21世纪高等教育规划教材

概率论

牛燕影　郑国萍　主编

中国农业科学技术出版社

21世纪高等教育规划教材

概 率 论

牛燕影　郑国萍　主编

中国农业科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

概率论／牛燕影，郑国萍主编．—北京：中国农业科学技术出版社，2009.5
ISBN 978－7－80233－854－8

Ⅰ．概…　Ⅱ．①牛…②郑…　Ⅲ．概率论－高等学校－教材　Ⅳ．O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 052741 号

责任编辑　崔改泵
责任校对　贾晓红

出 版 者　中国农业科学技术出版社
北京市中关村南大街 12 号　邮编：100081
电　　话　(010)82106626(编辑室)(010)82109704(发行部)
(010)82109703(读者服务部)
传　　真　(010) 82106624
网　　址　http://www.castp.cn
经 销 者　新华书店北京发行所
印 刷 者　昌黎县第一印刷厂
开　　本　787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张　15.5
字　　数　320 千字
版　　次　2009 年 5 月第 2 版　2009 年 5 月第 1 次印刷
定　　价　25.00 元

《概率论》编委会

主　编　牛燕影　郑国萍

副主编　苑运良　郭亚君　杨晓静

参　编　（按姓氏笔画排序）

王金然　李建红　岳小云

高明晶　高瑞平

主　审　申玉发　王增富

前 言

概率论作为数学的一个分支，在生产管理和社会经济生活中有着十分广泛的应用。它是高等院校理、工、农、医、经济、管理等各专业的重要基础课程，对于培养提高学生的思维能力、科学态度、创新精神及量化分析问题的能力具有十分重要的作用，其基本内容也是硕士研究生入学考试的必考知识。

本教材根据高等院校理、工、农、医、经济、管理等概率论课程教学大纲和课程教学要求，集编写人员多年教学实践经验，以强化基础、服务专业、学以致用为基本原则而编写。

本教材有如下几大特点：

（1）在保证数学概念准确性的前提下，尽量借助生活实例、有关的数学史料，使枯燥乏味的数学教学变得直观形象、生动有趣。

（2）理论推导和证明以解释清楚有关结论为度，淡化比较繁杂的数学形式推导，不过分追求理论上的系统性。

（3）注重数学概念与实际问题的结合，在例题和习题的选配上注重概率论的方法在各个专业上的具体应用，提高学生数学建模能力，培养应用意识。

（4）在各章编有与基本内容配套的辅导材料，为学生答疑解惑，安排了丰富的典型例题分析，便于学生自学。

（5）每章末都配有两个类别的习题，其中习题 A 为与本章基本内容配套的题目，习题 B 则是为了便于学生复习巩固所学知识而设置的题目。

（6）教材后面配有 3 个附表，方便学生查阅使用。

全书共分五章，主要内容包括：概率论的基本概念、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理与附录。

讲授本教材的全部基本内容需要 30 ~ 40 学时，教材中带“ * ”的内容可根据教学实际适当取舍。本教材除适用于高等院校理、工、农、医、经济、管理等专业本、专科外，还可作为成人高校、各本科院校的二级学院、民办高校和各类高职高专院校概率论课程的教材和教学参考资料。为方便读者，教材中给出了所有习题的详解或参考答案。

本书由燕山大学牛燕影、河北科技师范学院郑国萍担任主编，燕山大学苑运良、河北科技师范学院郭亚君、杨晓静担任副主编。

各章编写分工如下：第一章、第二章由牛燕影和郑国萍编写；第三章由牛燕影、郑国萍

和杨晓静编写；第四章、第五章由苑运良和郭亚君编写。王金然、李建红、岳小云、高明晶和高瑞平分别对各章资料的搜集与整理、习题解答、图表绘制做了细致的工作。

申玉发、王增富担任本教材的主审，从编写大纲、教材体例、文字和内容的增减作了全面的审改。在本书的编写过程中，我们参考了很多相关的书籍和资料，汲取了很多同志的宝贵经验。在此，我们向这些著作的作者表示深深的谢意。本教材的编辑出版得到了付兴国教授的大力帮助，同时也得到了燕山大学和河北科技师范学院有关领导的大力支持，在此谨表谢意。

