

运筹学

《运筹学》试用教材编写组 编

YUN CHOU XUE

清华大学出版社

内 容 简 介

运 筹 学

李维锋	郭耀煌	甘应爱	田 丰
郑大本	李梅生	胡运权	钱頌迪
顾基发	李 德	编著	

清华大学出版社

内 容 简 介

本书内容包括：线性规划、整数规划、非线性规划、动态规划、图与网络方法、排队论、存贮论、对策论、决策论、模型论等十部分共二十章。主要介绍基本原理和方法，并注意结合经济管理专业实际。书中除了有大量例题外，每一部分后面还有一定数量的习题，以供教学之用。

本书可作为高等工科院校经济管理工程专业和其他有关科系的教材或教学参考书，也可供广大工矿企业、经济、管理部门的工程技术人员和干部参考。

李 德 主编
钱 颖 迪 主编
李 德 李 颖 李 颖 李 颖
李 德 李 颖 李 颖 李 颖

运 筹 学

李 德 主编
钱 颖 迪

☆

清华大学出版社出版

北京 清华园

清华大学印刷厂排版

中国科学院印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

☆

开本：787×1092 1/16 印张：33 1/2 字数：798 千字

1982年2月第1版 1989年10月第6次印刷

印数：200001—205000 定价：6.50元

ISBN 7-302-00310-6/F·19

编者的话

随着我国“四化”建设的迅速发展，国民经济各部门、各工矿企业，对经济和管理工作提出越来越高的要求，因此近年来许多高等工科院校相继恢复和新建了经济管理工程系。

在教育部的支持下，1979年在上海召开了教育部直属高等工科院校以及其他有关院校参加的第一次经济管理工程专业座谈会；会上各校交流了情况，讨论了专业设置、教学计划、课程安排等。并商定分别制定运筹学等六门课程的教学大纲。

1980年11月在天津大学召开第二次座谈会，到会学校有二十多所。会上除交流情况外，还讨论了六门学科的教学大纲。《运筹学》组在深入讨论大纲的过程中，大家一致认为：各校的经济管理工程系，大多处于恢复、新建或筹建阶段，都感到师资力量不足和图书资料缺乏，但又迫切需要有一本适合于经济管理工程专业用的运筹学教材。经过协商，决定集体编写，以解决教学之急需。参加编写工作的有：天津大学、华中工学院、西南交通大学、吉林工业大学、哈尔滨工业大学、清华大学等六所院校的有关同志。并邀请中国科学院系统科学研究所顾基发、田丰两同志参加了部分编写工作。

各部分内容有下列同志执笔（按目录先后为序）

- | | |
|------------|---|
| (一) 线性规划 | 钱颂迪 胡运权(哈尔滨工业大学管理工程系) |
| (二) 整数规划 | 李维铮(天津大学基础科学系) |
| (三) 非线性规划 | 郭耀煌(西南交通大学管理工程教研室) |
| (四) 动态规划 | 甘应爱(华中工学院数学系) |
| (五) 图与网络方法 | |
| ① 十章、十一章 | 田丰(中国科学院系统科学研究所运筹室)
郑大本(吉林工业大学经济管理工程系) |
| ② 十二章 | 郑大本 |
| (六) 排队论 | 李维铮 |
| (七) 存贮论 | 李梅生(华中工学院数学系) |
| (八) 决策论 | 李德(清华大学经济管理工程系) |
| (九) 对策论 | 李德 |
| (十) 模型论 | 顾基发(中国科学院系统科学研究所运筹室)
李德 |

授完本书约需150学时，由于各校情况不同，所以在选取教材内容时留有一定余地，以供各校取舍。本书除可供经济管理工程类专业作为教材外，还可用作高等院校其它有关科系的教材或教学参考书。

本书在编写过程中得到教育部及六院校有关各系领导和一些同志们的大力支持与关怀；也得到中国科学院和中国数学会运筹学会的大力支持与帮助。中国科学院研究员、中国数学会运筹学会付理事长许国志同志，中国科学院付研究员、中国数学会运筹学会秘书长桂湘云同志，特为本书写了序言。桂湘云、马仲蕃、董泽清、施闰芳、赖炎连、甘兆煦、刘振宏、魏权龄等同志参加了审稿工作，我们在此表示感谢。

