

二十世纪西方哲学译丛

证明与反驳

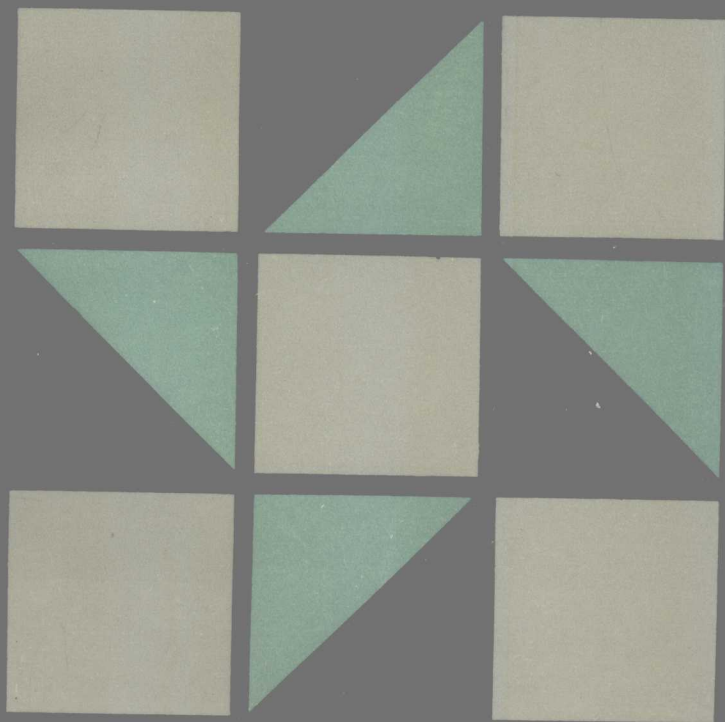
——数学发现的逻辑

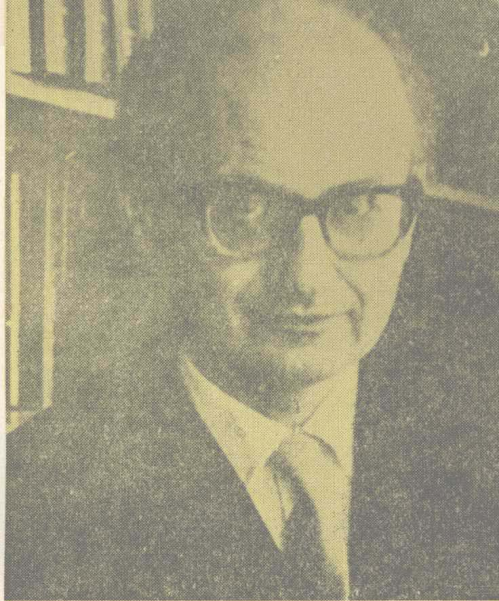
Proofs and Refutations

[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

康宏逵 译

上海译文出版社





证明与反驳

——数学发现的逻辑

Proofs and Refutations

[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

康宏逵 译

上海译文出版社

Imre Lakatos

Edited by John Worrall and Elie Zahar

PROOFS AND REFUTATIONS:

The Logic of Mathematical Discovery

Cambridge University Press Cambridge 1976

根据剑桥大学出版社1976年英文版译出

证明与反驳

——数学发现的逻辑

[英]伊姆雷·拉卡托斯 著

约翰·沃勒尔 编

[英] 伊利·扎哈尔 编

康宏逵 译

上海译文出版社出版、发行

上海延安中路 955 弄 14 号

全国新华书店经销

上海市印十二厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 7.25 插页 3 字数 157,000

1987 年 10 月第 1 版 1987 年 10 月第 1 次印刷

印数: 1-67,000册

书号: 2188·44 定价: 1.90 元

译者的话

(向读完作者的话的读者说的话)

我初译此书是在廿年前。廿年来，始终未敢轻信“逻辑”概念能从外部强行绷开。

可是，“我不在乎包装”，很有点自恃其理地喜欢着拉卡托斯的这本书。他那只上写“数学发现逻辑”的包装袋里实实在在有东西，是他花了五个年头调查两个数学案例得来的几种批评模式、几条助探规则。五年攻下两例，空包装袋公司决不容这样的低效率的。敬之者就不会恭维他才华横溢。溢出的是心血。还是这位拉卡托斯，后来恃才标新，不再耐心调查公理化集合论这个案例，其“准经验数学观”不也乏得可以么？

