2.5)式可以从协变基矢量唯一地确定逆变基矢量的大小与方向，或者反之。以后对于每个坐标系都将同时引入这两组互为对偶的基矢量。利用逆变基矢量极易求得矢量$\boldsymbol{P}$对协变基矢量分解的分量P^1，P^2，只需将(1.2.1)式分别点乘$\boldsymbol{g}^1$及$\boldsymbol{g}^2$，并应用(1.2.4)式便得

$$P^1 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^1 \qquad P^2 = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^2$$

或统一写成

$$P^\beta = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}^\beta \qquad (\beta = 1,\ 2) \tag{1.2.7}$$

P^β称为矢量$\boldsymbol{P}$的**逆变分量**，用上指标表示。(1.2.7)式中的β称为**自由指标**，自由指标在每项中只出现一次。在不同项中同一个自由指标应在同一个水平上，或者全是上指标，或者全是下指标。上述方程对自由指标的整个取值范围都将成立。例如上式对于二维问题β取1、2，就分别得到两个相应的式子。显然，方程中的自由指标可以换用其他字母(例如(1.2.7)式中β可换成α)。

矢量$\boldsymbol{P}$也可以用沿逆变基$\boldsymbol{g}^1$，$\boldsymbol{g}^2$分解的分矢量$P_1\boldsymbol{g}^1$及$P_2\boldsymbol{g}^2$之和来表示，即

$$\boldsymbol{P} = P_\alpha \boldsymbol{g}^\alpha \tag{1.2.8}$$

式中P_α称为矢量$\boldsymbol{P}$的**协变分量**，用下指标表示。为了确定P_α，将上式分别点乘$\boldsymbol{g}^\beta$并应用(1.2.5)式，得

$$P_\beta = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{g}_\beta \qquad (\beta = 1,\ 2) \tag{1.2.9}$$

根据(1.1.2)式，(1.2.7)及(1.2.9)式分别表示

$P^\beta = |\boldsymbol{g}^\beta|$与($\boldsymbol{P}$在$\boldsymbol{g}^\beta$方向上的投影)的乘积

$P_\beta = |\boldsymbol{g}_\beta|$与($\boldsymbol{P}$在$\boldsymbol{g}_\beta$方向上的投影)的乘积

$(\beta = 1,\ 2)$

由此可得(右端不对β取和)

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{P}\text{在}\boldsymbol{g}^\beta\text{方向上的投影} = P^\beta/|\boldsymbol{g}^\beta| \\ &\boldsymbol{P}\text{在}\boldsymbol{g}_\beta\text{方向上的投影} = P_\beta/|\boldsymbol{g}_\beta| \end{aligned}\right. \qquad (\beta = 1,\ 2)$$

综上所述，$\boldsymbol{g}_\alpha$及$\boldsymbol{g}^\alpha$分别称为协变及逆变基矢量，矢量$\boldsymbol{P}$沿

$\mathbf{g}_a$或$\mathbf{g}^a$分解的系数P^a及P_a分别称为矢量$\boldsymbol{P}$的逆变及协变分量，它们分别等于$\boldsymbol{P}$与$\mathbf{g}^a$及$\mathbf{g}_a$的点积。在表达式中出现的指标有自由指标与哑指标两类。自由指标在表达式的每一项中只出现一次。在不同项中，同一个自由指标应出现在同一个水平上。对自由指标取值范围内的每个可能取值，都对应着一个方程或表达式。哑指标在表达式的每项中总是出现两次，一次作为上指标，一次作为下指标，表示这一项应在该哑指标的整个取值范围内求和。在求和后的结果表达式中，哑指标将不再出现。

二、三维问题

1. 斜角直线坐标系，协变与逆变基矢量

设有一组斜角直线坐标系x^1，x^2，x^3，如图1.2。在不同点处由x^1坐标线（它是坐标值x^1变化而另两个坐标值x^2，x^3不变的点的集合）与x^2坐标线构成的$x^3=\text{const}$坐标面是一组互相平行的平面。同样还有两组$x^1=\text{const}$，$x^2=\text{const}$的坐标平面，三组坐标面是相互斜交的。

