# 基础拓扑学讲义

尤承业 编著

北京大学出版社

# 基础拓扑学讲义

尤承业　编著

北京大学出版社
北　京

**图书在版编目(CIP)数据**

基础拓扑学讲义/尤承业编著. —北京：北京大学出版社,1997.11

ISBN 7-301-03103-3

Ⅰ.基…　Ⅱ.尤…　Ⅲ.拓扑-高等学校-教材　Ⅳ.O189

**书　　名：基础拓扑学讲义**

著作责任者：尤承业　编著

责任编辑：刘　勇

标准书号：ISBN [illegible]103-3/O·37[illegible]

出　版　者：北京[illegible]学出版[illegible]

地　　址：北京市[illegible]海淀区[illegible]校[illegible]　100871

电　　话：出版部 62[illegible]　[illegible]12　编辑部 62752032

排　印　者：北京大学印刷厂

发　行　者：北京大学出版社

经　销　者：新华书店

850mm×1168mm　32 开本　10 印张　250 千字

1997 年 11 月第一版　1997 年 11 月第一次印刷

印　　数：0001—3,000 册

定　　价：13.50 元

# 序　言

拓扑学是十分重要的基础性的数学分支，它的许多概念、理论和方法在数学的其他分支(特别是几何类和分析类分支)中有着广泛的应用，有的甚至已成为通用语言. 拓扑学在物理学，经济学等部门也有许多应用. 拓扑课已是综合性大学和许多师范院校数学系的一门重要课程.

北京大学开设拓扑学课程已有悠久历史，并于 1978 年出版我国第一本拓扑学教科书《拓扑学引论》. 本书编者从 1979 年以来就在北京大学数学系讲授这门课程，当时就选用《拓扑学引论》作为教材，并参照 1980 年 5 月教材编审委员会审定的《拓扑学教学大纲》作了删节和补充，以后又选用《基础拓扑学》(M. A. Armstrong 著，孙以丰译，北京大学出版社，1983)为教材和主要参考书. 在十多年的教学实践中，编者对本课程有了较深刻的理解，并积累了大量素材和经验，为编写本书作了充分的准备.

本书是贡献给初学拓扑学的读者的. 它为深入学习许多数学课程提供了必要的拓扑学基础知识，它也可作为学习和研究拓扑学的入门教材.

本书的内容可分为点集拓扑和代数拓扑两部分，侧重于后者.

点集拓扑部分介绍了关于拓扑空间、连续映射的最基本的概念，还介绍了乘积空间、商空间、紧致性和连通性等重要而常用的概念，以及它们的性质. 这部分内容与分析学有着密切联系，可看作分析学相应内容的提高和深化. 尽管我们的论述建立在公理化的定义的基础上，似乎并不直接用到分析学的知识，但具有良好的分析学基础，对接受和理解这部分内容是很有帮助的. 这部分内容还要求读者熟悉集合和映射的知识.

代数拓扑部分介绍了基本群，复叠空间，单纯同调群等代数拓扑中最简单、最直观的内容，它们都有很广泛的应用．这部分内容涉及到代数学的许多基本概念，例如群，Abel 群，自由循环群，同态，同构等等，要求读者对它们能够熟练的运用．

拓扑学是几何学的一个分支，许多概念都有很强的几何背景．但是在表达形式上它又是很抽象的．它的概念用公理化的方法建立；它没有分析学科那么多的计算，却大量运用逻辑推理．因此，它不需要许多知识上的准备，但需要良好的数学素养．反过来，学习拓扑学又能得到抽象思维和逻辑推理能力的训练．

本书是一学期的教材．根据编者的经验，用 72 学时可以讲完主要内容．如果放弃带 * 号的节和内容，将能更加从容些．如果学时还不够，有些章节可删去，不影响后面内容的学习，如第五章复叠空间，第七章单纯同调群（下）（在讲完第六章单纯同调群（上）后，介绍第七章的主要结果，跳讲第八章）．有的定理（命题）的证明比较复杂，其方法对本书其他部分又没有大的影响，也可以省略不讲．例如第二章第二节中的三个定理，第三章的闭曲面分类定理．