这本书的大功劳，据译者看，是向无冲突的数学史观杀了一刀。较之科学，数学内部的冲突更难被正视，自然是数学太神圣了的缘故。错的便不配享有“数学”之名，最多只能算安徒生的丑小鸭，呆在数学的史前期里任成鸭们调侃。作者叫你睁大眼睛。你看见了，今日的大一统源于昨日的大混战。这里有猜想保卫派与反驳派之战，有内容保存派与增加派之战，有概念收缩派与绷开派之战，有归纳派与演绎派之战，犬牙交错，好不热闹。加上作者巧于理性再造，持久战浓缩成几幕速决战，更显得扣人心弦。于是，对数学发展是一往无前的和平建设这种传统观念，你非打个问号不可了。

冲突可以促进数学生长，总有点费解。作者给你细讲了几条理解线索中的一条：证明与反驳互为触发剂，协同作用于数学知识的革新。尽管他爱用“虚假性反传导原理”这样大而无当的字眼儿，其实并没有什么高深的道理。但经他点破，在助探论上倒也颇有些分量。他的引理并入法、多证多驳法是好模式，不过怪物校正法、怪物除外法、例外除外法也不可笼统地归入违禁品。他告诉我们，助探观点不同于逻辑观点，要求数学家审时度势，怎么干有利于知识生长就怎么干。这是真知灼见。数学(和科学)的目标毕竟不是但求不错。若是，数学家尽可一味说重言句，或者更干脆，不张口。

新概念(新方法)的形成是数学史上的里程碑。在这方面，作者很讲了几件新鲜事情，如概念绷开式的反驳、证明生成的理论概念、分类和语言动力学、朴素反例与理论反例的对立。我一面叹服他的眼力，一面又大起疑心，不敢把概念形成全嫁给证明和由反例诱发的证明分析。看来，他举的“与球面同胚”和“单连通性”这两个例子正好能校正成跟他的概念生成模式作对的反例。按历史原貌，欧拉猜想的哥西证明不过是朴素证明。哥西毫不觉察他作了拓扑变换、欧拉示性数是拓扑性质，同代人也都相差无几。当时猜想和证明遭到了画框、环形面的反驳，但朴素的证明分析没有得出表述新引理所需要的上述两大概念，人们反而求助于“坑道”、“内隐多边形”这等朴素的术语，作了例外收容式的蹩脚处理(见本书第108页注^①)。拉卡托斯显然说不清这两大概念的诞生过程，只得指派一个至少不比梅比乌斯、李斯丁、黎曼拓扑意识少的教师来作拉卡托斯想象的理论证明分析。这位教师的“发现”，与抄袭无异。总之，说到概念形成，我总感到尚有数不清的未解之谜。经验主义解释很荒唐，准经验主义解释同样无法令人满意。虽然一强调例子，一

强调反例，基本精神都是只从理论的非理论的“底部”来看理论，从不离这个雷池。

拉卡托斯精采的历史考证不尽可信。附录一中的故事，在非标准分析创始者阿·罗宾逊指出哥西用无穷小方法之后，他立刻出了故事新编（见《哥西与连续统》）。我看不了法文书，不知他的哪一个版本算“1984式地改写”。历史研究有很实在的困难，光挖苦庞卡勒、贝尔也无济于事。反摩登化的也难免搞摩登化，怎么回事呢？

数学家坡亚振兴助探论，意在数学。哲学家拉卡托斯将助探论的刀尖由推测移向证明和反驳，颇近项庄舞剑了。他想逼数学转入波普尔替科学设计的轨道，叫作“批判的或有一失主义”。在他口里，“或有一失”是“必有一失”的同义词。所以，在我眼里，他的数理哲学终究要算一种病例。这种病不易定名。叫“怀疑主义”吧，他说不害他这种病还不可能对怀疑主义有免疫力哩。叫“无政府主义”吧，他又跟法伊尔阿本德划清了界线。无以名之，只得暂用一极长的摹状词：因穷于应付假想反例过度兴奋、过度疲劳所致之乐观主义绝望症。他患病不可只归咎于波普尔。另有一层病因，是他自己恨不得把批判性化为辩证法的唯一守护神。这就得讲到他的身世。

