

托卡马克位形求解的网格精细化

牟宗泽 简广德 张锦华 彭点云

(西南物理研究院, 成都)

摘 要

先进的托卡马克位形对于实现磁约束受控聚变是至关重要的。但对某些情况,精确计算位形是十分困难的。如当物理量在局部区域内有很大的变化,或在区域内解的数值大小有大的数量级上的改变,为保证数值求解平衡方程的收敛性,有两个困难随之产生了:(1)所需的计算机内存极大地增加,以致有的物理模式的计算受到计算机内存的限制。(2)求解代数方程阶次的迅速增长,可能使舍入误差的积累造成对真解的扭曲。利用两种不同的网格精细化方法与差分方程解的外推过程相结合,能更精确地求解等离子体平衡方程。理论分析和数值实验都说明方法是有效的。

Mesh Refinement for Solving Tokamak Configurations

(In Chinese)

MOU Zongze JIAN Guangde ZHANG Jinhua PENG Dianyun
(Southwestern Institute of Physics, Chengdu)

ABSTRACT

Advanced tokamak configurations are very important for achieving magnetic confinement control of nuclear fusion. However, in some case accurate computation of the configuration poses a formidable challenge. Such as there is a change of physical variable with gradient in local domain or with great difference of the order of its magnitude in the domain, in order to guarantee numerical convergence for solving plasma equilibrium equation, two trouble issues arise as the following: (1) Required computer memories increase so rapid as to restrict computation to some physical mode. (2) The order of matrix for solving algebraic equations increases so greatly that the accumulated round off errors can swamp the true solutions. We adopt two kinds of different mesh refinement process combining extrapolation of difference solution for more accurately solving tokamak plasma equilibrium equation. The numerical test and theoretical analysis show that the methods are robust.

引言

在数值求解托卡马克等离子体平衡方程时,会遇到两类网格精细问题:(1)需要在更精细的网格剖分下才能使平衡方程的数值解满足收敛标准。(2)平衡方程数值解虽已收敛,但实际应用仍需求出更精细网格点上的函数值。

网格的精细化往往是出于局部子区域的需要。为确保使数值解收敛和满足实际应用的要求,尽管可采用全区域加密网格的办法,在满足给定要求的精细网格剖分下去重解等离子体平衡方程,但这样做势必导致解超大型矩阵的代数方程,同时也大大增加了计算所占机器的内存。对超大型代数方程的数值求解,积累的舍入误差可能淹没真解^[1]。用非均匀网格可适度减小矩阵阶数,但若粗细网格尺度之比过大,局部解会发生畸变^[2]。如何有效地克服这些困难将是本研究要关注的问题。

1 平衡方程及相关问题

为方便起见,仅考虑固定边界的最简单的位形模式。其方程为

$$\Delta^* \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = r j_{\theta}(r, \psi) = S(r, \psi) \quad (1)$$

式中: ψ ——等离子体磁通;