在本书的编写过程中，得到姜伯驹教授热情帮助．他在全书内容的取舍和编排方面都提出了很好的意见．有的论证的思路（例如对径映射的映射度的计算，命题 8.3）也是他提供的．在此谨表示衷心的感谢．

编　者

1996 年 10 月于北京大学

# 内 容 简 介

本书是拓扑学的入门教材. 内容包括点集拓扑与代数拓扑，重点介绍代数拓扑学中的基本概念、方法和应用. 全书共分八章：拓扑空间的基本概念，紧致性和连通性，商空间与闭曲面，同伦与基本群，复叠空间，单纯同调及其应用，映射度与不动点等. 每节配备了适量习题并在书末附有解答与提示. 本书叙述深入浅出，例题丰富，论证严谨，重点突出；强调几何背景，注意培养学生的几何直观能力；方法新颖，特别是关于对径映射的映射度的计算颇具新意. 本书把抽象理论与具体应用紧密结合，使学生得到抽象思维与逻辑推理能力的训练.

本书可作为综合大学、高等师范院校数学系的拓扑课教材，也可供有关的科技人员和拓扑学爱好者作为课外学习的入门读物.

# 目　　录

# 引　言

## （拓扑学的直观认识）

“什么是拓扑学？”这是许多初学者都会提出的问题．拓扑学是一种几何学，它是研究几何图形的．但是拓扑学所研究的并不是大家最熟悉的普通的几何性质，而是图形的一类特殊性质，即所谓“拓扑性质”．于是，要了解拓扑学就要知道什么是图形的拓扑性质．然而，尽管拓扑性质是图形的一种很基本的性质，它也具有很强的几何直观，却很难用简单通俗的语言来准确地描述．它的确切定义是用抽象的语言叙述的，这里还不能给出．下面介绍几个有趣的问题，它们涉及到的都是图形的拓扑性质，希望读者能从中得到关于拓扑性质的一些直观认识．

**一笔画问题和七桥问题**

**一笔画**是一个简单的数学游戏．平面上由曲线段构成的一个图形能不能一笔画成，使得在每条线段上不重复？例如汉字“日”、“中”都是可以一笔写出来的，而“田”和“目”则不能一笔写成．

显然，通常的几何方法在一笔画问题上是没有用的，因为“图形能不能一笔画成”和图形中线段的长度、形状等几何概念没有关系，要紧的是线段的数目和它们之间的连接关系，也就是说一笔画问题的关键是图形的整体结构．我们可以随意地将图形变形，如拉伸、压缩或弯曲等，甚至可将一些线段搬家（但保持端点不动），只要图形的整体结构不改变，“能不能一笔画出”这个性质是不会改变的．例如图 1 中的(a)和(b)都是“日”字的变形，都能一笔画出；(c)，(d)和(e)都是“田”字的变形，都不能一笔画出．

著名的**七桥问题**对拓扑学的产生和发展曾起了一定的作用，实质上它是一个一笔画问题．七桥问题是这样的：流经哥尼斯堡的

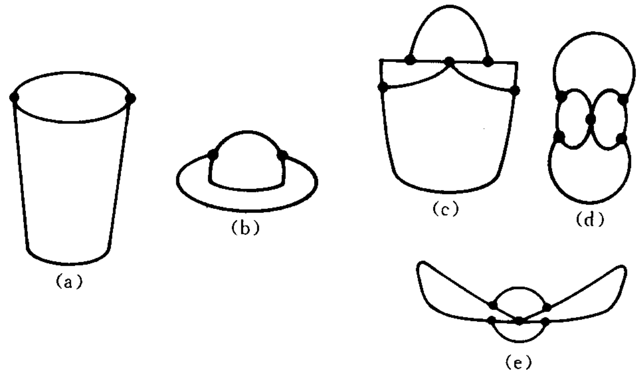


图 1

普雷格河的河湾处有两个小岛，七座桥连结了两岸和小岛(图 2 左图). 当地流传一个游戏：要求在一次散步中恰好通过每座桥一次. 很长时间里没有人能做到. 后来大数学家 Euler 研究了这个游戏. 他用点代表陆地(两岸和岛)，用连结各点的线代表桥，得到图 2 右图中的图形. 于是上述游戏变成这个图形能不能一笔画成的问题了. Euler 证明它是不能一笔画成的.

