

系统建模 与数学模型

福建科学技术出版社



系统建模与数学模型

● 贺建勋

宋健

一九九四年四月廿六日

(闽)新登字 03 号

系统建模与数学模型

贺建勋

福建科学技术出版社出版、发行

(福州得贵巷 59 号)

福建省新华书店经销

福建省科发电脑排版服务公司排版

三明日报社印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 10.25 印张 4 插页 239 千字

1995 年 6 月第 1 版

1995 年 6 月第 1 次印刷

印数:1—1 200

ISBN 7-5335-0886-6 /O·19

定价:20.50 元

书中如有印装质量问题,可直接向承印厂调换

前 言

1985年,我在美国圣路易斯华盛顿大学访问研究时,Rodin教授曾向我赠送了几本由他主编的国际刊物《数学建模》(MATHEMATICAL MODELLING, an International Journal),略读之余,我感到这一课题很新颖也很重要。后来发现美国许多大学都开设了《数学模型》的课程。就这样,数学建模和数学模型引起了我的注意和重视。但由于有其它研究任务在身,当时无暇顾及这一新的领域。1989年5月至8月,我在意大利国际理论物理中心访问工作3个月,在完成访问任务之余,特意收集了一些有关数学建模方面的资料。回国后不久,就给研究生开设了《系统建模与数学模型》的课程,并对此做过一些学习和探讨,深感这一问题对我国学者的重大意义和实用价值。由于当时国内学者自己编著的《数学模型》只有两本,而国内外尚未发现系统建模的著作,这就形成了我撰写本书的动机和决心。

马克思曾指出:“一种科学,只有在成功地运用数学时,才算达到真正完善的地步”。根据联合国教科文组织调查的结果表明:“当前世界科学研究工作的一大特点是所有各门科学的数学化”。但是,任何科学要运用数学,就必须建立相应的数学模型。对于非生命的物理和化学等系统的建模,通常有其规律可循,而对于生命系统,社会、经济系统的建模,尚无普遍规律和一般方法,只能凭借渊博的学识,掌握多种多样的建模方法和技巧,积累丰富的实际建模经验,才有可能建立比较符合实际的满意模型。

我们所指的系统建模,就是构造所研究的对象—客观实际系

统一的模型，虽然可以构造系统的各种不同形式的模型，但本书所指的系统模型主要是数学模型，这是本书取名为“系统建模与数学模型”的本意所在。同时，本书试图从系统的观点出发，利用系统工程的思想和方法探讨系统建模的一般原理，某些建模的规律、技巧和方法，并将具体的建模方法和技巧融于生命系统与社会经济系统的数学模型实例之中。

全书共分八章，第一章讨论系统模型与建模的概念和一般建模方法；第二、三章讨论数学模型的概念、分类和各种建模方法；第四、五章讨论生命科学方面常用到的一些数学模型；第六、七章讨论经济系统建模和经济管理模型；第八章介绍系统科学基础理论中的耗散结构理论、突变理论、协同学以及其中某些重要数学模型。

本书对于自然科学工作者和工程技术人员来说，可以提供一些思考问题和处理问题的新方法、新思路；对于那些希望利用数学模型、运用定量与定性分析相结合的方法来处理 and 评判问题的社会科学方面的读者，将会从书中获得新的、有益的启示；同时本书也可以作为大专院校有关专业教师和研究生的参考书或教材。

在本书撰写和出版过程中，国家科委主任宋健教授给作者以极大的鼓励并题写了书名；福建省科委副主任林炳承高级工程师对该书出版给予极大的关心和支持；厦门大学 91 级系统工程专业研究生李武、李豪、吴昊、吴天、易英和肖炳烜帮助整理书稿；王应明博士、李武硕士仔细阅读书稿并提出了许多宝贵意见；我的助手皮年春也给予多种帮助和支持。在此，谨向他们表示衷心的感谢。