由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2009 年 2 月

目　　录

第一章　概率论的基本概念

§1.1　随机事件

一、随机现象

自然现象和社会现象是多种多样，丰富多彩的。有一类现象，在一定条件下必然发生，例如，上抛一石子一定下落，同性电荷必相斥，异性电荷必相吸等，这类现象称为**确定性现象**。在自然界和社会上也还存在另一类现象，例如，在相同的条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷结果是什么；用同一门火炮在一定条件下进行射击，各弹着点不尽相同，个别炮弹的弹着点可能偏离目标而有随机性的误差，但大量炮弹的弹着点则表现出一定的规律性，如一定的命中率，一定的分布规律等。这类现象称为**随机性现象**。

人们经过长期实践并深入研究发现，对于上述这类现象，虽然就每次试验或观察而言，其结果具有不确定性，但在大量重复试验和观察下，其结果又呈现出某种规律性。如抛一枚质地均匀的硬币，尽管事先无法知道哪一面向上，但是当抛硬币的次数相当多时，出现正面和反面的次数约为 1∶1。查看各国人口统计资料，发现新生儿中男女约各占一半等。

随机现象所呈现的这种规律性称为随机现象的**统计规律性**。概率论就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。

概率论的理论和方法应用非常广泛，几乎遍及所有科学技术领域。例如，使用概率论的方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报以及产品的抽样检验等。

二、随机试验

研究随机现象，首先要对研究对象进行观察试验。这里的试验，指的是随机试验。如果每次试验的可能结果不止一个，且事先不能肯定会出现哪一个结果，这样的试验称为**随机试验**，常用 E 表示，例如

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 、反面 T 出现的情况。

E_2：将一枚硬币抛掷三次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况。

E_3：将一枚硬币抛掷三次，观察正面出现的次数。

样本空间：所有可能结果组成的集合

随机事件：样本空间的子集

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数。

E_5：测试在同一工艺条件下生产出的灯泡的寿命。

三、样本空间与随机事件

现代集合论为表述随机试验的结果提供了一个方便的工具。对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的。我们把随机试验的所有可能结果组成的集合称为**样本空间（或基本空间）**。样本空间用 Ω 表示。样本空间的元素称为**样本点**，记作 ω。

下面写出上面试验 $E_k(k = 1,2,\cdots,5)$ 的样本空间 Ω_k：

$\Omega_1 = \{H,T\}$,

$\Omega_2 = \{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$,

$\Omega_3 = \{0,1,2,3\}$,

$\Omega_4 = \{1,2,3,4,5,6\}$,

$\Omega_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$。

注 样本空间的元素是由试验的目的所确定的。例如，在 E_2 和 E_3 中同样是将一枚硬币连抛三次，由于试验的目的不一样，其样本空间也不一样。

在随机试验中，我们往往会关心某个或某些结果是否会出现。一般，我们称试验 E 的样本空间的子集为**随机事件**，简称**事件**。例如，在 E_4 中 $A = \{1, 3, 5\}$ 就是“出现的点数为奇数”这一事件。在每次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**。

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**，常用 e 表示。例如，试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$；试验 E_4 有6个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$。

样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是自身的子集，在每次试验中它总是发生的，称为**必然事件**。空集 Φ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，它在每次试验中都不发生，称为**不可能事件**。

四、事件间的关系与事件的运算

事件是一个集合，因而事件间的关系与运算自然按集合论中集合之间的关系与运算来处理。下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据事件发生的含义，给出它们在概率论中的含义。

（1）包含关系 $A \subset B$

如果事件 A 发生则事件 B 必发生，则称事件 B 包含事件 A（A 是 B 的子事件），记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$。

