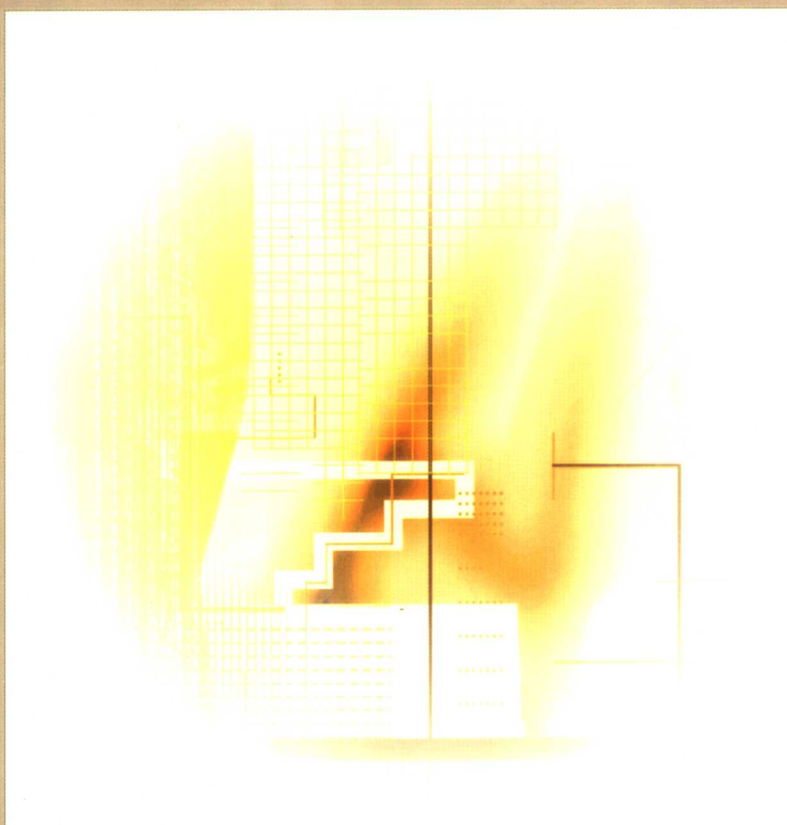
实用线性规划工具

高红卫 ◎ 著



科学出版社
www.sciencep.com

实用线性规划工具

高红卫　著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

这是一本线性规划与分析方面的实用工具书，实用性和工具性是本书的突出特点。本书以介绍线性规划方法运用的基本概念为主线，结合随书附赠的工具软件实际操作，介绍了线性规划问题提出、模型构造、软件使用、结果判别、灵敏度分析等内容。

本书适合于各类战略与规划管理人员、计划管理人员、财务管理人员、科研管理人员、创业者、咨询师、工程师、大专院校理工科学生，以及一切需要掌握并实际运用线性规划方法的人士阅读，并可以作为管理类和商科职业教育参考书。

图书在版编目(CIP)数据

实用线性规划工具/高红卫著. —北京：科学出版社，2007

ISBN 978-7-03-018106-0

Ⅰ.实…　Ⅱ.高…　Ⅲ.线性规划-软件工具　Ⅳ.O221.1-39

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第117852号

责任编辑：沈　建/责任校对：张小艳

责任印制：安春生/封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2007年1月第一版　开本：B5（720×1000）

2007年1月第一次印刷　印张：14 3/4

印数：1—3 000　字数：277 000

定价：36.00元（含光盘）

（如有印装质量问题，我社负责调换〈科印〉）

前 言

2004年，作者为普及运筹学应用而写的《线性规划方法应用详解》一书由科学出版社出版。该书付印前得到宋健院士的鼓励，出版后又得到了社会各界人士的鼓励和支持，不少读者还提出了宝贵的修改意见。这些鼓励和意见在形成本书的过程中起到了积极的作用，借本书出版之际，作者对宋健院士和广大读者谨表深深的谢意！

从各方面读者对《线性规划方法应用详解》一书的反馈意见看，希望作者在修订版中进一步强化实用性，特别是强化工具性的建议占较大比例。本书就是应读者的要求而由《线性规划方法应用详解》一书改写而成的，因此本书不仅增删了部分内容，而且在增强实用性和工具性两个方面也做了较大的改进。