由于编者水平有限，再加上时间紧迫，一定会有不妥之处，希广大读者批评指正，不胜感谢。

编者

1981.9

- (北京工业学院工业工程系) 刘汝明 熊德寿
- (天津大学) 曹志平
- (清华大学) 曹志平
- (上海交通大学) 曹志平
- (华中理工大学) 曹志平
- (南京理工大学) 曹志平
- (东南大学) 曹志平
- (浙江大学) 曹志平
- (复旦大学) 曹志平
- (上海交通大学) 曹志平
- (华东理工大学) 曹志平
- (天津大学) 曹志平
- (清华大学) 曹志平
- (上海交通大学) 曹志平
- (华中理工大学) 曹志平
- (南京理工大学) 曹志平
- (东南大学) 曹志平
- (浙江大学) 曹志平
- (复旦大学) 曹志平
- (上海交通大学) 曹志平
- (华东理工大学) 曹志平

序 言

为了实现我国的四个现代化,我们不但要学习和掌握先进的科学技术,而且要学习和掌握现代化的科学管理方法。近几年来,我们从管理实践中更加认识到,由于计划和管理不当,在时间、人力、物力和资金等方面造成了很大的浪费,从而给我国的经济建设带来了严重损失。为了适应现代化管理的需要,最近几年在我国许多工科院校中,相继建立了一些工业经济、工商管理或系统工程等系或专业,并且都开设了运筹学的课程。

运筹学是近四十年来发展起来的一门新兴学科。它的目的是为行政管理人员在作决策时提供科学的依据。因此,它是实现管理现代化的有力工具。运筹学在生产管理、工程技术、军事作战、科学试验、财政经济以及社会科学中都得到了极为广泛的应用。

应用运筹学去处理问题时,有两个重要的特点:一是从全局的观点出发;二是通过建立模型,如数学模型或模拟模型,对于要求解的问题得到最合理的决策。在建立模型和求解的过程中,往往要用到一些数学方法和技巧。因此,许多运筹学工作者,特别是中国的运筹学工作者,往往都是来自数学专业。由于这个原因,目前国内流行的有关运筹学的教科书,多半偏重于数学方法的论证,对于解决实际问题时所需要的建立模型的概念与解题的技巧不够重视。这种情况不太适宜于工科院校学生的需要。本书是专为工科院校的经济管理专业的学生编写的。内容上力求深入浅出,文字通俗易懂,方法上着重于思路和几何的直观解释,并尽量结合经济管理专业举一些实例。

本书是在较短时间内完成的,作为第一次尝试,编写一本适宜于工科院校的运筹学教科书,无疑对我国的运筹学教学和促进运筹学在我国的发展都将是有意義的。

中国数学会运筹学会 许国志
桂湘云

1981-9

目 录

一、线性规划

第一章 单纯形法原理	1
§ 1 线性规划问题及其数学模型	1
1.1 问题的提出	1
1.2 图解法	4
1.3 线性规划问题的标准型	6
1.4 线性规划问题的解	9
§ 2 线性规划问题的几何意义	11
2.1 基本概念	11
2.2 基本定理	11
§ 3 单纯形法	15
3.1 举例	15
3.2 初始基本可行解的确定	19
3.3 最优性检验	20
3.4 基变换	22
3.5 迭代(旋转运算)	24
§ 4 单纯形法的计算步骤	26
4.1 单纯形表	26
4.2 单纯形法的计算步骤	28
§ 5 单纯形法的进一步讨论	31
5.1 人工变量法	31
5.2 检验数的几种表示方法	35
5.3 单纯形法小结	36
§ 6 应用举例	38
第二章 单纯形法的进展	47
§ 1 单纯形法的矩阵描述	47
§ 2 改进单纯形法	50
§ 3 对偶问题的提出	56
3.1 从经济意义上提出对偶问题	56
3.2 从数学方面提出对偶问题	57
§ 4 线性规划的对偶理论	58
4.1 原问题与对偶问题的关系	58