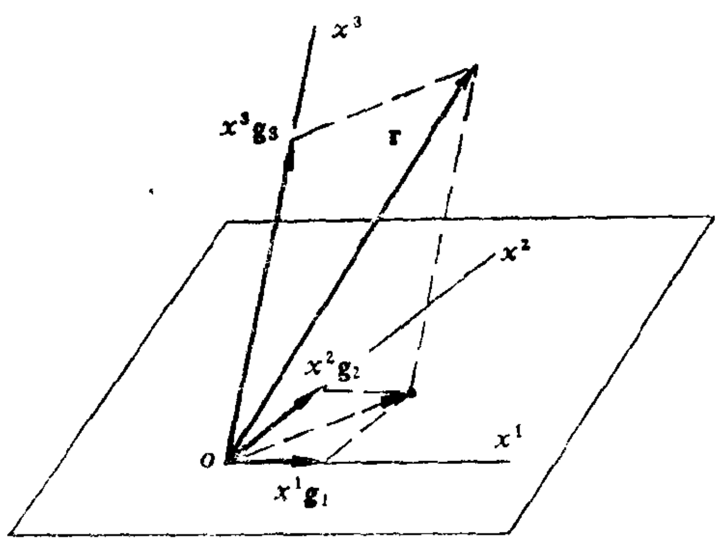

图1.2

自原点至任意点（x^1，x^2，x^3）的矢径$\boldsymbol{r}$是坐标x^1，x^2，x^3的函数

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(x^1,\ x^2,\ x^3) \tag{1.2.10}$$

对于直线坐标系，它与坐标成线性关系，故可以表示为

$$\boldsymbol{r}=x^1\boldsymbol{g}_1+x^2\boldsymbol{g}_2+x^3\boldsymbol{g}_3=x^i\boldsymbol{g}_i \tag{1.2.11}$$

此处采用了爱因斯坦求和约定，哑指标 $i=1,\ 2,\ 3$。上式中 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$ 分别是沿 x^1，x^2，x^3 轴方向的参考矢量，对于直线坐标系，它们的大小和方向都是不变的。由（1.2.11）式得

$$d\boldsymbol{r}=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i}dx^i=\boldsymbol{g}_i dx^i \tag{1.2.12}$$

故

$$\boldsymbol{g}_i=\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x^i} \tag{1.2.13}$$

通常把这种用矢径对坐标的偏导数定义的参考矢量称为**协变基矢量或自然基矢量**。它的方向沿坐标线切线、并指向坐标增加方向。在斜角直线坐标系中三个坐标轴并不共面，因而三个协变基矢量也不共面，利用（1.1.6a）式可知

$$[\boldsymbol{g}_1,\ \boldsymbol{g}_2,\ \boldsymbol{g}_3]=\boldsymbol{g}_1\cdot(\boldsymbol{g}_2\times\boldsymbol{g}_3)\neq 0 \tag{1.2.14}$$

即 $\boldsymbol{g}_1$，$\boldsymbol{g}_2$，$\boldsymbol{g}_3$ 是线性无关的。

与二维问题相类似，可以定义一组与协变基矢量 $\boldsymbol{g}_i$ 互为对偶的逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$，使 $\boldsymbol{g}^i$ 满足对偶条件

$$\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=\delta^i_j \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{1.2.15}$$

式中 δ^i_j 为Kronecker δ，其定义参考（1.2.6）式，但改为三维。逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 的方向垂直于另两个协变基矢量 $\boldsymbol{g}_j$（$j\neq i$），如图1.3所示，而其大小满足 $\boldsymbol{g}^i\cdot\boldsymbol{g}_j=1$（$j=i$）。若 $\boldsymbol{g}^i$ 与 $\boldsymbol{g}_i$ 夹角为 φ（φ 必为锐角），则