$\overline{A\cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ $\overline{A\cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称事件 A 与事件 B **相等**，记作 $A = B$ 。

（2）和事件

事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件。当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生。$A \cup B$ 也可记作 $A + B$ 。

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件；称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件。

（3）积事件

事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件。当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生。$A \cap B$ 也可记作 AB。

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件。

（4）差事件 A发生同时且B不发生

事件 $A - B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件。当且仅当 A 发生同时 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生。

（5）互不相容（互斥）事件

若 $A \cap B = \Phi$ ，则称为事件 A 与 B 是互不相容事件，或称互斥事件。指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生。基本事件是两两互不相容的。

（6）对立事件 互逆事件 A,B必有且仅有一个发生

若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \Phi$ ，则称事件 A 与 B 是对立事件，或称互逆事件。指的是事件 A 与 B 中必有一个发生，且仅有一个发生。事件 A 对立事件记为 $\bar{A}$, $\bar{A} = \Omega - A$ 。

（7）完备事件组

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足：$\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega, A_i \cap A_j = \Phi, 1 \leqslant i < j \leqslant n$ ，则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组。

用图 1－1 至图 1－6（集合的文氏图）可直观地表示以上事件之间的关系与运算。在进行事件运算时，经常用到下述定律。设 A, B, C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$；

结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；

德·摩根定律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$；$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$。

例 1 设一个工人生产了三个零件，记 $A_i = \{$第 i 个零件是正品$\}$ $(i = 1,2,3)$，试表示：

（1）没有一个零件是次品；

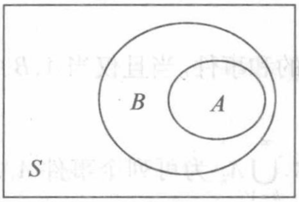

图 1－1

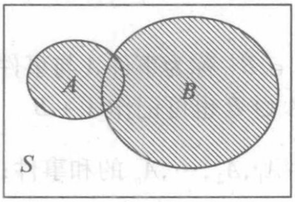

图 1－2

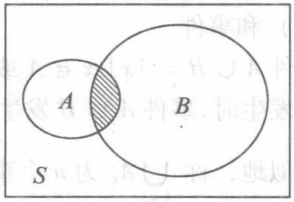

图 1－3

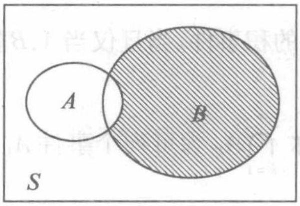

图 1－4

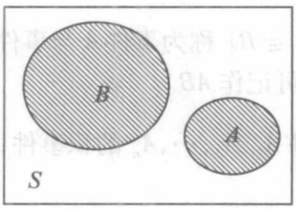

图 1－5

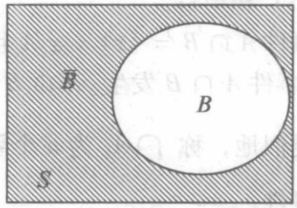

图 1－6

（2） 只有第一个零件是次品；

（3） 恰有一个零件是次品；

（4） 至少有一个零件是次品。

解 （1）“没有一个零件是次品” 言外之意是“三个零件均为正品”，故可表示为：

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_1 A_2 A_3 \text{；}$$

（2） 只有第一个零件是次品表示为：$\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3 = \bar{A}_1 A_2 A_3$；

（3） 恰有一个零件是次品表示为：$\bar{A}_1 A_2 A_3 \cup A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3$；

（4） 至少有一个零件是次品表示为：$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3 = \overline{A_1 A_2 A_3}$。

例 2 设 A 和 B 是任意二事件，化简下列运算：

（1） $(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B})$；（2） $AB+\bar{A}B+A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}-\overline{AB}$。