作者主观上希望写好此书，但限于学识，且成书仓促，加上目前尚无这方面的定型著作，错误和不足之处在所难免，恳请读

者批评指正。

贺建勋

1994 年 5 月于厦门大学

目 录

第一章 系统模型概念	(1)
§ 1 引言	(1)
§ 2 模式与模型	(3)
§ 3 系统建模	(11)
§ 4 模型的作用和对模型的要求	(17)
第二章 数学模型及其多样性	(20)
§ 1 什么是数学模型	(20)
§ 2 数学模型的多样性和复杂性	(27)
§ 3 数学模型的分类	(51)
第三章 数学建模与常用的一些建模方法	(53)
§ 1 数学建模的原则	(53)
§ 2 数学建模的一般考虑	(55)
§ 3 数学建模的主要步骤	(58)
§ 4 图解建模法	(60)
§ 5 量纲分析法	(69)
§ 6 层次分析法	(73)
§ 7 概率统计法	(83)
§ 8 模糊数学法	(92)
§ 9 灰色系统建模法	(98)
第四章 种群动态学—种群发展及其资源开发模型	(106)
§ 1 单个物种的增长模型	(106)
§ 2 生物资源的合理开发模型	(110)
§ 3 互相作用的物种模型	(117)

§ 4 离散时间的种群度量模型	(122)
§ 5 多种类生物资源的合理开发	(128)
附录 最大值原理简介	(142)
第五章 人口发展的数学模型	(146)
§ 1 人口发展总数的多种模型及其评价	(147)
§ 2 人口发展过程的连续模型	(153)
§ 3 人口发展过程的离散模型	(157)
§ 4 人口发展的随机模型	(161)
§ 5 人口发展的系统动力学模型	(165)
§ 6 我国人口的预测和发展趋势	(173)
第六章 经济系统建模与经济模型	(177)
§ 1 经济模型与建模	(177)
§ 2 列昂捷夫模型—投入产出分析	(185)
§ 3 宏观经济模型	(191)
§ 4 微观经济模型	(197)
§ 5 生产函数及其在评估科技进步中的应用	(197)
§ 6 经济增长的数学模型	(214)
§ 7 NASH 均衡模型与大道定理	(221)
第七章 经济管理中的常用数学模型	(233)
§ 1 存贮管理	(233)
§ 2 生产管理决策模型	(237)
§ 3 市场均衡的蛛网模型	(240)
§ 4 消费者行为理论	(241)
§ 5 生产者理论与最优价格	(245)
§ 6 国民收入的最优积累率问题	(249)
§ 7 生产的最优计划与管理	(251)
第八章 某些系统理论中的数学模型	(255)
§ 1 耗散结构理论及其模型实例	(256)
§ 2 突变理论及其实例	(280)

§ 3 协同学概述及实例	(296)
--------------------	-------

系统建模与数学模型

一种科学，只有在成功地应用数学时，才算达到真正完善的地步。任何一门科学，只有当它真正和数学联系起来，它才算真正发展起来。

——马克思——

一切数学都在现实世界中可以找到它的原型。

——思格斯——

第一章 系统模型概念

本章将阐述与系统模型有关的各种概念，系统建模和模型在当代世界的作用和地位。

§ 1 引言

人们将研究的对象（客体）看成一个系统。对所研究的系统通过类比、模拟或抽象手段建立起各种模型，称为系统建模。所建立的模型称为系统模型或简称模型。数学模型是那些利用数学语言来模拟系统的一类模型。

利用模型来认识事物，从事学习，进行抽象思维和研究事物的发展规律并指导我们的行动，这已经成为人们生活中的一种常识。例如：儿童的纸叠小船、画画、玩具和阅读看图识字，就是利用模型来进行学习和认识事物；生产中经常使用各种图表来指挥生产或开展劳动竞赛；工程施工中利用设计图纸来从事新的工