j_{θ} ——已知的环电流密度。

模型相关的边界(见图1)条件为

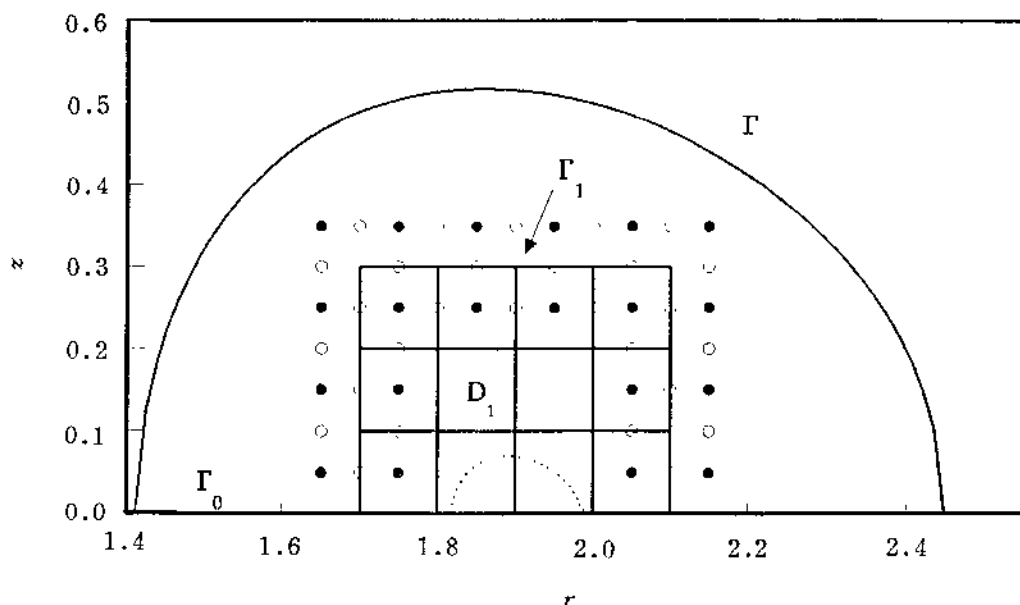


图1 解的区域与重解子域示意图

$$\psi|_r = \text{常数} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}|_{r_0} = 0 \quad (3)$$

用动态交替稳式法 (DADI) [3~5] 数值求解式 (1) ~ (3)。与 ADI 法相比, DADI 法能方便地自动选择最佳迭代参数, 保证迭代以最快速度收敛到式 (1) 所对应的差分方程的解。许多数值实验 [3~5] 表明 DADI 法是一种十分优越的数值求解椭圆型偏微分方程的方法。尽管这样, 解平衡方程还是会出现一些数值困难。

首先为适应托卡马克等离子体不稳定性计算的需要, 求解平衡方程的网格点至少要有 512×256 个 [6]。若考虑高 β 位形, 高 n 气球模, 要求的网格点数就多得多了。当环向波数 n 接近 10 时, 数值计算甚至要受到计算机内存的限制 [7]。即使没有计算机内存限制, 数值解这样超大型的代数矩阵会因舍入误差的过多积累而淹没真解。网格点需求数的增多, 部分原因是解在局部变化陡峭, 或在区域的不同部分解的数量级相差较大, 于是只有增加网格点才能保证数值解的收敛。在实际应用中, 有时数值解虽然收敛了, 但还要求进一步知道局部区域更精细网格点上的函数值。如, 为准确作 MHD 不稳定性和等离子体随磁面的输运计算, 需要确保磁轴附近等位线 (见图 1 虚线所示) 具有合适的精确度, 而仅仅依靠极少的原有网格点上的函数值是不够的。这时增加网格密度又成为需要的了。这些可简要归纳为两类要解决的问题。

P (1): 解有效, 但还需进一步知道局域更精细网格点上的函数值。

P (2): 局域的解无效 (因数值解还未随网格尺度减小而满足收敛条件), 需要更新其值。

虽然可在全区域上通过不断增加网格密度, 再解平衡方程使数值解满足问题需要, 但是纯粹依靠这一途径带来的所占计算机内存之巨大 (详见数值实验一节), 超大型矩阵数值求解舍入误差过多的积累等数值困难最终影响了问题的解决。下面我们将利用差分方程局部逆 [8], 差分方程解的外推 [9], 并结合不同的网格精细过程去有效地解决有关问题。

2 局部逆和网格精细

取均匀网格 $dr=dz=h$, 方程 (1) 的标准离散格式为

$$\Delta_r^*(\psi) = \frac{-4\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}}{h^2} - \frac{1}{2r_i} \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{h} \right) = S(r, \psi_{i,j}) \quad (4)$$

而方程 (1) 离散的旋转格式为

$$\frac{-4\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}}{2h^2} - \frac{\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}}{4\sqrt{2}h} = S(r, \psi_{i,j}) \quad (5)$$