这个生于1922年的匈牙利人，1956年跑到英国去了。其间有一段政治经历：反对法西斯，参加共产党，在教育部当高级干部，被捕，获释。四十年代后期，他写过宣传马克思主义、批判物理学唯心主义的文章。他讳谈往事，大约始于即将取得剑桥博士学位的前夕。后来他的自述说他近四十岁进入波普尔的磁场、放弃了“黑格尔主义”，这话全然不合事实。就在他当博士的前一年，他还在引波普尔为唯物主义的同志，还在反问为什么他该放弃“从马克思主义学来的心爱的观念”，指的是相对

真理学说。那时他正竭力把波普尔的批判主义引向极端，不但搬进了数学，而且劝波普尔跟他一起改宗自悖其理的“无奇不有主义”（译者命名），即“一切有穷长的全称陈述在宇宙间总有反例”。同时，据他的看法，非如此不能与“真正马克思主义的精神”相符（见1960年的发言稿《论必然性，尼尔和波普尔》）。够离奇的，但离奇恰恰能解释他在数理哲学上的那套批判化的辩证研究纲领。让高踞于形式主义天堂的数学下凡，满足不了他的批判欲。他立誓将数学直拖进永无休止的大批判的地狱。在他看来，一定得由他核正了数学理性无力核正自身，才反而能建立“认识论上的乐观主义”。至于如此奇谲的概念拓扑变换，数学家们是瞠目结舌还是五体投地，他从不挂心。批判家是只图快意的。

拉卡托斯分两步实行他的纲领。第一步谈非形式数学，论“证明不证明”，见本书；第二步谈形式数学，论“基础无基础”，见论文《无穷回溯与数学基础》、《经验主义在近期数理哲学中的复兴》。

从改进、解释、刺激人提新问题的角度来看不证明的证明，确实很有趣。哥伦布误抵美洲，不该被烙上金印。可是，发现了他的印度——也许位置、版图、风俗人情跟他预想的不大一样——的数学家，为什么就该让拉卡托斯烙上金印呢？任何时候，数学家决不会在他的证明后头写上“诸证未毕、仅供批判”八个字的。不写未必即是教条主义者，或许只是怀有一种健全的信念：我虽无能，数学究竟不是宗教，一直有良好的自我矫正能力，因此，不证明的证明可以经有穷多次改进（包括理论框架的革命）之后变成在证明的证明，尽管它不是终极证明，毕竟已是后者的某种完全严格的实现，就是说，只要概念不变，证明中的数学引理和逻辑原则不可能假。我相信，数学很早就

有本事将一批批不证明的证明在这种意义上转化为在证明的证明，而且这些证明的产品越来越不平淡。当拉卡托斯批评欧拉-庞卡勒定理的代数拓扑证明时，其实已经技穷了。他连一个逻辑反例都想不出来，只好说某公理是约定、某定义有怪物例外背景或整个代数拓扑太抽象。言之有理，可惜算不上批评。“反璞归真”有背数学生长的规律。

拉卡托斯的证明论里暗藏着全称命题与存在命题、真与假、证明与反驳的不对称性。全称猜想的反驳相当于其反例的存在性证明。摆出的反例经常不是硬梆梆的，关于它是个反例的证明也往往被分解成一组既不完备又不确实的引理。“想入非非”的反例，如单侧多面体，如无导数连续函数，如皮阿诺曲线，如哥德尔不可判定句，更需要异常“矫揉造作”的理论构思，否则断然绷不开弹性很小的概念。况且还有不举反例的纯存在性证明，直觉主义者持异议，其他数学家也多少存戒心。这些都是拉卡托斯谈他的反驳所会碰到的困难，他却佯作不知，偏要以“反驳在反驳”强撑“证明不证明”。

拉卡托斯的基础论立足于他的大大萎缩了的证明论。他利用形式化的恰当性无精确准则这个事实，断言形式理论有潜在否证物，在非形式理论中，非形式理论有潜在否证物，在其自身的底部中。而如果理论是一致的，不存在逻辑否证物的话，他便说仍可以有匹克威克意义上的助探否证物，即我辈俗人所谓非否证物。他宣布，反驳的决定性作用本来不在于反驳，在于把问题转移到更重要的问题上去。至此，他仿佛放弃了原证明论的基地，又安全转移了，但也只是“仿佛”而已。擅长运动的哲学，横竖是不好对付的。