线性规划理论虽然并不深奥，它只是整个优化理论和运筹学理论中的一小部分，但是它却是一种基础性、应用性非常强、应用效果非常显著的理论。线性规划理论的应用，对于提高个人、企事业单位、各类机构、政府部门，乃至整个国家的竞争力，具有明显的作用。西方发达国家的发展历史已经证明，优化理论是构成整个人类现代文明大厦基础的现代科学技术的一个重要组成部分，是从经验型管理走向科学型管理的重要途径之一，是现代社会各种系统工程优化管理的重要基础。作者相信，在中国实现工业化、现代化，全面建设小康社会的实践过程中，线性规划等优化理论也必将发挥巨大的作用。

线性规划理论发端于军事和经济问题的综合分析与优化，早期主要在数学界和管理学界流行，尽管几十年来在国外的应用如火如荼，而在国内，除了大学教科书上有一些概念介绍外，很少看到系统性地介绍线性规划实用的方法和工具。或许，作为一种纯学术活动，线性规划问题的研究已经没有多少创新的空间了，但是作为一种社会性应用创新活动，可以说在中国还没有真正开始。

虽然线性规划的方法并不复杂，但是对于绝大多数人来讲，还是显得有些“晦涩难懂”，特别是要在日常生活和工作实践中广泛地加以应用，许多人还是面临着巨大的心理障碍（一些人看到数字就头疼，看到方程式就头晕，看到逻辑推演就头昏），如何把深刻的道理通俗化，把复杂的过程简单化，把烦琐的迭代计算过程程序化，以最简单的人机对话方式和最少的数据输入获得清晰的结果，是推广线性规划方法普及应用所需要解决的几个主要问题。本书在这几个方面都做了必要的尝试。

读完这本书并模仿本书提供的例题进行练习，读者可以学到从建立线性规划

模型，到求解线性规划问题最优解、求解线性规划问题对偶最优解、确定资源常量变动范围、确定变量价值系数变动范围，以及变量技术约束系数变动范围等一系列知识和实用方法。利用本书提供的软件工具，读者可以快捷、方便地解决日常生活与工作中遇到的各种常见的线性规划问题。

书中第 1 章 1.4 节是专为那些需要更多了解线性规划方法概念的读者写的，一般读者可以略去这一节的内容，而这不会影响读者对本书核心内容的理解和运用。

作者强烈建议读者利用本书提供的软件工具和分析方法，自己动手解决一到两个工作、生活和学习中遇到的实际的线性规划问题。本书给出的软件工具设定变量个数和约束方程总数均为 60 个，足以满足一般日常生活、企业管理、公共管理以及军事运用等方面的线性规划问题求解需求。

面向实际应用是本书写作的根本目的，因此作者认为读者与作者互动将有助于这个目的实现。如果读者在阅读和使用本书以及随书附赠的软件后有什么意见、建议和要求，请与作者联系，作者将会尽可能地满足读者的要求。

作者的电子邮件地址：gaohw@sogou. com。

作　者

2006 年 6 月　于北京

目　录

第 1 章　入门知识

1.1　线性规划问题的提出

1941～1942 年冬，第二次世界大战正进行得如火如荼。当时德国的潜艇很活跃，而英国空军反潜作战的效果却很差。于是，军方请运筹学工作者参加改进反潜作战效果的工作。当搜集和分析了大量有关英国飞机攻击德国潜艇的资料后，人们发现，飞机攻击潜艇的最有利时机是潜艇还处在水面或刚刚下潜的时候。但当时深水炸弹的规定引爆深度标定在 100 英尺（1 英尺＝0.3048m），而炸弹的毁伤半径约为 20 英尺，这样，深水炸弹对潜艇的打击作用就很难充分发挥出来。于是科学家们建议军队把炸弹的引爆深度定在 20～25 英尺之间。而当时已生产的这种炸弹的最小引爆深度为 35 英尺，所以英国空军只好把深水炸弹标定这个深度（35 英尺）上自动引爆。仅这样一改，就使得利用深水炸弹毁伤潜艇的效率提高了 6 倍，以致德国人误认为英国空军使用了威力更大的新式炸弹。