$$|\boldsymbol{g}^i|=\frac{1}{|\boldsymbol{g}_i|\cos\varphi}$$

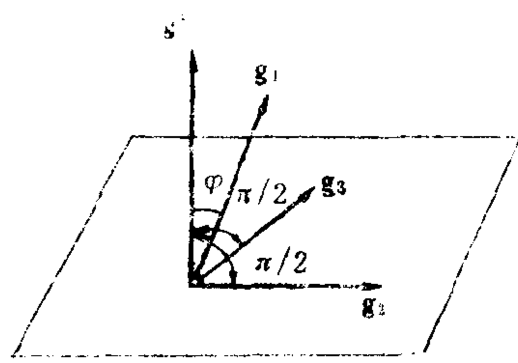

图 1.3

可以证明，逆变基矢量 $\boldsymbol{g}^i$ 事实上是垂直于坐标 x^i 的等值面（即

坐标面）的梯度

$$\boldsymbol{g}^i = \text{grad } x^i = \nabla x^i \tag{1.2.16}$$

根据对偶条件（1.2.15）可以由协变基矢量$\boldsymbol{g}_i$唯一地确定逆变基矢量$\boldsymbol{g}^i$。有两种计算方法：

法1 因$\boldsymbol{g}^1$垂直于$\boldsymbol{g}_2$与$\boldsymbol{g}_3$，故$\boldsymbol{g}^1$平行于$\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3$。令$\boldsymbol{g}^1 = a\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3$，代入$\boldsymbol{g}_1 \cdot \boldsymbol{g}^1 = 1$，并应用（1.2.15）式得

$$a = \frac{1}{[\boldsymbol{g}_1, \ \boldsymbol{g}_2, \ \boldsymbol{g}_3]}$$

由此求得$\boldsymbol{g}^1$。类似地还可求得$\boldsymbol{g}^2$和$\boldsymbol{g}^3$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{g}^1 &= \frac{\boldsymbol{g}_2 \times \boldsymbol{g}_3}{[\boldsymbol{g}_1, \ \boldsymbol{g}_2, \ \boldsymbol{g}_3]} \\ \boldsymbol{g}^2 &= \frac{\boldsymbol{g}_3 \times \boldsymbol{g}_1}{[\boldsymbol{g}_1, \ \boldsymbol{g}_2, \ \boldsymbol{g}_3]} \\ \boldsymbol{g}^3 &= \frac{\boldsymbol{g}_1 \times \boldsymbol{g}_2}{[\boldsymbol{g}_1, \ \boldsymbol{g}_2, \ \boldsymbol{g}_3]} \end{aligned} \tag{1.2.17}$$

法2 每一个$\boldsymbol{g}^i$作为一个矢量，均可以沿协变基$\boldsymbol{g}_j$分解为

$$\boldsymbol{g}^i = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \qquad (i = 1, \ 2, \ 3) \tag{1.2.18a}$$

其中g^{ij}是$\boldsymbol{g}^i$的逆变分量，共有9个。下面给出其计算方法。

将（1.2.18a）式点乘$\boldsymbol{g}^k$，利用对偶关系可知

$$\boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^k = g^{ij}\boldsymbol{g}_j \cdot \boldsymbol{g}^k = g^{ij}\delta_j^k = g^{ik}$$

或写作

$$g^{ij} = \boldsymbol{g}^i \cdot \boldsymbol{g}^j \qquad (i, \ j = 1, \ 2, \ 3) \tag{1.2.18b}$$

同样地，协变基矢量$\boldsymbol{g}_i$也可以沿逆变基矢量$\boldsymbol{g}^j$分解

$$\boldsymbol{g}_i = g_{ij}\boldsymbol{g}^j \qquad (i, \ j = 1, \ 2, \ 3) \tag{1.2.19a}$$

而 $$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \qquad (i, \ j = 1, \ 2, \ 3) \tag{1.2.19b}$$

g_{ij}与g^{ij}每组各有9个量。但根据（1.2.18b）与（1.2.19b）式可知它们均满足对称条件

$$g_{ij} = g_{ji}, \qquad g^{ij} = g^{ji} \tag{1.2.20}$$