问题 P (1) 的解决, 只需对方程 (5) 或 (4) 求其局部逆, 即可求得精细格点上的函数值。设原具有已知函数值的格点按序号 I, J 排列, 网格加密后全部格点重新排序为 i, j 。新增格点上的函数值按下述方式求出: 先求 $i \neq 2I-1, j \neq 2J-1$ 点上的函数值, 其点在图 1 中用符号 ‘•’ 表示, 其函数值表达式由式 (5) 导出,

$$\psi_{i,j} = \{\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j+1} - \frac{h}{2\sqrt{2}r_i}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) - 2h^2 S(r_i, \psi_{i,j})\}/4 \quad (6)$$

然后求格点 $i=2I-1, j \neq 2J-1$ 和格点 $i \neq 2I-1, j=2J-1$ 上的函数值, 其点在图 1 中用符号 ‘◦’ 表示, 其函数值的表达式由式 (4) 导出

$$\psi_{i,j} = \{(1 - \frac{h}{2r_i})\psi_{i+1,j} + (1 + \frac{h}{2r_i})\psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1} - h^2 S(r_i, \psi_{i,j})\}/4 \quad (7)$$

式 (6) 和式 (7) 称为差分方程的局部逆。当方程源项 S 与 ψ 无关时, 式 (6) 和式 (7) 右边是已知的, 直接由公式就得到新增格点上的函数值; 当 S 是 ψ 的线性函数时, 通过式 (6) 和式 (7) 的变形也可直接计算得到 (i, j) 点上的函数值; 当 S 是 ψ 的非线性函数时, 必须迭代地产生 $\psi_{i,j}$ 。

定理 1 值定 $\Delta_h^* \psi_{i,j} \geq 0$, 格点 (i, j) 邻域的 $\psi_{p,q} \neq$ 常数, 且 $(1 - \frac{h}{2r_i}) > 0$, 则下面式子成立

$$\psi_{i,j} \leq \text{Max}(\psi_{i+1,j+1}, \psi_{i+1,j-1}, \psi_{i-1,j+1}, \psi_{i-1,j-1}) \quad (8)$$

或

$$\psi_{i,j} \leq \text{Max}(\psi_{i+1,j}, \psi_{i-1,j}, \psi_{i,j+1}, \psi_{i,j-1}) \quad (9)$$

证: 反证。若 $\psi_{i,j}$ 取最大值, 由此可知至少有一个 $\psi_{p,q} < M$, 从而有

$$\Delta_h^* \psi_{i,j} < 0$$

与假设矛盾。故式 (8), (9) 成立。

用 $\psi, \psi_h, \tilde{\psi}_h$ 分别表示对应于原微分方程 $\Delta^* \psi = S$, 离散方程 $\Delta_h^* \psi_h = S(\psi_h)$, 离散近似方程 $\Delta_h^* \tilde{\psi}_h = S = -d_h$ 的解。相关误差记号 $e = |\psi - \psi_h|$, $e^h = |\psi_h - \tilde{\psi}_h|$, $E = |\psi_{\text{离散}} - \psi_h|$ 。

定理 2 设 $\frac{\partial S}{\partial \psi}$ 有界, 若点 (i, j) 周围的 $\psi_{p,q}$ 对离散方程或对微分方程是精确的, 则由局部逆求得的解 $\psi_{i,j}$ 分别对离散方程和微分方程的解产生的误差为 $E=0$, $e=O(h')$ 。

证: 从式 (6) 和 (7) 可得

$$\psi_{i,j} = \sum a_{p,q} \psi_{p,q} - b_{i,j} S(\psi_{i,j}) + O(h^4),$$

从而

$$E_{i,j} = 0 - b_{i,j} \frac{\partial S}{\partial \psi} E_{i,j}$$

$$e_{i,j} = 0 - b_{i,j} \frac{\partial S}{\partial \psi} e_{i,j} + O(h^4)$$

故定理 2 成立。

3 渐近解及外推

我们要证明平衡方程在内部区域有渐近解存在。先作两个假定

(I) 当 $S(r, \psi) \in C^{2k+1}(\bar{D})$ ($k \geq 0$) 时, 问题 (1) ~ (3) 有唯一解, 且 $\psi \in C^{2k+2+\lambda}(\bar{D})$ 。