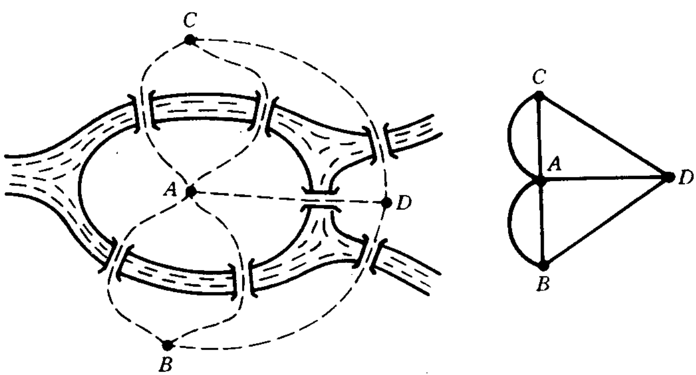


图 2

正是七桥问题和其他类似性质的问题，使 Euler 和他那个时

代的其他数学家开始认识到：存在着某种新的几何性质，它们和欧氏几何中研究的几何性质完全不同. 这种认识是拓扑学产生的背景.

### 地图着色问题

给地图着色时，要把相邻的国家（或区域）着上不同的颜色，以便容易地加以区分. 那么绘图员至少要准备多少种颜色才能给任何地图着色？这个问题看起来简单，却出人意料地难以解决. 图 3 中的地图虽只有四个区域，却是两两相邻的，因此它需用 4 种颜色着色. 这个例子说明上述问题的答案应不小于 4. 数学家明确提出这个问题不很久，证明了有 5 种颜色是够用的. 于是问题集中到“4 种颜色够不够？”上，就出现了著名的“**四色问题**”. 它从 1852 年由 F. Guthrie 提出后，直到本世纪七十年代才借助计算机得到肯定性的解答.

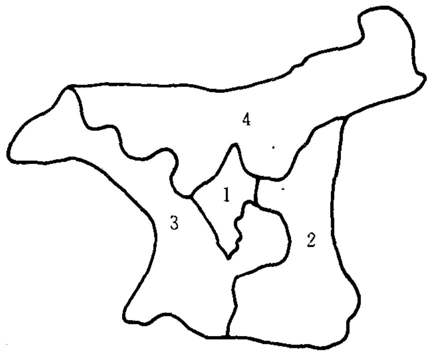

图 3

地图着色问题同一笔画问题一样，也具有“拓扑”特性：它与度量（区域的面积、边界线的长度等）和形状都没有关系，关键是区域的个数和它们的邻接关系；地图经过变形（缩放或作各种投影）所需颜色数不变.

### Euler 多面体定理

这是立体几何中的一个有名的定理：凸多面体的面数 $f$，棱数 $l$ 和顶点数 $v$ 满足 Euler 公式

$$f-l+v=2.$$

表面上看，似乎它和一笔画、地图着色问题不一样，凸多面体是平直图形，不能随意变形. 但只要对 Euler 多面体定理稍加推广，就可看出它的"拓扑"特性了.

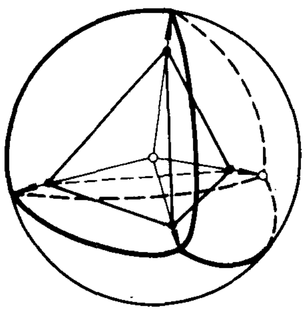

图 4

把多面体放进一个大球体内，使球心在多面体内部. 于是，从球心作的中心投影把凸多面体的棱映射成球面上的曲线（实际上是大圆弧），顶点映成球面上的点. 这些点和大圆弧构成球面上的一个**图**（网络）（图 4），它把球面分割成 $f$ 块，有 $l$ 条枝（大圆弧）和 $v$ 个节点.