好在拉卡托斯的错话不是蠢话。谁又能不说错话呢？但我愿奉劝数学界诸公，也不必因蠢话听得多了便怠慢了数

理哲学。“高斯无论如何有罪”，贝尔特拉米“愚蠢到无与伦比”，赫尔姆霍兹象“俄国村妇想扮法国话说得极好的贵夫人来出风头”……这些话乃是学识渊博的车尔尼雪夫斯基给非欧几何下的评语。他承认“我不懂也不想懂数学”，谦虚而诚实。他是自觉“我必须谈”我不懂的东西才说蠢话的。宽恕哲学家吧，数学中哲学问题的难度确非局外人所能想象。记得我初学数理逻辑的时候，曾经问我的老师王宪钧：当代数理哲学家里哪些人是数学家？他的回答真干脆：没有一个不是！如果不放宽尺度去收容例外，比方说某些数学史家，我想，这话是对的。

拉卡托斯是数学史家，所以他这本病态的书才不使数学家个个生厌吧。修改一部稚气十足、错漏百出的旧译稿则不胜其烦。终于改完，要感谢上海译文出版社的热心和耐心。有若干疑问，分别由齐民友、康宏锦和沃勒尔教授帮忙解答了。非洋人不援洋例，仅仅出于我们中国人的感恩之心，我也必须把这本书献给我的夫人徐增绶。

康宏达

1985年11月20日

校后补记(1987年3月)

这部译稿自然也是大“可反驳的”，编者同志可以作证。他们帮我发现(不是“消灭”)了若干错误，我谢谢他们。我还没有脱离“试试错错”的阶段，以为不宜过早脱离。

编 者 的 序

1974年2月2日，我们伟大的师友伊姆雷·拉卡托斯出人意料地去世了。当时，他还照常在为许多学术规划操劳着。就中最重要的一项，是出版《不列颠科学哲学杂志》1963—1964年分四期刊载的他的光辉短论《证明与反驳》的增改本。拉卡托斯久已签了这本书的合同，却推迟出版，盼望能把短论作些更正和进一步的改进，再添些扎实的材料。由于他的兴趣转向物理科学的哲学，这件工作大大耽搁了。拖到1973年夏天，他才终于下决心动手出版。那年夏天，我们分头同他商量过出书计划。尽管境况起了可悲的变化，我们还是设法编成了一本尽量接近拉卡托斯预想的书。

原短论《证明与反驳》成了本书第一章。除此之外，我们收进了三个新项目。首先是在正文中添了第二章，讲的是庞卡勒给笛卡儿-欧拉猜想作的向量代数证明，底稿系拉卡托斯1961年剑桥博士论文第二章。（原短论《证明与反驳》系博士论文第一章经大量更正和改进的稿本。）博士论文第三章在这里变成了附录一，内有多证多驳法的又一案例研究，讲的是哥西给“任何连续函数收敛级数的极限本身也连续”这个定理作的证明，念过《证明与反驳》的数学家常常表露一种怀疑：拉卡托斯所描述的证明分析法也许适用于多面体研究，那是个“靠近经验”的科目，反例不难想见，但对“真正的”数学来说也许就不适用了。有了正文第二章和附录一，这种怀疑想必会减少。第三个增添的项目

是附录二，底稿也是博士论文第三章的一部分，谈到了他的主张在数学的发展、叙述、教学方面的后果。

拉卡托斯延迟出版的理由之一是，这批追加材料虽然对他的主张有不少新的充实和发挥，但他承认有一些还需要进一步斟酌、进一步作历史考证。论及哥西和富里叶的材料（见于附录一）尤其如此。我们也明知这批材料有若干地方难懂和含糊，明知有所省略。然而，我们觉得不该改变拉卡托斯手稿的内容。至于要对这批材料加工补遗，我们两个又都没条件补上必不可少的又长又详的历史考证。事情明摆着：要么根本不发表这批材料，要么以未定稿的形式发表。我们决心选择后一方案。我们觉得这样做好处很多，也希望这会刺激别的学者在必要时去扩充和改正。