(II) 对离散方程及相应边条件也有唯一解, 而且满足一致估计 $\|\psi_k\|_D \leq C \|S(r, \psi_k)\|_D$ 。

定理 3 假设 (I), (II) 成立, 对 $k=1$, 则离散方程 (4) 及其相应边条件 (2), (3) 的解具有渐近展式

$$\psi_k = \psi + h^2 V + h^{2+\lambda} \eta_k \quad (10)$$

证: 离散平衡方程在局域有

$$\Delta_k^* \psi = \Delta^* \psi + h^2 \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^4} \right) - \frac{1}{6r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \right\} \psi + h^{2+\lambda} \sigma_0 \quad (11)$$

$$\Delta_k^* V = \Delta^* V + h^2 \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial z^4} \right) - \frac{1}{6r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} \right\} V + h^{2+\lambda} \sigma_1 \quad (12)$$

将式 (10) 代入方程 (4), 得

$$\Delta_k^* \psi + h^2 \Delta_k^* V + h^{2+\lambda} \Delta_k^* \eta_k = S(r, \psi_k) \quad (13)$$

$$\psi_k|_r = \text{常数} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial z} \Big|_{r_0} = 0 \quad (15)$$

再由

$$S(r, \psi_k) = S(r, \psi) + h^2 V \frac{\partial S(r, \psi)}{\partial \psi} + h^4 \sigma_2^h + h^{2+\lambda} \sigma_3$$

$$\sigma_3 = \eta_k \frac{\partial S}{\partial \psi}(r, \psi + h^2 V + \theta \eta_k h^{2+\lambda})$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} V^2 \frac{\partial^2 S}{\partial \psi^2}(r, \psi + \theta h^2 V)$$

利用 $\Delta^* \psi = S(r, \psi)$, 比较方程的 h 的同次幂后, 得到

$$\begin{cases} \Delta^* V + \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) - \frac{1}{6r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \psi = V \frac{\partial S}{\partial \psi}(r, \psi) \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} V|_r = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z}|_{r_0} = 0 \end{cases} \quad (18)$$

从假设知道, 问题 (16) ~ (18) 有唯一解 $V \in C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$.

另外还得到

$$\Delta_k^* \eta_k + \sigma_0^k + \sigma_3 = 0 \quad (19)$$

$$\eta_k|_r = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}|_{r_0} = 0 \quad (21)$$

由假设 (I) 可知, 式 (19) ~ (21) 有唯一解, 且满足

$$\|\eta_k\| \leq C \|\sigma_0^k + \sigma_3\|$$

故式 (10) 成立。

还可进一步证明等离子体平衡方程有更高阶的渐近展式。

$$\psi_k = \psi + h^2 V + h^4 U + h^{4+\lambda} \eta_k \quad (22)$$

从式 (10) 和 (22) 可导出外推公式

$$\bar{\psi} = \psi^{(\lambda, h/2)} = \frac{4\psi_k - \psi_{2k}}{3} \quad (23)$$

$$\bar{\bar{\psi}} = \frac{16\psi^{(\lambda/2, h/4)} - \psi^{(\lambda, h/2)}}{15} \quad (24)$$

式 (23) 和 (24) 分别将误差 $e = O(h^2)$ 改善为 $O(h^{2+\lambda})$ 和 $O(h^{4+\lambda})$ ($\lambda > 0$)。

4 局部网格精细与重解

当局域的函数梯度相对于大部分区域的函数梯度大得多时, 或局域的函数值相对于其

它区域函数值有数量级的减小时,大部分区域数值解已满足收敛条件,仅仅在局域数值解还未收敛,于是问题 P (2) 产生了。为此可取一位子收敛区内的曲线 Γ_1 , 它与 Γ_0 构成的区域 D_1 包含整个未收敛区,但比未收敛区稍大 (见图 1)。然后在 D_1 上重解方程。直觉上将 Γ_1 上求得的数值解作边条件,精细化区域 D_1 内网格,直到平衡方程在此区域满足数值收敛条件。实际上这只是一种假收敛。只有提高 Γ_1 上解的精度,才能使 D_1 内的数值解真正改善其收敛状况。外推公式 (23), (24) 的应用正好可作到这点。