解 （1） 由事件的运算性质，有 $A \cdot A = A \cap A$ $B\bar{B} = B \cap \bar{B}$

$(A+B)(A+\bar{B}) = AA + A\bar{B} + BA + B\bar{B} = A + A(B+\bar{B}) = A$，

$(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}) = \bar{A}\bar{A} + \bar{A}\bar{B} + B\bar{A} + B\bar{B} = \bar{A} + \bar{A}(B+\bar{B}) = \bar{A}$，

$(A+B)(A+\bar{B})(\bar{A}+B)(\bar{A}+\bar{B}) = A\bar{A} = \Phi$。

$B + \bar{B} = \Omega$

（2） 由事件的运算性质，有

$AB+\bar{A}B+A\bar{B}+\bar{A}\bar{B}-\overline{AB} = (A+\bar{A})B + (A+\bar{A})\bar{B} - \overline{AB} = B + \bar{B} - \overline{AB} = \Omega - \overline{AB} = AB$。

$f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B) - f_N(AB)$

§ 1.2 频率与概率

一、频率

一个随机试验有许多可能的结果，人们常常希望知道某些结果出现的可能性有多大。为此，先介绍事件的频率的概念。

1. 频率

若事件 A 在 N 次试验中出现 n 次，称 $f_N(A) = \frac{n}{N}$ 为事件 A 在 N 次试验中出现的频率，n 为频数。

2. 频率的性质

(1) $0 \leqslant f_N(A) \leqslant 1$；

(2) $f_N(\Omega) = 1$，$f_N(\Phi) = 0$；

(3) $f_N(A \cup B) = f_N(A) + f_N(B) - f_N(AB)$。

例 1 投硬币试验

众所周知，掷一枚均匀的硬币，事先无法知道哪一面向上。在大量投掷时，正面和反面出现的次数“差不多”，即出现正面和反面的机会是几乎相等的。试验结果如表 1－1 所示。

表 1－1

试验人	投掷次数 N	出现正面次数 n	频率（出现正面次数 n/投掷次数 N）
德·摩根	2 048	1 061	0.5181
蒲　丰	4 040	2 048	0.5069
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.4923

由表 1－1 可知：当试验次数 N 增加时，正面出现的频率（即正面出现的次数 n 与总的试验次数 N 之比）$\frac{n}{N}$，都在 $\frac{1}{2}$ 左右。

二、概率

频率的重要意义在于：一方面，它能一定程度地反映事件 A 发生的可能性的大小；另一方面，它比较简单，容易掌握。用频率来刻画事件发生的可能性大小是直观的，但有缺点，

因为它有随机波动性。不过，当 N 逐渐增多时，频率 $f_N(A)$ 逐渐稳定于某个常数 $P(A)$，即当 N 很大时，就有 $f_N(A) \approx P(A)$。这个数 $P(A)$ 是客观存在的，即对于每一个随机事件 A，总有这样一个数 $P(A)$ 与之对应，而且还可以推想 $P(A)$ 也具有频率的几条性质。因此，用稳定值 $P(A)$ 来刻画事件发生的可能性大小是比较恰当的，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率。

1. 概率的统计定义

定义 1　事件 A 出现的频率 $f_N(A)$ 随着试验次数的增大，而在区间 $[0, 1]$ 上的某个数字 p 附近摆动，称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即 $P(A) = p$。

在此需要区分“频率”和“概率”这两个概念：

（1）频率具有随机性，它反映的是某一随机事件出现的频繁程度，即随机事件出现的可能性。

（2）概率是一个客观存在的常数，它反映了随机事件的属性。在实际问题中，往往不知 $P(A)$ 为何值，当试验次数充分大时的事件 A 出现的频率为它的近似值，这时可取 $P(A) = f_N(A)$，这正是该定义的优点。

由概率的统计定义与频率的关系，可知概率的性质。

2. 概率的性质

（1）$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

（2）$P(\Omega) = 1$，$P(\Phi) = 0$；

（3）（加法公式）$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$；

推广到三个事件的加法公式

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$；

若 A, B 互不相容，则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$；

将性质 3 推广，若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ ;$$

（4）$P(A) = 1 - P(\bar{A})$；

（5）若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$；

例 2　若 $ABC \subset D$，求证：$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) \leqslant 2$。