虽然解决线性规划问题并不都像这个真实的故事所描述的这样富有戏剧性，但是这个故事却集中地体现了使用优化方法的全部优点和特点：深水炸弹的技术标准没有变化，作战样式和作战强度没有变化，深水炸弹本身所具有的毁伤威力也没有变化，仅仅是把炸弹的引爆深度减小了一些，就取得了数倍于先前的攻击效果。这个故事所反映的现象向我们给出了这样的一个提示：方案优化的本质是在各种可能的选择中择优，优化理论和优化方法具有很高的实际应用价值。

线性规划理论和方法是优化理论和方法中的一种，主要用于解决各类线性系统运行状态的优化问题。

所谓线性系统，最显著的特点之一就是系统中各个要素的作用是可叠加的，并且系统的各种输入量与输出量之间存在比例关系。

线性规划方法所要解决的主要问题是：如何在各种要素间分配资源才能保证在既定的资源总量与技术条件约束下，使得系统的运行结果最优（目标函数取极大值或者极小值）。

§1.1.1　线性规划问题初步认识

（1）什么叫规划

通俗地讲：规划是一种特定的活动（过程），它以某个事件涉及的战略原则、资源限制、技术性约束条件为基础，推演各种条件组合下所能产生的各种结果，并根据优化原则对逻辑推演结果作出分析与评价，从中找出那些对当事人（系

统）最有利的结果，并给出应该限制（减少）哪些活动要素（单元），加强（增加）哪些活动要素（单元），哪些资源显得剩余，哪些资源显得不足的信息与建议。

规划的过程，实质上就是为了实现某个特定目标对特定事物的发展进程进行优化分析的过程。俗话说：吃不穷，穿不穷，规划不周一辈子穷。小到一个人、一个家庭、一个课题组，大到一个企业、一个科研院所，甚至一个国家，只要是一个利益和权益主体，要想在推进事物发展的过程中获得最多的利益或最优的结果，就都需要进行科学的运筹和规划。

比如说，在武器装备与弹药条件、作战样式一定的前提下，如何安排阵地或战法才能获得最好的攻击（防御）效果？

还比如，在机器设备与原材料、生产方式一定的前提下，如何安排生产才能获得最大的利润？可能获得的最大利润额是多少？

在资金量和投资获利方式一定的前提下，如何安排投资组合才能获得最好的投资效益？投资效益是多少？

在有限的精力、一定的课程设置以及学习方式不变的情况下，如何分配时间，才能获得尽可能好的学习效果，拿到更多的学分？

在土地资源和种植作物品种、种植方式一定的情况下，如何安排种植计划，才能获得更多的经济效益？

人生苦短，禀赋各异。什么样的生涯规划方案，才能最大限度地发挥自己的优势，取得最大的成功？

如此等等。各行各业实际工作中遇到的类似问题，都可以用线性规划的方法来解决。

（2）什么时候需要进行规划

规划的过程本质上讲就是在特定的资源条件、特定的运行规则和特定的价值取向约束下，进行方案优化选择的过程。任何需要并且可以通过选择运行要素来选择结果的事件，都应该进行预先的规划。

任何一种特定的活动（过程），在其进行的过程中，只要没有达到结束的那个时刻，就存在选择结果的机会，因此，也就存在规划的必要。

当然，效益最高的规划是事件还没有发生之前的规划，因为这时的规划最有利于充分发挥全部资源和全部要素的作用。

（3）功利性原则

功利性原则是线性规划方法以及其他各种类型规划方法所必须遵循的一个总原则。

在线性规划问题中，功利性原则是通过所谓目标函数来表达的。

如果目标函数被定义为取最大值，则表明规划的目的是使得规划主体的利益最大化；反过来，如果目标函数被定义为取最小值，则表明规划的目的是使得规

划主体的损失最小化。损失的最小化当然也意味着利益的最大化。

构成目标函数的各要素对于使得目标函数最大化（最小化）的贡献所占的比率不一定是完全相同的，因此它们之间的差异需要利用一组可以表示其贡献率大小的系数予以标识，这些系数通常称为参与决策的要素的价值系数（费用系数）。