一般地，球面上的图是由球面上有限个点（称为节点）和有限条曲线（称为枝）所构成的图形，它必须满足：

（1） 每条枝的端点是两个不同节点；

（2） 不同的枝不交叉，即不相交于内点；

（3） 每条枝不自交.

Euler 定理可以推广为

**定理 1** 球面上一个连通的图的节点数 $v$，枝数 $l$ 以及它分割球面所成的面块数 $f$ 满足公式

$$f-l+v=2.$$

这种推广了的 Euler 定理具有拓扑特性：一方面，当图在球面上变形时，$f$，$l$ 和 $v$ 这 3 个数不会变化；另一方面，当球面本身变形时（其上图也随着变形）$f$，$l$ 和 $v$ 也不会变化. 球面可以变形为椭球面、葫芦形或其他各种形状的曲面，对这些曲面定理 1 照样成立. 但有的曲面不能由球面变形而得到，例如环面. 事实上定理 1 对环面不适用，相应的定理为

**定理 2** 环面上一个连通图若分割环面成一些简单面块(即没有洞的面块),则面块数 $f$,图的枝数 $l$ 和节点数 $v$ 满足公式

$$f - l + v = 0.$$

对于更复杂一些的曲面,$f - l + v$ 是个负数.以上的事实说明整数 $f - l + v$ 与曲面上(适合条件的)图的选择无关,完全由曲面本身决定.这个数被称为曲面的 **Euler 数**,它反映出曲面的一种几何性质,当曲面被变形时,它是不会改变的.

以上几个问题显示出几何图形的一类特别的几何性质,它们涉及到图形在整体结构上的特性,这就是"拓扑性质".显然,它们与几何图形的大小、形状,以及所含线段的曲直等等都无关,也就不能用普通的几何方法来处理,需要有一种新的几何学来研究它们,这个新学科就是**拓扑学**(希文 Topology 的译音).也有人形象地称它为**橡皮几何学**,因为它研究的性质在图形作弹性形变时是不会改变的.

现在我们对拓扑性质作进一步的分析.如前所述,既然拓扑性质体现的是图形整体结构上的特性,可以随意地把图形作变形(如挤压、拉伸或扭曲等等),只要不把它撕裂,不发生粘连,从而不破坏其整体结构,拓扑性质将保持不变.把上述变形称为图形的"拓扑变换",那么拓扑性质就是几何图形在作拓扑变换时保持不变的性质.拓扑变换可用集合与映射的语言给出确切的描述.把图形 $M$ 变形为 $M'$,就是给出 $M$ 到 $M'$(都看作点集)的一个一一对应(因而不出现重叠现象,并不产生新点)$f: M\to M'$,并且 $f$ 连续(表示不撕裂),$f^{-1}: M'\to M$ 也连续(表示不粘连).这里所说的连续就是分析学中的连续概念,可用距离概念刻画.简单地说:从图形 $M$ 到 $M'$ 的一个一一对应 $f$,如果 $f$ 与 $f^{-1}$ 都是连续的,就称 $f$ 为从 $M$ 到 $M'$ 的一个**拓扑变换**,并称 $M$ 与 $M'$ 是**同胚的**.于是,**拓扑性质**也就是同胚的图形所共同具有的几何性质.拓扑学中往往对同胚的图形不加区别,因为它们的拓扑性质是一样的.

上面从拓扑变换或同胚概念来描述拓扑性质.反过来拓扑性

质又是研究图形同胚问题的一个有力武器. 判断两个图形是否同胚，这自然是拓扑学的一个基本问题. 如果能构造从 $M$ 到 $M'$ 的拓扑变换，当然 $M$ 与 $M'$ 同胚，可是当经过努力而构造不出拓扑变换时，我们并不能由此认定 $M$ 与 $M'$ 不同胚. 断定不同胚的有效途径是比较它们的拓扑性质，如果它们有不相同的拓扑性质，则它们一定不同胚. 例如日字形和田字形不同胚，因为前者能一笔写出，后者不能. 又如球面与环面的 Euler 数不相等，因此它们不同胚. 因此，寻找和研究图形的各种各样的拓扑性质是拓扑学的基本的研究课题.