项目的建设；作战时利用地图和沙盘模型来指挥战争；研制和发射人造卫星或载人飞船时必须先通过模型分析和模拟试验；人口问题、生态问题、经济、社会问题等都可以通过数学模型来说明、预测、控制和分析等。任何一项研究或新系统的研制，更是离不开事物的类比、直观想象和形象思维，亦即离不开模型。

随着科学技术的迅速发展，生产力的不断提高，社会的不断进步，几乎在所有的领域，人们都希望对各种自然现象、社会现象、生产过程、实验设计、科研活动等各种问题建立模型或数学模型，以便正确认识事物，分析问题，进行预测、控制和改造，或者创造一个新的系统。因此，我们可以说，通过模型，人们可以认识世界、改造世界、创造世界。由此我们看到系统建模和模型的研究，已引起了人们广泛的兴趣和高度的重视，它们已成为今天分析、认识、发展、更新或探索、创新任何一个系统不可缺少的手段和重要方法。随着科学技术的进步，其作用越大，效果越好。

对系统建模或模型化，实质上是控制思想方法的体现。因为我们通常遇到的系统，特别是系统工程中的系统，几乎都是复杂的可控系统，对它们进行分析、设计、评估和研制或检验时，要涉及到系统本身和系统环境的许多因素，这就需要根据控制论的思想，通过模型化方法来分析、表达和研究系统，以突出系统和环境的最主要的影响因素。

系统建模从狭义上说，可以理解为对实物、设计结构或设想事物按缩小或放大尺寸、结构层次、表现形态、时间进程或其他特征制成仿真体的过程。这个仿真体就是系统的模型。系统工程和控制论中的建模则是广义意义上的，它是对一切可控系统按其最本质的特征，根据总体最优化的目标，对其进行物理抽象和数学抽象的过程。

模型化方法与通常实验方法不同，它不要求对事物、过程、现象或设想本身进行科学试验，只要求对这些事物、过程、现象或设想的模型通过模拟或仿真进行验证。模型化方法与一般的抽象方法不同，它要求对事物、过程、现象或设想通过抽象化之后，能以某种文字、符号、图表、实物或数学方程来表征其形象化的结构，然后对它们进行分析、研究和检验，并导出结论。所以模型化方法是一种比较简便、省时和节约的研究方法，越来越得到重视；随着科学技术的发展，所得结果越来越可靠和切实可行。但是从科学研究的方法论上来说，自然最有效和完整的研究方法，应该是把建模方法、实验方法和抽象方法三者能有机地结合起来，对照检验，取长补短，以期得到最客观、准确和完善的真理。

§ 2 模式与模型

人们经常将模型与模式混为一谈。实际上，它们是既有区别又有联系的两个概念。模式、模型与数学模型之间的包含关系为：

模式 $\supset$ 模型 $\supset$ 数学模型

一、模式

模式通常是指某种事物或现象的标准形式或可使人照着做的标准式样。有时也可简单理解为模样、式样或形式。

模式是一个比模型广泛得多的概念，也可以称为广义模型。它可以指具体的事物，也可以指形象的思考。具体事物的模式是指一种富有代表性的样板或方式，已成为某种标准样式的东西。例如：建筑方面有我国的古典模式、西洋模式和中西结合模式；医疗方面有所谓西医方式、中医方式和中西医结合方式；社会制度方面，有社会主义模式、资本主义模式和某种混合模式。经济模

式是指一种典型的经济结构或经济体制的形式。如：完全以自由竞争为主的资本主义经济模式，或称西方经济模式；以社会主义市场经济为主体的中国经济模式。形象思考模式是指人们对其思考的内容、思考方式或思考结果的描述、模拟或概括。可分为心智模式、言辞模式、图形模式、数学模式等。心智模式即人们对事物或现象的心智意象，也就是内心的观念或想象。如：当前对经济体制改革的种种设想。言辞模式是指对事物或现象用口头或文字所作的描述或说明。如：计算机的操作说明书等。图形模式就是利用图形、图表、图片或流程图等方式所作的描述。如：程序设计框图。数学模式则以数学符号、数学方程式所作的描述。如：马克思的资本主义扩大再生产模式 $=C+V+M$ ，其中C表示固定资产，V表示可变资产，M表示剩余价值。