总之，我们认为无权变动拉卡托斯材料的内容，即使是我们深信他的主张变了的那些部分。所以，我们只限于在编者按语里指出，假使现在由拉卡托斯自己发表这批材料，我们要设法劝他改哪几处，以及（这常常是一回事）我们相信他会改哪几处。（不言而喻，从写完博士论文到去世的十三年间，他的学术立场变得很可观。他的[1970]里解释过他在总的哲学见解上有哪些大变化。应当提一提，拉卡托斯认为，他的科学研究纲领方法论对他的数理哲学有重要的义蕴。）

我们处理行文问题的办法是，保留拉卡托斯本人发表过的材料（即正文第一章），几乎完全不变（仅有的例外是少数误印之处和明显的小错）。然而，以往未发表过的材料，变动还是相当大的——不过，再说一遍，只限于形式，不涉及内容。既然这种做法似乎颇不寻常，恐怕还是辩解几句为妥。

拉卡托斯始终十分留心他要发表的一切材料的行文，发表之前总要在同事和朋友中间广为散发，供人批评和提出改进的

建议。我们确信，这里首次发表的材料，他也会这么办，而且他所作的改变比我们敢作的还要厉害。我们由亲身体验深知拉卡托斯为尽量清晰地表达他的主张花费的苦心，这就使我们有义务尽力设法改进这批材料的行文。毫无疑问，要是拉卡托斯本人修改过底稿，这些新项目就不尽是眼前这个样子。不过，我们自觉跟拉卡托斯够亲密的了，在他以往某些出版事务中涉入得也够深的了，可以作一次持之有据的尝试，把材料润色到接近他自己的高标准的地步。

有机会把拉卡托斯数理哲学方面的某些重要著作编成这个版本，我们很高兴，因为，借此也可稍稍报答他在学术上和私交上给我们两人的恩惠。

约翰·沃勒尔

伊利·扎哈尔

作者引言

当一种强大的新方法脱颖而出之后，研究新方法能胜任的那些问题的部门进展疾速，风头出足，其余的问题越来越受冷落，甚至被遗忘，再研究就会遭到蔑视，这种情况在思想史上是屡见不鲜的。

在本世纪，由于元数学生机盎然的发展，数理哲学中似乎已经出现了这种局面。

元数学的对象是从数学得来的一种抽象，经过这种抽象，数学理论被形式系统代替，证明被特定的合式公式序列代替，定义被“理论上多余”但“排印上方便”的“缩写手法”代替。^①这种抽象出自希尔伯特的设计，为的是备置一套强大的技术，好去探讨数学方法论的某些问题。同时也有元数学抽象视野以外的问题。与非形式(inhaltliche)数学及其生长有关的全部问题，与解数学题的势态逻辑有关的全部问题，都要归入这一类。

数理哲学中有一派动不动就说数学和它的形式公理化抽象(以及数理哲学和元数学)是一回事，按我的用语，这叫“形式主义”学派。要找形式主义立场最直率的自白，卡尔纳普[1937]里便有一例。卡尔纳普强行要求：(a)“哲学应当被科学的逻辑所取代……”，(b)“科学的逻辑不是别的，只是科学语言的逻辑

^① 丘奇[1956]，1，第76—77页。也参见皮阿诺[1894]，第49页；罗素和怀特海[1910—1913]，1，第12页。帕斯卡[1659]中制订的那个欧几里得纲领要臻于完备，这是不可少的一步；参见拉卡托斯[1962]，第158页。

语法……”，(c)“元数学就是数学语言的语法”(第xiii页和第9页)。一句话，数理哲学应当被元数学所取代。

形式主义割断了数学史与数理哲学的联系，因为，按照形式主义的数学概念，数学原没有历史。据罗素的措辞“浪漫”而立意庄重的评语，“自古以来头一部论述数学的书”是布尔的《思维规律》(1854年)，^①这话任何形式主义者大体上都会同意的。形式主义否认了大多数过去公认的数学有资格叫数学，于数学的生长也就不能置一辞。形式主义的天堂里面，住着天使般的数学理论，凡间不确实性的种种污迹洗刷得一干二净。“创造”期的数学理论固然一概不准入内，“批判”期的也很难有哪一个容许破例。话虽如此，形式主义者照例给堕落的仙子留一扇小小的后门：有些“数学与非数学的混合物”可望获准，如果居然能找到形式系统“在一定意义上容纳了它们”(柯里[1951]，第56—57页)。谨守这类条规，牛顿不得不等上它四个一百年，一直要到皮阿诺、罗素和蒯因把微积分形式化了，这才帮他挤进了天国。狄拉克比较走运。他尚在人世，J.施瓦茨便拯救了他的灵魂。这里或许也该提一提元数学家自悖其理的窘境：拿形式主义乃至只拿演绎主义的标准来量，他也算不上诚实的数学家。因为，据狄厄多内的高谈阔论，以公理化格式叙述自己的推理乃是“任何有志于老实治学的数学家肩负的绝对义务”。([1939]，第225页。着重号是我加的。)