在目标函数中，价值系数（费用系数）所伴随的变量通常称为决策变量。

（4）资源约束原则

在一种特定的活动（过程）中，消耗资源和产生价值的过程是同时完成的，世界上不存在不消耗资源而产生价值的过程。但是某些情况下存在着这样的现象：在 A 活动（过程）中消耗资源，在 B 活动（过程）中产生价值的过程。当这种情况出现时，应在更高层次上（或者更大范围内）重新考虑资源利用的价值问题。

要想获得利益，必然要占有资源和使用资源。因此，资源占有（需求）情况的记录和分析对于线性规划问题而言是必不可少的内容。

一种特定的活动（过程）所占用的全部资源通常用一组有序的、与约束条件一一对应的实数数值来表示，并且通常被称为资源向量。

（5）技术约束原则

在特定的活动（过程）中，一种资源可能被一种及以上的要素（过程单元）所消耗，也可能被所有的要素（过程单元）所消耗。各种要素（过程单元）为生产单位产品或产生单位效用而消耗某种资源的数量，取决于该要素在整个活动（过程）中的技术性规则的限制（这些技术性限制通常由生产方式、作战样式、运行机理等客观条件所决定），称为技术约束系数，通常简称为约束系数。

§1.1.2 线性规划问题举例

以上我们以不十分严谨的语言对线性规划问题进行了通俗的直接描述。但是，仅仅阅读这种描述还不足以建立起一种直观的概念。下面，我们分别介绍一些构成线性规划问题的典型例子，这些例子在后续章节中还会被进一步地分析和解剖。所以，如果读者暂时看不透彻也无关紧要，只要能帮助建立起关于“线性规划问题”的大致印象就行了。

例 1.1 张三念大学一年级，半年后他的学习情况如下，必修课平均考试成绩 85 分，选修课中自然科学类学科的平均考试成绩为 60 分，而人文科学类学科的平均考试成绩为 50 分。他认为自己的学习成绩还不是十分理想，准备增加自修时间（从每天的 6 小时增加到 7 小时——即下午和晚上各增加半个小时）来提高成绩。但是，他不知道在哪类功课上增加自修时间对提高成绩最有利。他请辅导老师帮他认真分析和总结了自己的自修时间分配与各类课程成绩之间的关系，并列出了一张关系表（如表 1-1 所示）。

表 1-1　自修时间与各科成绩关系表

	必修课	自然科学类选修课	人文科学类选修课	总自修时间
上午	1	0	0	1
下午	1	1	0	2
晚上	1	1	1	3
平均成绩	85%	60%	50%	

然后，老师又帮助他整理出了一个关于自习时间优化分配的线性规划模型，并利用线性规划方法重新规划了他的时间分配方案，即自然科学类选修课的自修时间下午和晚上各增加半个小时。又过了一个学期，张三的总成绩提高非常明显。

辅导老师所使用的线性规划模型如下：

目标函数　$\max \quad z = 0.85x_1 + 0.6x_2 + 0.5x_3$

约束条件

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 1 \\ x_1 + x_2 \leqslant 2.5 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 3.5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1-1}$$

其中，x_1，x_2，x_3均为决策变量，并且分别代表建议调整后必修课每天自修时间与当前自修时间的比值、建议调整后自然科学类选修课每天自修时间与当前自修时间的比值、建议调整后人文科学类选修课每天自修时间与当前自修时间的比值。求解此问题的结果是：$x_1=1$，$x_2=1.5$，$x_3=1$。显然，最优的选择是自然科学类选修课自修时间与当前自修时间的比值为 1.5，即，下午和晚上各增加半个小时。三类功课的平均分总分将从当前的 195 分上升到 225 分。

例 1.2　李四经营着一个小企业，这个企业最近出现了一些问题，资金周转出现困难。该企业一共生产经营着三种产品，当前有两种产品赔钱，一种产品赚钱。其中，第一种产品每生产一件赚 300 元，第二种产品每生产一件赔 400 元，第三种产品是每生产一件赔 100 元。

三种产品分别消耗（或附带产出）三种原料，其中第一种产品每生产一件需要消耗 100 千克原料 A 和 100 千克原料 C，附带产生 100 千克原料 B；第二种产品每生产一件需要消耗原料 A、B、C 各 100 千克；第三种产品每生产一件附带产生 100 千克原料 A，需要消耗 200 千克原料 B 和 100 千克原料 C。由于生产第三种产品的设备已经损坏，且企业也无能力筹集资金修复之，所以该企业现已无法组织生产第三种产品。