规定拓扑变换时，映射的连续性是关键概念，因而它也是整个拓扑学的基本概念. 也可以说拓扑学是研究连续现象的数学分支. 连续性也是分析学的最基本的概念，因而拓扑学和分析学有着十分密切的关系. 拓扑学的概念、结果和方法广泛地应用到分析学的各个领域中. 特别是分析学中只和连续概念相关(而与可微性无关)的那些问题本质上都是拓扑问题. 著名的 **Brouwer 不动点定理**就是其中的一个例子. 把 $n$ 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中的子集

$$D^n := \left\{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 1 \right\}$$

称为 $n$ 维**单位球体**. Brouwer 定理说：$D^n$ 到自身的连续映射 $f: D^n \to D^n$ 一定有不动点，即存在点 $x \in D^n$，使得 $f(x) = x$. 当 $n=1$ 时，不难用闭区间上连续函数的性质证明此定理(请读者自己证明). 当 $n \geqslant 2$ 时，就不好办了. 由于定理中 $f$ 只是连续的，因此分析学中与微分有关的工具都是用不上的. 本书中将用基本群和同调群作为工具给出它的证明.

另一个例子是 Jordan 曲线定理. 简略地讲，该定理说平面(或球面)被它上面的一条简单闭曲线分割为两部分. 这是一个应用广泛的著名定理，直观上容易接受，仿佛是不证自明的. 但仔细想想，会发现它并不简单. 首先定理怎样用严谨的数学语言叙述？为此必须用到拓扑学的术语，如简单闭曲线就是与圆周同胚的图形，它在

几何上可以是相当复杂的;所谓“被分割为两部分”,则要用拓扑概念“连通”来严格叙述.定理不但需要证明,并且还不是三言两语所能完成的.我们在本书的第四章中将以基本群为工具给出它的一个证明.

随着学习的深入,读者还将见到许多有趣的应用拓扑学解决分析学问题的例子.拓扑学与微分几何、动力系统等学科也都有着十分密切的联系.

拓扑学是一门年青而富有生命力的学科.它萌发于17、18世纪,但到19世纪末才开始得到发展.本世纪以来,拓扑学是数学中发展最迅猛,研究成果最丰富的研究领域,成为十分重要的数学基础学科.拓扑学有多个研究方向,早期分为一般拓扑学和代数拓扑学,后来又出现了微分拓扑学和低维流形等研究方向.本书是代数拓扑学的入门教材,重点是介绍代数拓扑学中最简单的内容和一些基础知识.但我们也需要介绍拓扑空间和连续映射等最基础的拓扑学概念.如前所述,拓扑学是用抽象的语言和公理化的方式来阐述其概念的.特别是广泛使用集合论的语言.我们希望读者先要有较好的有关集合论的基础知识.下面择要介绍本书中最常用的有关集合与映射的概念和性质,既为学习正文作准备,也是为了统一术语和符号.

1. 集合的运算

**常用记号**

设 $X$ 是非空集合,记 $2^X$ 是 $X$ 的全体子集(包括 $X$ 及空集 $\varnothing$)的集合,称为 $X$ 的**幂集**.

一点 $x$ 构成的集合记作 $\{x\}$.

$x\in A$ 表示 $x$ 是集合 $A$ 中的一个元素.

$x\overline{\in} A$(或 $x\notin A$)表示 $x$ 不是集合 $A$ 的元素.

$A\subset B$ 表示 $A$ 包含于 $B$(含 $A=B$ 的情形).

$A\not\subset B$ 表示 $A$ 不包含于 $B$,即 $A$ 中有不属于 $B$ 的元素.

现在列出 $2^X$ 中的几种运算及它们的性质.

**交** $\cap$　如 $A\cap B$ 是 $A$ 和 $B$ 之交；$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 表示集合族 $\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中所有集合之交.

**并** $\cup$　如 $A\cup B$ 是 $A$ 和 $B$ 之并；$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ 表示集合族 $\{A_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 中所有集合之并.