屈居当今形式主义治下，人们不由得想套用康德的名句：缺少哲学的指导，数学史变成了盲目的历史；不理睬数学史上

^① 罗素[1901]。这篇短论也曾作为罗素[1918]第5章重新发表，题为“数学与形而上学家”。引文可见于企鹅公司1953年版第74页。在[1918]前言里，罗素说起过那篇短论的“语调多少要用编者恳求我把文章写得‘尽量浪漫一点’才好解释”。

最引人入胜的现象，数理哲学变成了空洞的哲学。

“形式主义”是逻辑实证主义哲学的防护堤。据逻辑实证主义说，只有“重言的”或经验的陈述才有意义。非形式数学既非“重言的”又非经验的，它必定无意义，纯系无稽之谈。^① 逻辑实证主义的教条对数学史和数理哲学都是有弊而不利。

本短论的目的是探讨数学方法论的某些问题。我用的“方法论”一词的涵义，近乎坡亚和伯奈斯的“助探论”(heuristic)^②，也近乎波普尔的“发现逻辑”或“势态逻辑”^③。时下强征“数学方法论”出任“元数学”同义词的敕令，无疑有形式主义气息。这足以证明作为发现逻辑的方法论在形式主义数理哲学中无存身之地^④。据形式主义者说，数学与形式化数学是一回事。可是，在形式化理论里，你能发现什么呢？两样东西。第一，一

^① 据图开特说，哥德尔句无意义（[1950]，第129页）。图开特是在驳斥考丕。考丕声称，哥德尔句既是先验真理而又不是分析的，它们就驳倒了先验真理的分析论（[1949]和[1950]）。他们双方都没有注意，从这个观点看，哥德尔句独特的禀性正在于这类定理是非形式数学的定理，因而他们其实是在就某一特例讨论非形式数学的禀性。

^② 坡亚[1945]，尤其是第102页，也见[1954]，[1962a]；伯奈斯[1947]，尤其是第187页。

^③ 波普尔[1934]，然后见于[1945]，尤其是第90页（或第4版[1962]，第97页）；也见[1957]，第147页以下。

^④ 例如，可以举塔尔斯基[1930a]和[1930b]为证。前一篇文章里，塔尔斯基公开用“演绎科学”作“形式化演绎科学”的略语。他说：“形式化演绎学科形成元数学的研究领域，大致相当于空间形体形成几何学的研究领域。”后一篇文章里，却给这种合常识的提法来了个离奇的扩张主义歪曲：“演绎学科构成演绎科学方法论的对象，差不多相当于空间形体构成几何学的对象，动物构成动物学的对象。自然，并不是所有演绎学科都纳入了适合作科学研究对象的形态。例如，凡是缺乏确定的逻辑基础、没有准确的推论规则、用照例有歧义的不精确的会话语汇来表述其定理的，一句话，凡是未形式化的，就不适合。因此，元数学研究只限于讨论形式化演绎学科。”革新之举在于：前一提法只说，元数学的对象是形式化演绎学科；后一提法则是说，全因为非形式化演绎学科根本不适合作科学研究对象，才使得元数学的对象只限于形式化演绎学科。言外之意，形式化学科的史前期不能作科

台程序设计得当的图灵机花有限时间能解的问题(如:被当成证明的某物是不是证明?),你能发现它们的解。可惜没有数学家有雅兴把这类判定程序定死了的干巴巴的机械“方法”搞到底。第二,还有些问题(如:在不可判定的理论中某公式是不是定理?),你也能发现它们的解,可你就只好以“无法驾驭的顿悟和好运气”这种“方法”为向导了。