由此可见，模式包含了模型和数学模型，是一个很广泛的概念。

二、模型与原型、模型的定义

原型是指原始模型，模型是模仿原型而来的。它们是相对而言的，有时很难严格区分开来。模型与原型以及模型的概念还没有一个完全统一的说法，在不同的科学领域中出现不同的理解。我们只能视其情况而确定它们的具体内容。

例如在抽样检查中的样本、商品中的陈列品、艺术品中的原作有时叫原型，有时叫模型。

舞台上的演员、服装表演或艺术作品中的模特儿，有时可以视为原型，有时又可视为模型。

模型概念的基础在于模型本身与某一研究对象之间存在着某种相似性。这种相似性可以是外表的，也可以是内部结构的（如狗、猴与人的内部结构相似而外部完全不同）；还可以是某种行为

相似，而外表及内部结构可能毫无共同之处（如飞机与飞鸟等）。如果在两个对象之间存在着原型——模型的关系，若 A 为原型，则 B 称为 A 的模型。记作 $A \sim B$ 或 $B \sim A$ 。

对哲学家或某些社会科学工作者来说，通常认为：若 $A \sim B \sim C \sim D \sim E$ ，则其中任何一个如 C 可以视为对象 A, B, D, E 的模型，也可以视为它们的原型。

对工程和自然科学工作者来说，通常希望能严格分清原型与模型。实际上，原型是指原始模型或原来的类型。模型是用来模

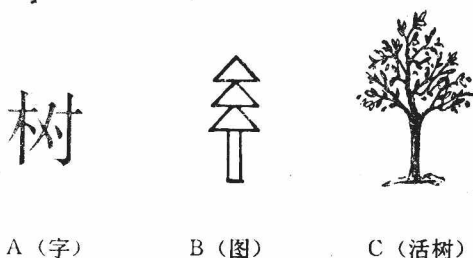


图 1—1

仿或说明它们的东西。例如图 1—1：活树 C 是原型。A, B 是模型，这是显然的事实。舞台上的刘胡兰，显然是模型，而原型则是牺牲了的那个刘胡兰。不过原型与模型有时确实也只能辩证地理解。