现在仓库里还存有 A 原料 40 000 千克，后续货源供应难以得到保证；库存 B 原料 20 000 千克，如果需要，后续容易从市场采购得到；库存 C 原料 30 000

千克，如果需要，后续容易从市场采购得到。

李四想转行经营其他业务，但苦于仓库里还积压着 90 000 千克原料，如果直接出售原料，则比生产后出售成品赔得更多。没有办法，李四只好向运筹学专家咨询，看看如何组织生产才能将损失降到最低，经过对李四企业的生产经营情况进行考察和分析，专家们用线性规划方法求解后，提出了下面的建议：不生产第三种产品，生产第一种产品 50 件，生产第二种产品 250 件，则综合性损失最小（亏损 85 000 元）。如果剩余原料转让收益大于 0，则亏损小于 85 000 元。

专家所使用的线性规划模型如下：

$$
\begin{aligned}
&\text{目标函数}\quad \max\ z= && 300x_1-400x_2-100x_3 \\
&\text{约束条件} && 100x_1+100x_2-100x_3\leqslant 40\,000 \\
& && -100x_1+100x_2+200x_3\geqslant 20\,000 \\
& && 100x_1+100x_2+100x_3\geqslant 30\,000 \\
& && x_1,\ x_2\geqslant 0,\ x_3\leqslant 0
\end{aligned}
\tag{1-2}
$$

其中，x_1，x_2，x_3均为决策变量，并且分别代表第二种产品产量、第三种产品产量和第一种产品产量。

例 1.3 王五管理着一个科研课题，根据课题进展情况看，不久就要结题了。由于课题的管理采用经费与任务包干制，所以可以通过节约开支来预留课题完成后的产业化推广经费。现王五需要制订出这样的一个方案：既按期完成科研任务，又要尽可能多地节省费用，人员的收入还不能减少。同时他还想知道这笔可节省的费用究竟是多少？

课题组的费用构成有两个部分：一是人员经费开支，二是试验消耗与器材采购费用开支。其中，由于出台了增收节支激励政策，所以人员经费开支与原计划相比每月可节省 1 万元，试验消耗与器材采购费用开支每月可节省 4 万元。

该课题由两个子课题构成。其中第一个子课题的开支情况为：每月人员经费为 1 万元，每月试验与器材经费的开支为 10 万元；第二个子课题的开支情况为：人员经费计划为 1 万元，实际上该子课题每月可通过边研制边推广应用的方式获得净收入 1 万元，这样就可以保证每月正常的人员经费开支，所节余的 1 万元可向课题组上缴，同时该子课题的试验与器材经费开支需求是每月 8 万元。

第一个子课题的总经费还剩 20 万元，但如果申请，还可以增加；第二个子课题的经费还有 40 万元，但即使申请也不可能再增加。

课题组研究后一致决定采用如下原则进行决策：

1）所节余的人员经费用于奖励，不计入节省费用的总额当中。

2）在保证圆满完成课题任务的前提下，最大限度地积累课题应用性推广经费。

经过使用线性规划方法进行测算，得到的结论是：在给定的决策原则下，从节省费用最大化的角度看，最合理的科研结题周期是 5 个月，最多可从中节省出

20 万元的产业化推广经费。

专家所使用的线性规划模型如下：

$$
\begin{aligned}
\text{目标函数}\quad & \max\quad z=4x_1+x_2 \\
\text{约束条件}\quad & 8x_1-x_2\leqslant 40 \\
& 10x_1+x_2\geqslant 20 \\
& x_1\geqslant 0,\ x_2\leqslant 0
\end{aligned}
\tag{1-3}
$$

其中，x_1，x_2均为决策变量，并且分别代表建议第二个费用科目节省经费的月数和建议第一个费用科目节省经费的月数。

例 1.4 飞行器能源装置设置优化方案问题。

某飞行器需要使用电源的设备主要包括导航设备、控制仪器设备、伺服机构几个部分。

该飞行器的能源装置为化学电池，一共需要使用三组电池为上述三种设备进行分类供电（第一组为三种设备的大功率部件供电，第二组为三类设备的中功率部件供电，第三组为三类设备的小功率部件供电）。三组电池可选择三种电池单元进行组合，以便在获得足够输出功率的同时实现电池质量最小化的目标。