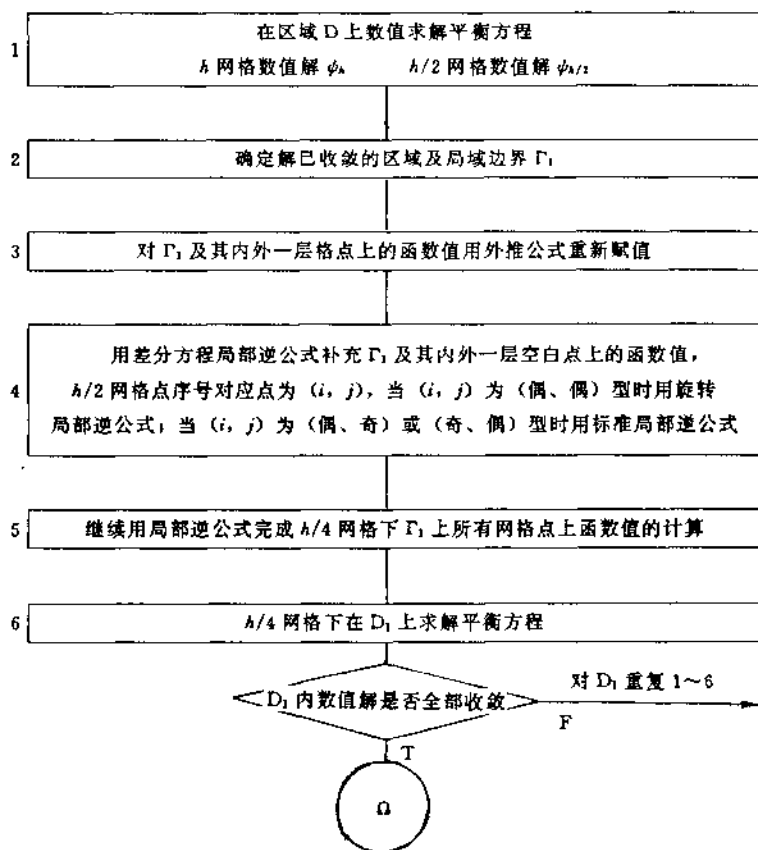
具体作法如下:先将 Γ_1 及其相邻内外一层原有格点 (在收敛区内) 上的函数值利用外推公式 (23) 式或 (24) 式重新赋予格点上的函数值。其次对标以符号 ‘.’ 的点,用式 (6) 补充其相应的函数值,再利用式 (7) 对标以符号 ‘o.’ 的点补充其相应的函数值。于是在更精细的网格剖分下得到边界 Γ_1 上所有格点上的函数值。可反复利用局部逆公式 (6) 或 (7),直到获得所希望精细网格剖分下边界 Γ_1 上所有格点上的函数值。这样就可在此希望的网格剖分下在 D_1 上求解等离子体平衡方程。

定理 4 若平衡方程 (1) ~ (3) 的解在区域及边界上有四阶偏导数, S 是 ϕ 线性函数,则差分格式 (4) 收敛,且有估计式

$$\|\phi_{(i,j)} - \phi_{h(i,j)}\| \leq C_m h^2 \quad (25)$$

证:该定理可仿效文献 [10] 中定理 13.4 的证明。

5 算法流程图



6 数值实验与讨论

考虑具有解析解的典型方程

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 4r^2 \quad (26)$$

$$\psi|_r = C \quad (27)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z}|_{r_0} = 0 \quad (28)$$

问题 (21) ~ (23) 有解析解

$$\psi = r^2 z^2 + r^4/4 - 2r^2 + 3 + C \quad (29)$$

磁通函数 ψ 在边界 Γ 上取最大值, 而在磁轴上取最小值 $C-1$ 。

局部逆实验: 选用了三个子区域, 对应不同的外部边界值 C , 子区域边界条件准确给出。先通过边界四点用局部逆的旋转格式求得中心点的函数值。然后再反复交替使用局部逆的旋转格式或标准格式求得逐次精细化格点上的函数值。最后给出网格点上的最大绝对误差和最大相对误差 ($\text{Max}|\psi_{\text{局部逆}}(i, j) - \psi_{\text{解析}}(i, j)|$ 和 $\text{Max}|\psi_{\text{局部逆}}(i, j) - \psi_{\text{解析}}(i, j)|/\psi_{\text{解析}}(i, j)$)。对表 1 中例 I 给出了局部逆求得的磁通量分布图 (图 2 所示), 对图示的精度真实解和数值解显不出任何差别。