模型的定义尚未规范，说法甚多。现叙述几个常见的定义：

定义 1 设 S 是原型，我们称 M 是 S 的模型，假如满足条件：

(1) 存在 M 的部分的某个集合，它的每个组成部分与 S 的一个组成部分相对应；

(2) M 组成部分之间的某些关系与对应的 S 的组成部分之间的关系相类似。

例如：机器人的某些外部特征与内部特征与人的某些外部特

征及内部特征相对应。机器人可以视为人的模型，人为原型。

地球仪和地图均可以视为地球的模型。

定义 2 模型是对实际系统的描述、造型、模仿或抽象。

定义 3 模型以实物、图形或符号来代表一个真实系统或一项工程及其组成部分之间的相互关系，以便使问题和目标具体而明确，并求得最优解答。

例如：建立沙盘实地模型以指挥战争；用图形表示一个工厂各生产车间的关系和进度； $m\ddot{x}=F(t)$ 表示牛顿第二定律。

定义 4 模型是指某一系统（包括现实世界的事物、现象、过程或拟研制系统）的简单描述，或其部份属性的模仿。

定义 5 模型是一种过程或行为的定量或定性的代表，它能显示对所考虑的目标具有决定性意义。

例如，人口理论中的 Logistic 方程

$$dN/dt = N(a - bN)$$

定义 6 模型是对客观事物的特征及其变化规律的一种表示或抽象，而且往往是指对事物中那些所要研究的特定属性的定量抽象。

定义 7 对现实现象或过程或其中某一部分的任何一种概念性描述都是一个模型。

例如，微观经济的数学模型，公共汽车行车路线和时间表以及各种抽象的定义等都是模型。

定义 8 模型就是研究情况的有关性质的模拟物。例如，公路图、地质图和植物标本都是模型，它们分别模拟一部分地球表面的不同侧面。

在模型中，这些概念总是与数量测定有关，而且相互关系以数学方程予以表达。总之模型是一个真实系统或实践活动的简单描述，在模型中略去了所研究问题的非本质的特性。具体采用何

种定义合适，常与所研究的系统、目的和要求有关。

可以从不同的角度或不同的要求来建立模型。大体上可以建立三种不同的模型。即同构模型（构造、规模大小（元素）关系（运算）一样，维数相同，）相似模拟（构造大体相同、大小不一样，维数相同），简化模型（维数变小，尺寸变小）。

模型至少要有以下几个基本部分组成：

- (1) 系统：即描述的对象；
- (2) 要素：构成系统的各种成分或子系统；
- (3) 关联：各要素或子系统之间以及整个系统与外部环境之间的关联；
- (4) 约束条件：系统所处环境和约束条件。

若要建立数学模型，则尚需增加一些组成部分。

因此，系统模型应具有以下特征：

- (1) 它是系统整体化的描述，模仿或抽象；
- (2) 它是由说明系统本质或特征的诸因素所构成；
- (3) 它集中表现这些因素之间的关系。

此外，系统模型还应有它的目的性、客观性、清晰性、简洁性、适应性和整体性的要求。

三、模型分类

模型可以有各种不同的形式，研究各种不同的功能和不同的用途，且可以具有各种不同的特征等，很难有统一的分类原则。因此对模型可以作不同的分类，现按不同情况分类如下：

1. 按模型表征分类，通常可以分为四种形式的模型：形象模型、模拟模型、符号模型、仿真模型。

(1) 形象模型：保留实体模型的外型特征，只对实体系统进行放大或缩小。如：相片、地球仪、飞机模型等。

(2) 模拟模型：也称为类比模型，它是基于不同的物理领域（如力学的，电学的，热学的，流体的等）的系统中的各自的变量之间服从类似的或相同的规律，据此可以制订出物理意义完全不同的一类比拟和类推模型。例如在一定条件下可以用电路模拟气动系统；又如地图可用不同的颜色表示不同的地形或海拔高度；在电模拟中，分别用电压，电流和电容去模拟机械运动中的速度，力和质量等。

(3) 仿真模型：它是通过在数字、模拟或混合（数字或模拟）计算机上运行的程序表达的模型。采用适当的仿真语言或程序；其他类型一般也能转变为仿真模型。

(4) 符号模型，是一种借助文字、字母、符号、图表或数学表达式来描述现实系统的模型。如数字模型、网络模型、系统动力学模型以及其他各种解释性结构模型。

2. 按总体观点分类：物理模型与思考模型。

物理模型：以实体系统（原型）的功能、结构或形象为模型的组成元素，制作缩小或放大尺寸的模型。如战地模型；分子结构模型等，模拟模型也属于这一类。

思考模型：是在认识和熟悉原型之后，根据一定的逻辑变换规则和我们的要求而构造的一种模型。如各种数学模型、直观想象模型和系统结构模型等。

3. 按运动特征与时间依存性分类：静态模型与动态模型。

静态与动态是相对的，正常运转可以视为静态。

由于基本空间的复杂性，可以先建立静态模型再过渡到动态模型，静态模型不含时间 t ，动态模型与时间 t 有关。

4. 按粗细程度或精确程度分类：简化模型与精确模型；同态模型与同构模型；定性模型与定量模型；线性模型与非线性模型。

5. 按模型形式分类：数学模型、逻辑模型、图像模型、探索