证　由性质（5），有

$$\begin{aligned} P(D) &\geqslant P(ABC) = P(AB) + P(C) - P((AB) \cup C) \\ &\geqslant P(AB) + P(C) - 1 = P(A) + P(B) - P(A \cup B) + P(C) - 1 \\ &\geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2, \end{aligned}$$

重要思维，不停作用

即

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) \leqslant 2\text{。}$$

§1.3 古典概型

一、古典概型的概念

如果试验具有下面两个特点：

（1）样本空间的元素（样本点）只有有限个，如 n 个，记 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$；

（2）每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}。$$

各概率相等

这时所讨论的问题称为**古典概型**。

古典概型在概率论中占有相当重要的地位，一方面，由于它简单，对它的讨论有助于直观理解概率论的许多基本概念，因此，人们常从古典概型开始引入新的概念；另一方面，古典概型概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题中都有重要应用。

二、古典概型的计算

定义 2　设试验 E 是古典概型，其样本空间 S 由 n 个样本点组成，事件 A 由 k 个样本点组成，则定义事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{事件}A\text{包含的样本点数}}{\text{样本空间中样本点总数}}。$$

称此概率为**古典概率**。这种确定概率的方法称为**古典方法**。

这样就把求概率问题转化为计数问题。排列组合是计算古典概率的重要工具。

下面我们就来介绍如何计算古典概率。

这里我们先简要复习一下计算古典概率所用到的基本计数原理。

1. 加法原理

设完成一件事有 m 种方式，第一种方式有 n_1 种方法，第二种方式有 n_2 种方法，…，第 m 种方式有 n_m 种方法，无论通过哪种方法都可以完成这件事，则完成这件事总共有 $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 种方法。

例如，某人要从甲地到乙地去，可以乘火车，也可以乘轮船。火车有两班，轮船有三班，问乘坐不同班次的火车或轮船，共有几种方法？回答是：有 3+2=5 种方法。

2. 乘法原理

设完成一件事有 m 个步骤，第一个步骤有 n_1 种方法，第二个步骤有 n_2 种方法，…，第 m 个步骤有 n_m 种方法，必须通过每一步骤，才算完成这件事，则完成这件事共有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times$

n_m 种不同的方法。

例如，若一人有三顶帽子和两件背心，问他可以有多少种打扮？可以有 $2\times3=6$ 种打扮。

加法原理和乘法原理是两个很重要的计数原理，它们不但可以直接解决不少具体问题，同时也是推导下面常用排列组合公式的基础。

三、排列、组合的几个简单公式

1. 排列

从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的排列总数为

排列

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}。$$

$k=n$ 时称为全排列

$$A_n^n = A_n = n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1 = n!。$$

从 n 个不同元素中取 k 个（允许重复）元素的排列总数为

$$n\cdot n\cdots n = n^k 。$$

例如，从装有 4 张不同卡片的盒中有放回地摸取 3 张，共有 $4\times4\times4=4^3=64$ 种可能取法。

2. 组合

从 n 个不同元素中取 k 个不同元素的组合总数为

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}。$$

C_n^k 常记作 $\binom{n}{k}$，排列数与组合数的关系为 $A_n^k = C_n^k\cdot k!$。

四、古典概率计算举例

例 1 从 0，1，2，…，9 十个数字中任取一个数字，求取得奇数的概率。

解 基本事件总数 $n=10$，设事件 A 表示取得奇数数字，则它所包含的基本事件数 $k=5$，因此所求概率为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{5}{10} = 0.5 。$$

例 2 在数 1 ~ 100 中，任取一数，求这个数能被 2 或 3 或 5 整除的概率。

解 设 A 表示取出的数能被 2 整除，B 表示取出的数能被 3 整除，C 表示取出的数能被 5 整除，则 $A\cup B\cup C$ 表示取出的数能被 2 或 3 或 5 整除。