其中，导航设备需要的总额定能量为≥200（A·h），控制仪器设备需要的总额定能量为≥220（A·h），伺服机构需要的总额定能量为≥580（A·h）。

再者，第一种电池单元对导航设备中的大功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 5.5，第二种电池单元对中功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 8，第三种电池单元对小功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 9.1。

第一种电池单元对控制仪器设备中的大功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 5.6，第二种电池单元对中功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 8.2，第三种电池单元对小功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 9.2。

第一种电池单元对伺服机构中的大功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 5.47，第二种电池单元对中功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 7.9，第三种电池单元对小功率部件的有效出功系数（A·h/单元）为 8.7。

已知每种电池单元的质量分别为 2 千克、1.5 千克和 1 千克。

由于工艺与结构尺寸的限制，每组电池所包含的单元数不能大于 30 个。

优化前的设计方案是：第一组电池使用第一类电池单元 30 个，第二组电池使用第二类电池单元 30 个，第三组电池使用第三类电池单元 15 个，电池的总质量为 120 千克。规划后专家给出的优化建议方案是：第一组电池使用第一类电池单元 15 个，第二组电池使用第二类电池单元 30 个，第三组电池使用第三类电池单元 30 个，电池的最小总质量为 105 千克。比未规划前减轻了 15 千克消极质量。

运筹学专家所使用的数学模型如下：

$$\begin{aligned}
\text{目标函数}\quad & \min z = 2x_1 + 1.5x_2 + x_3 \\
\text{约束条件}\quad & x_1 \leqslant 30 \\
& x_2 \leqslant 30 \\
& x_3 \leqslant 30 \\
& 5.5x_1 + 8x_2 + 9.1x_3 \geqslant 200 \\
& 5.6x_1 + 8.2x_2 + 9.2x_3 \geqslant 220 \\
& 5.47x_1 + 7.9x_2 + 8.7x_3 \geqslant 580 \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-4}$$

例 1.5 农户种植计划的优化问题。

某农户共承包土地 23 亩（1 亩＝666.7m^2），其中坡地 10 亩，旱地 8 亩，水田 5 亩。在这 23 亩土地上，可以种植的作物有 6 种。其中第一种作物适合于在坡地与旱地种植，第二种作物只适合于在旱地种植，第三种作物则三种类型的土地都适合于种植，第四种作物适合于在坡地和旱地种植，第五种和第六种作物只适合于在水田中种植。

根据经验，在坡地种植第一种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.4 亩，在旱地种植第一种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.3 亩；在旱地种植第二种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.25 亩；在坡地种植第三种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.2 亩，在旱地种植第三种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.15 亩；在水田种植第三种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.4 亩；在坡地种植第四种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.18 亩，在旱地种植第四种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.1 亩；在水田种植第五种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.15 亩；在水田种植第六种作物获得 100 元收入所需要的面积是 0.1 亩。

问题是：如何安排种植计划，才能获得最大的收益？

运筹学专家经过计算，提出的推荐方案如下：

全部的 5 亩水田都用来种植第六种作物；在旱地中拿出 2.45 亩地种植第二种作物，其余的 5.55 亩旱地全部种植第四种作物；10 亩坡地全部用于种植第四种作物，其他的三种作物不安排种植。

按照这样的方案种植，可以获得最大收入为 11 533.33 元。

运筹学专家所使用的数学模型如下：

$$\begin{aligned}
\text{目标函数}\quad & \max z = 100x_1 + 100x_2 + 100x_3 + 100x_4 + 100x_5 + 100x_6 \\
\text{约束条件}\quad & 0.4x_1 + 0.2x_3 + 0.18x_4 \leqslant 10 \\
& 0.3x_1 + 0.25x_2 + 0.15x_3 + 0.1x_4 \leqslant 8 \\
& 0.4x_3 + 0.15x_5 + 0.1x_6 \leqslant 5 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0
\end{aligned} \tag{1-5}$$