交并运算各自都满足交换律与结合律.

交与并有分配律：

(1) $B\cup\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\cup A_\lambda)$；

(2) $B\cap\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B\cap A_\lambda)$.

**差** $\backslash$　$A\backslash B$ 表示属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素的集合.

**余集**　$A^c:=X\backslash A$.

显然 $A\backslash B=A\cap B^c$.

**De Morgan 公式**：

(3) $B\Big\backslash\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(B\backslash A_\lambda)$；

(4) $B\Big\backslash\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(B\backslash A_\lambda)$.

特别当 $B=X$ 为全集时，(3)和(4)分别变为

(5) $\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$；

(6) $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c$.

2. 映射

设 $X$ 和 $Y$ 都是集合，**映射** $f: X\to Y$ 是一个对应关系，使 $\forall x\in X$，对应着 $Y$ 中的一点 $f(x)$（称为 $x$ 的像点）.

若 $A\subset X$，记 $f(A):=\{f(x)|x\in A\}$，是 $Y$ 的一个子集，称为 $A$ 在 $f$ 下的**像**. 若 $B\subset Y$，记 $f^{-1}(B):=\{x\in X|f(x)\in B\}$，称为 $B$ 在 $f$ 下的**完全原像**（或简称**原像**）.

当 $f(X)=Y$ 时，称 $f$ 是**满**的；若 $X$ 中不同点的像点也不同，则称 $f$ 是**单**的. 既单又满的映射称为一一对应. 当 $f$ 是一一对应

时，它就有一个逆映射，记作 $f^{-1}$. 此时，$\forall B\subset Y$，$f^{-1}(B)$有两种理解：$B$ 在 $f$ 下的原像；$B$ 在 $f^{-1}$下的像，它们的意义是一致的.

关于 $f$ 下的像与原像有如下规律：

(1) $f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$；

(2) $f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right)=\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(B_\lambda)$；

(3) $f^{-1}(B^c)=(f^{-1}(B))^c$；

(4) $f^{-1}(B\backslash D)=f^{-1}(B)\backslash f^{-1}(D)$；

(5) $f\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)=\bigcup_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$；

(6) $f\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\subset\bigcap_{\lambda\in\Lambda} f(A_\lambda)$，当 $f$ 单时为相等；

(7) $f(f^{-1}(B))\subset B$，当 $f$ 满时为相等；

(8) $f^{-1}(f(A))\supset A$，当 $f$ 单时为相等.

设 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都是映射，$f$ 与 $g$ 的**复合**(或称**乘积**)是 $X$ 到 $Z$ 的映射，记作 $g\circ f: X\to Z$，规定为 $g\circ f(x)=g(f(x))$，$\forall x\in X$. 则有

(9) $g\circ f(A)=g(f(A))$；

(10) $(g\circ f)^{-1}(B)=f^{-1}(g^{-1}(B))$.

集合 $X$ 到自身的**恒同映射**(保持每一点不变)记作 $\mathrm{id}_X: X\to X$(常简记为 id). 若 $f: X\to Y$ 是映射，$A\subset X$，规定 $f$ 在 $A$ 上的限制为 $f|A: A\to Y$，$\forall x\in A$，$f|A(x)=f(x)$. 记 $i: A\to X$ 为**包含映射**，即 $\forall x\in A$，$i(x)=x$. 于是，$i=\mathrm{id}|A$，$f|A=f\circ i$.

3. 笛卡儿积

设 $X_1$ 和 $X_2$ 都是集合，称集合

$$X_1\times X_2:=\{有序偶(x,y)\mid x\in X, y\in Y\}$$

为 $X_1$ 与 $X_2$ 的**笛卡儿积**. 称 $x$ 和 $y$ 为$(x,y)$的**坐标**.

$n$ 个集合的笛卡儿积 $X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 可类似地定义.

记 $X^n=\overbrace{X\times X\times\cdots\times X}^{n个}$. 例如 $\boldsymbol{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_i\in\boldsymbol{R}\}$.