4.2 对偶问题的基本性质.....	62
§ 5 对偶问题的经济解释——影子价格.....	67
§ 6 对偶单纯形法.....	68
§ 7 灵敏度分析.....	70
7.1 系数变化范围的确定.....	71
7.2 灵敏度分析的举例.....	75
第三章 运输问题.....	82
§ 1 运输问题的数学模型.....	82
§ 2 表上作业法.....	83
2.1 初始方案的给定——最小元素法.....	84
2.2 改进方案的方法之(一)——闭回路法.....	89
2.3 改进方案的方法之(二)——位势法.....	91
§ 3 单纯形法与运输问题.....	94
§ 4 产销不平衡的运输问题及其求解方法.....	96
§ 5 应用举例.....	101
习题一.....	104

二、 整 数 规 划

第四章 整数规划.....	112
§ 1 整数规划问题的提出.....	112
§ 2 分枝定界解法.....	113
§ 3 割平面解法.....	117
§ 4 0—1 型整数规划.....	124
4.1 引入 0—1 变量的实际问题.....	124
4.2 0—1 型整数规划的解法.....	126
§ 5 指派问题.....	129
习题二.....	135

三、 非 线 性 规 划

第五章 基本概念和一维搜索.....	137
§ 1 基本概念.....	137
1.1 引言.....	137
1.2 极值问题.....	140
1.3 凸函数和凹函数.....	144
1.4 凸规划.....	150
§ 2 一维搜索.....	152
2.1 斐波那契 (Fibonacci) 法.....	152

2.2	0.618 法 (黄金分割法)	157
2.3	切线法	159
2.4	抛物线逼近法	160
第六章	无约束极值问题	163
§ 1	梯度法 (最速下降法)	163
1.1	梯度法的基本原理	163
1.2	计算方法	165
§ 2	共轭梯度法	168
2.1	共轭方向	169
2.2	正定二次函数的共轭梯度法	171
2.3	非二次函数的共轭梯度法	176
§ 3	变尺度法	178
3.1	基本原理	178
3.2	计算步骤	180
3.3	对变尺度法的进一步讨论	183
§ 4	步长加速法	185
4.1	基本原理	185
4.2	计算步骤	186
§ 5	单纯形法	192
5.1	单纯形法的基本思路	192
5.2	计算步骤	194
第七章	有约束极值问题	197
§ 1	最优性条件	197
1.1	可行方向和起作用约束的概念	197
1.2	库恩—塔克条件 (一阶必要条件)	198
1.3	二阶充分条件	200
1.4	二次规划	203
§ 2	可行方向法	206
§ 3	用线性规划逐步逼近非线性规划的方法	208
3.1	用线性逼近法求解线性约束条件下的非线性规划	208
3.2	用线性逼近法求解非线性约束条件下的非线性规划	212
§ 4	制约函数法	214
4.1	外点法	214
4.2	内点法	217
习题三		221

四、动态规划

第八章 动态规划的基本方法	225
§ 1 多阶段决策问题	225
§ 2 动态规划的基本概念和基本方程	227
2.1 动态规划的基本概念	228
2.2 动态规划的基本思想和基本方程	230
2.3 构成动态规划模型的条件	236
§ 3 动态规划的基本定理	244
§ 4 函数迭代法和策略迭代法	247
4.1 函数迭代法	247
4.5 策略迭代法	249
第九章 动态规划应用举例	256
§ 1 资源分配问题	256
§ 2 生产与存贮问题	264
§ 3 复合系统的工作可靠性问题	277
§ 4 排序问题	278
§ 5 设备更新问题	281
习题四	283

五、图与网络方法

第十章 图的基本概念	286
§ 1 图	287
§ 2 连通图	288
§ 3 子图	289
§ 4 树	290
4.1 树及其性质	290
4.2 图的部分树	291
4.3 最小部分树问题	293
第十一章 网络分析	295
§ 1 有向图	295
§ 2 最短路问题	296
2.1 引例	296
2.2 最短路算法	297
2.3 应用举例	302
§ 3 网络最大流问题	303
3.1 基本概念与基本定理	303