可是,活的数学还不至于这般凄惨,不倒向机器的理性主义,就得倒向瞎蒙的反理性主义。^⑥向非形式数学作一番调查,会得出一套丰富多采的供务实数学家用的势态逻辑,既非机械的又非反理性的势态逻辑,不过,这不会被形式主义哲学承认,想受它激励就更别说了。

不批判形式主义,不摒弃形式主义,不可能发展数学史和

学研究对象,可不象动物种的史前时期似的可以成为科学得很的进化论的对象。谁也不怀疑,关于数学理论的某些问题只有把它形式化了才能探讨,一如关于人的某些问题(比方说人体解剖学问题)只有等人死了才能探讨。可是,很少有人会由此推论,人只有“纳入了‘死的’形态”之后才“适合作科学研究对象”,因此生物学研究只限于讨论死人。诚然,如果在早期解剖学的光荣年代里有位维萨留斯的狂热门徒,眼看强大的新式外科手术脱颖而出了,还要说生物学和尸体肢解是一码事,我也不致大惊失色。

除了形式系统以外,还可能不可能有某种别的方法论,塔尔斯基是持否定态度的。在[1941]前言里,他详细讲过他的态度:“一部经验科学方法论的教程……大抵只得以估价和批评一些不经久的揣测和不成功的尝试为限”。理由就在于经验科学不科学。因为,按塔尔斯基的定义,科学的理论应当是“被断定了的陈述根据一定的规则排列而成的系统”。

⑥ 形式主义哲学最危险的放浪习气之一就是:(1)先针对形式系统说点什么,说得挺对;(2)然后说这话适用于“数学”,如果我们承认数学跟形式系统是一回事,也还算说得对;(3)再往下就来一个偷换词义,按普通涵义来用“数学”这个字眼儿。正是这个缘故,蒯因才说([1951],第87页):“数学家是靠无法驾驭的顿悟和好运气蒙中他的证明,但事后别的数学家可以核查他的证明”;“这反映着数学中典型的情景”。不过,核查普通的(非形式的)证明常常是一件很棘手的没准数的事情;蒙中“过错”也很得有点顿悟和幸运,并不亚于蒙中证明:发现非形式证明里的“过错”有时也许要花几十年,如果不是几百年的话。

数学发现逻辑，即数学思想的系统发生学和个体发生学。^①

但是，形式主义数理哲学根子很深。它是教条主义数理哲学这条长链子上最新的一环。教条主义者与怀疑主义者之间的辩论已有两千年以上。教条主义者认为，靠我们人的理智和(或)感官，我们能得到真理，也能知道自己已经得到真理。怀疑主义者相反，要么认为我们不能得到真理(除非借助于神秘的体验)，要么认为我们不能知道自己能否得到真理或自己已经得到真理。在这场论据一再翻新的大论战里，数学一直是教条主义者引为骄傲的堡垒。每当一代数学教条主义陷入“危机”，自有新的翻版再度来供应真正严格的、真正终极的基础，于是数学又恢复了权威在手、万无一失、不可反驳的形象，又俨然是“一向讨上帝欢心，使他愿意赐福人类的唯一科学”了(霍布斯[1651]，第15页)。大多数怀疑主义者听任教条主义认识论手里的这座要塞坚不可摧。^② 挑战现在才姗姗来迟。

这个案例研究的核心是向数学形式主义挑战，还不是直接向数学教条主义这个根本立场挑战。它的目标不高，只想抓住一点将文章做透：非形式、准经验数学的生长，靠的不是单调增加千真万确的定理的数目，靠的是用玄想和批评、用证明和反驳的逻辑不停地改进推测。然而，既然元数学是正在疾速生长的非形式、准经验数学的一个范例，本短论也要含蓄地向现代数学教条主义挑战。当今数学史学者在他自己的领域内也

^① 庞卡勒和坡亚都建议，研究智慧的发展，尤其是研究数学智慧的发展，要应用赫克尔的个体发生史重演系统发生史这条“根本的生物发生律”(庞卡勒[1908]和坡亚[1962b])。引用庞卡勒的话：“动物学家坚持动物的胚胎发育大体重演了它的历代祖先纵贯若干地质时代的全部历史。看来智慧的发展也一样……由于这个缘故，科学史理应成为我们的第一向导”(霍尔斯特德权威译本，第437页)。

^② 数学在教条主义者与怀疑主义者的争论中起的作用，我的[1962]里有所讨论，可参见。