表 1 局部逆数值结果比较

No.	子区域 (r_1, r_2) $\times$ ($0, z_2$)	(27) 式中边条件 C 的取值	子区域网格点数 $N_1 \times N_2$	最大误差	
				绝对	相对
I	(1.98, 2.02) $\times$ (0, 0.04)	2.0	33 $\times$ 33	7.6×10^{-9}	7.6×10^{-9}
II	(1.98, 2.02) $\times$ (0, 0.04)	1.01	33 $\times$ 33	6.35×10^{-7}	6.3×10^{-3}
III	(1.96, 2.039) $\times$ (0, 0.079)	1.01	33 $\times$ 33	5.0×10^{-6}	5.0×10^{-4}

子域直接解实验: 采用与局部求逆实验相同的子区域, 相同的边界条件, 同样的网格剖分, 不同的是这里直接数值求解等离子体平衡方程。用采 DADI 法得到数值结果列于表 2。

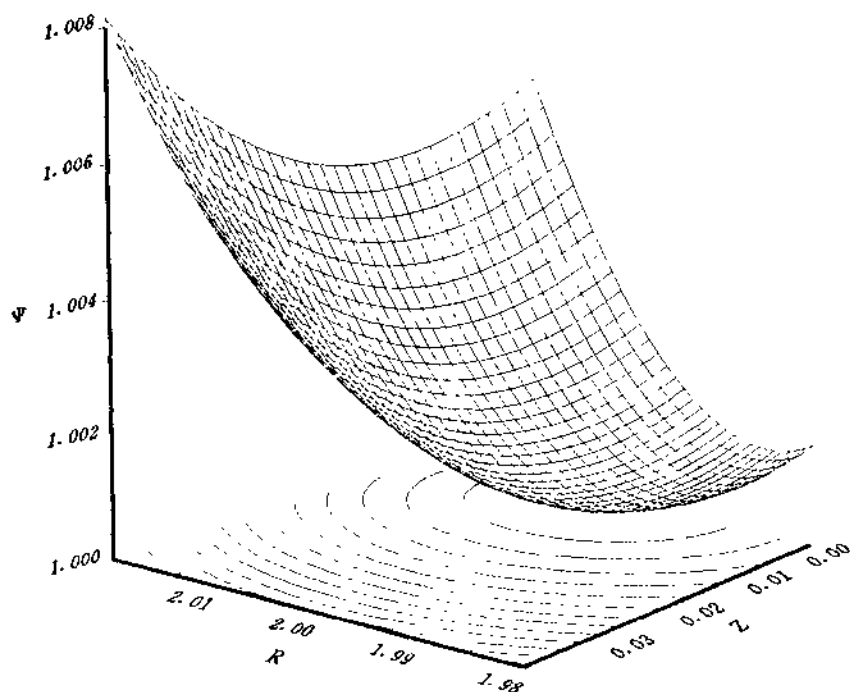


图2 在局域上用局部逆求得 ψ 分布

表2 子区域上直接求解平衡方程结果

No.	子区域 $(r_1, r_2) \times (0, z_1)$	(27) 式中边条件 C 的取值	子区域网格点数 $N_1 \times N_2$	最大误差	
				绝对	相对
I	$(1.98, 2.02) \times (0, 0.04)$	1.01	33×33	7.8×10^{-5}	7.8×10^{-5}
II	$(1.96, 2.039) \times (0, 0.079)$	1.01	33×33	3.27×10^{-4}	3.26×10^{-5}