3.2 寻求最大流的标号法.....	307
§ 4 最小费用最大流问题.....	309
§ 5 中国邮递员问题.....	313
5.1 一笔画问题.....	313
5.2 奇偶点图上作业法.....	313
第十二章 网络方法在计划工作中的应用.....	317
§ 1 网络图.....	318
1.1 网络图.....	318
1.2 绘制网络图的规则.....	319
§ 2 关键路线与时间参数.....	328
2.1 路与关键路线.....	328
2.2 时间参数.....	328
2.3 时间参数的计算方法.....	333
§ 3 制定最优的计划方案.....	342
3.1 缩短工程进度.....	342
3.2 最低成本日程.....	343
3.3 有限资源的合理安排.....	347
习题五.....	350

六、排队论

第十三章 排队论的基本知识.....	356
§ 1 基本概念.....	356
1.1 排队过程的一般表示.....	356
1.2 排队系统的组成和特征.....	357
1.3 排队模型的分类.....	359
1.4 排队问题的求解.....	360
§ 2 到达间隔的分布和服务时间的分布.....	361
2.1 经验分布.....	362
2.2 普阿松流.....	365
2.3 负指数分布.....	367
2.4 爱尔朗分布.....	368
第十四章 几个排队系统的分析.....	370
§ 1 单服务台的情形 $M/M/1$ 模型.....	370
1.1 标准的 $M/M/1$ 模型.....	370
1.2 系统的容量有限制 (N) 的情形.....	376
1.3 顾客源为有限 (m) 的情形.....	379
§ 2 多服务台的情形 $M/M/c$ 模型.....	381

2.1 标准的 $M/M/c$ 模型	381
2.2 系统的容量有限制 (N) 的情形	833
2.3 顾客源为有限 (m) 的情形	385
§ 3 一般服务时间 $M/G/1$ 模型	387
3.1 Pollaczek—Khintchine 公式	388
3.2 定长服务时间 $M/D/1$ 模型	388
3.3 爱尔朗服务时间 $M/E_k/1$ 模型	389
§ 4 经济分析——系统的最优化	391
4.1 排队系统的最优化问题	391
4.2 $M/M/1$ 模型中最优服务率 μ	392
4.3 $M/M/c$ 模型中最优服务台数 c	394
附录一 推导普阿松公式	395
二 统计假设检验	396
三 瞬态解	397
四 关于 $P_n(t)$ 的方程	399
习题六	400

七、存贮论

第十五章 存贮论	404
§ 1 存贮论的基本概念	404
1.1 存贮问题的提出	404
1.2 存贮论的基本概念	405
§ 2 确定性存贮模型	407
2.1 模型一：不允许缺货，生产时间很短	407
2.2 模型二：不允许缺货，生产需一定时间	411
2.3 模型三：允许缺货，生产时期很短	413
§ 3 随机性存贮模型	415
3.1 模型四：需求是随机离散的	417
3.2 模型五：需求是随机离散的， (s, S) 型存贮策略	419
3.3 模型六：需求和拖后时间都是随机离散的	424
§ 4 其它类型存贮问题	428
习题七	429

八、决策论

第十六章 决策的基本类型与方法	431
§ 1 决策问题的提出	431
§ 2 决策的概念与类型	432

§ 3 确定情况下的决策问题.....	434
§ 4 风险型情况下的决策.....	434
4.1 最大可能准则.....	435
4.2 期望值准则.....	436
4.3 决策树法.....	437
4.4 矩阵法.....	442
4.5 灵敏度分析.....	446
§ 5 不确定情况下的决策.....	448
5.1 乐观准则.....	448
5.2 悲观准则.....	449
5.3 乐观系数准则.....	450
5.4 等可能性准则.....	451
5.5 “后悔值”决策准则.....	452
第十七章 效用理论.....	454
§ 1 什么是效用.....	454
§ 2 效用曲线.....	455
§ 3 效用曲线的类型.....	457
§ 4 效用曲线的应用.....	459
第十八章 决策过程.....	461
§ 1 决策结构.....	461
§ 2 决策过程.....	461
§ 3 决策中的几个问题.....	462
习题八.....	463

九、对 策 论

第十九章 矩阵对策.....	467
§ 1 引言.....	467
1.1 什么叫对策.....	467
1.2 问题的提出——对策现象.....	467
1.3 对策的一个典型例子.....	467
§ 2 对策现象的三个基本要素.....	468
2.1 局中人.....	468
2.2 策略.....	469
2.3 一局对策的得失.....	469
§ 3 矩阵对策.....	470
3.1 什么叫矩阵对策.....	470
3.2 矩阵对策的数学模型.....	470

3.3	最优纯策略	473
3.4	混合策略与混合扩充	479
3.5	矩阵对策的解法	483
	习题九	496

十、模型论

第二十章	模型论	498
§ 1	引言	498
1.1	什么叫模型	498
1.2	模型的种类	498
1.3	模型的作用和用途	500
§ 2	如何建立模型	500
2.1	建立模型的一般要求	500
2.2	建立模型的常用分析方法	501
2.3	建立模型的一般步骤	508
2.4	模型的修正与近似	509
§ 3	经济、管理中常用的几种模型	511
3.1	常用的几种模型	511
3.2	模型的使用概况	513
	习题十	514
	参考资料	516

一、线性规划

线性规划是运筹学的一个重要分支。自一九四七年，丹捷格 (G.B. Dantzig) 提出了求解一般线性规划问题的方法——单纯形法之后，线性规划在理论上趋向成熟，在实际中的应用日益广泛与深入。特别是能用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后，它适用领域更广泛：从解决技术问题中最优化，到工业、农业、商业、交通运输业、军事的计划和及管理及决策分析都可以发挥作用；从范围来看，小到一个小组的日常工作和计划的安排，大至整个部门，以至国民经济的计划的最优化方案的提出，它都有用武之地。它具有适应性强，应用面广，计算技术比较简便的特点。它是现代管理科学的重要基础和手段之一。

第一章 单纯形法原理

§ 1 线性规划问题及其数学模型

1.1 问题的提出

在生产管理和经营活动中经常提出的一个问题是：如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源，以便得到最好的经济效果。例如：

例 1 某工厂在计划期内要安排生产 I、II 两种产品，这些产品分别需要在 A、B、C、D 四种不同的设备上加工。按工艺规定，产品 I 和 II 在各设备上所需要的加工台时数示于表 1-1 中。已知各设备在计划期内有效台时数分别是 12、8、16 和 12。（一台设备工作一小时称为一台时）该工厂每生产一件产品 I 可得利润 2 元，每生产一件产品 II 可得利润 3 元。问应如何安排生产计划，才能得到利润最多？

这问题可以用以下的数学语言来描述。

假设 x_1 , x_2 分别表示在计划期内产品 I 和 II 的产量。因为设备 A 的有效台时是 12，这是一个限制产量的条件。所以在确定产品 I

和 II 产量时，要考虑不能超出设备 A 的有效台时数，即可用不等式表示为

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

类似地，对设备 B, C 和 D 得到以下不等式

表 1-1

		设备			
		A	B	C	D
产品	I	2	1	4	0
	II	2	2	0	4

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

该工厂的目标是：在不超过所有设备能力的条件下，如何确定产量 x_1, x_2 ，以便得到最大的利润。若用 z 表示利润。这时 $z = 2x_1 + 3x_2$ 。

综合上述，这计划问题可归纳为：
满足约束条件：

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

使得工厂的目标（利润） $z = 2x_1 + 3x_2$ 为最大。

例 2 靠近某河流有两个化工厂（见图 1-1）。流经第一个工厂的河水流量是每天 500 万立方米；在两个工厂之间有一条流量为每天 200 万立方米的支流。第一个工厂每天排放工业污水 2 万立方米；第二个工厂每天排放出工业污水 1.4 万立方米。从第一个工厂排出的污水流到第二个工厂之前，有 20% 可自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于 0.2%。若这两个工厂都各自处理一部分污水，第一个工厂处理污水的成本是 1000 元/万立方米，第二个工厂处理污水的成本是 800 元/万立方米。现在要问在满足环保要求的条件下，每厂各应处理多少污水，才能使两厂总的处理污水费用最小？



图 1-1

这个问题也可用数学语言来描述。

设第一个工厂每天处理污水量为 x_1 万立方米，第二个工厂每天处理污水量为 x_2 万立方米。从第一个工厂到第二个工厂之间，河流中污水含量要不大于 0.2%，由此可得

$$\frac{2 - x_1}{500} \leq \frac{2}{1000}$$

流经第二个工厂后，河流中的污水量仍要不大于 0.2%，这时有