全域求解与网络加密：在全区域 $(r_1, r_2) \times (0, z_2) : (1.4142, 2.449) \times (0, 0.517)$ 上给定边界 Γ_1 上的磁通量 $C=1.01$ ，而在边界 Γ_0 上满足法向边条件式 (28)。选定几组网格剖分；直接数值求解平衡位形问题 (26) ~ (28)。随着网格点数增多，区域内数值解的最大误差相应减小。最大误差基本发生在磁轴附近。也即在实验的子区域内（参见表3）。

外推与两类网格精细化结合：实际求解问题的区域往往是大的，不能用局部求逆简单地给出区域内网格点上的解。当在区域内函数值大小相差数个量级或函数局域梯度太大时，通过网格精细直接求解也很难满足全部网格点上函数的收敛标准。这时需把差分方程解的外推与局域网格精细的不同过程结合起来，求解整个问题。我们作如下实验：取边界 Γ 上磁通量 $C=1.01$ ，先在全区域上用两组网格 (41×21 个格点和 81×41 个格点) 求解平衡方程 (26) ~ (28)。利用外推公式及局部逆公式求得 Γ_1 上全部格点的函数值，在 D_1 上取 97×38 个格点的网格。根据 Γ_1 上的条件及相应网格剖分求得平衡方程在 D_1 内的解，再与全

区域用 161×81 个格点求得的 D_1 内的解相比, 其收敛状况基本一致。而全域上使用的格点数是子区域格点数的 3.54 倍。

表 3 全域最大误差随网格点增多的变化

No.	区域剖分网格点总数 $N_1 \times N_2$	最大误差	
		绝对	相对
I	201×101	7.0×10^{-3}	7.0×10^{-1}
II	301×151	5.0×10^{-3}	5.0×10^{-1}
III	361×181	3.98×10^{-3}	3.98×10^{-1}
IV	421×211	3.25×10^{-3}	3.25×10^{-1}
V	801×401	1.645×10^{-3}	1.645×10^{-1}
VI	851×426	1.02×10^{-3}	1.02×10^{-1}

7 讨论

从上述分析和数值实验 ($C=1.01$) 我们不难得出下面结论

(1) 差分方程解的外推与局域网格精细的不同过程相结合最终可减小求解代数方程的阶数, 减小计算的存储量、降低舍入误差的积累。特别在直接求解平衡方程难于保证部分子区域内数值解的收敛时, 方法是有效的。

(2) 对同一小的子区域, 给出同样边界条件, 用局部逆得到解的精度比直接解平衡方程得到解的精度高两个量级。

(3) 假定全域边条件和子区域的边界条件都是精确的。对子区域的解而言, 在该区域上直接解平衡方程得到解的精度比用全区域直接解平衡方程得到解的精度高 1~2 个量级。

(4) 当区域内解函数值大小相差几个量级时要保证小值收敛的有效位数, 需要的网格点数是巨大的。表 3 显示, 对函数值大小仅差两个量级, 只要求对小值准确到有效位数 1~2 位, 所需网格点数就达 32 万之巨。倘若函数值大小数量级相差更大时, 可想而知所需网格点数可能是百万、千万, 甚而难于承受。

参考文献

- 1 W.H. 普雷斯等著. 数值方法大全—科学计算的艺术, 王璞等译. 兰州: 兰州大学出版社, 1991
- 2 牟宗泽等. 计算物理, 1996, 13 (1), 105~111
- 3 Doss S K, et al. SIAM J. Numer. Anal., 1979, 16 (5), 837~856
- 4 Hewett D W, et al. J. Comput. Phys., 1992, 101 (72), 11~24
- 5 Dipeso G, et al. J. Comput. Phys., 1993, 77, 33~45
- 6 Gruber R, et al. Comput. Phys. Comm., 1981, 21, 323~371
- 7 Manickam J, et al. Nuclear Fusion, 1987, 27 (9), 1461~1477
- 8 Hyman J M. J. Comput. Phys., 1977, 23, 124~134
- 9 Marchuk G. Difference methods and its extra-polation. Springer-verlag, 1983
- 10 徐萃薇编. 计算方法引论. 北京: 高等教育出版社, 1985