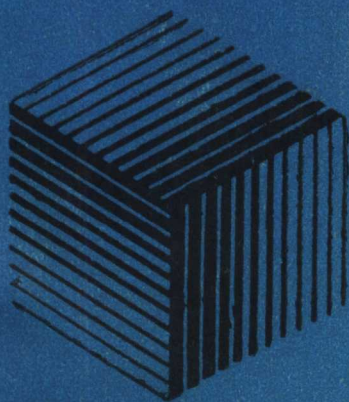


运筹学主要内容 最佳管理数学方法

赵新泽 编著



西南交通大学出版社

运筹学主要内容

最佳管理数学方法

赵新泽 编著

西南交通大学出版社

内 容 提 要

本书是为高等学校本科生选修课、专修科和干部班编写的运筹学教材。内容包括了运筹学的主要部分：一般线性规划问题、特殊线性规划中的运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题、动态规划的方法和运用、非线性规划问题的优选法(包括正交试验法)、网络方法、单目标决策和多目标决策共八章。

本书的主要特色是：①编入了几年来提出来的很多新方法及其运用；②各部分列举了各种实例，并配有适量的习题；③尽量通俗易懂，深入浅出。

本书适于作高等学校各管理专科、干部班、本科生选修课、职工大学、夜大学、函授大学等的运筹学或管理数学教材。教学时间为50小时左右。

本书也可供各企业领导和管理人员、广大教师、青年、工人为掌握运筹学的主要内容、方法和运用，而进行学习之用。

最佳管理数学方法

ZUIJIA GUANLISHIXUE FANGFA

赵南译 编著

西南交通大学出版社出版

(四川 峨眉)

四川省新华书店发行

长沙铁道学院印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：9

字数：210千字 印数：1~3500册

1988年8月第一版 1988年8月第一次印刷

ISBN 7—81022—031—4

0004

定价：1.70元

前 言

运筹学是一门应用广泛、经济价值大、易学、易懂、易用的新兴学科。其内容很多，本书只写了其主要部分，取名为《最佳管理数学方法》。

本书是在管理专科班和干部班运筹学讲义《最佳管理数学方法》试用两遍后，进一步修改、补充而成的。

在编写与修改中参阅了约30种资料，根据教材的要求和运筹学的特点，又为了使本教材具有一定的特色，充分注意了以下几点：

(1) 编入了几年来提出来的新方法和应用实例，如第二章运输问题中的“一次最优法”，“等优元素法”、“多解”；整个第三章；的内容第四章动态规划中的“图解法”和“表解法”等。第五章非线性规划问题的优选法中的“正交试验法”以及第八章多目标决策方法，都是新颖的写法。

(2) 既注意了运筹学的数学方法，又注意了运筹学的实际应用，因此，每章的内容均注意遵循“模型——概念——方法——应用”的规律。目的是使读者既搞清概念，掌握方法，又学会方法的实际应用。

(3) 各章的内容均配有适量的各种应用习题和答案。

本书受到长沙铁道学院李致中副教授、数学教研室、教材科和教务处的关怀与支持，在此深致谢意。

因水平有限，时间仓促，难免存在缺点和错误，希望指正。

编 者

1987年7月5日

目 录

第一章 一般线性规划问题	(1)
§1 数学模型和主要概念.....	(2)
§2 图解法.....	(7)
习 题 1.....	(12)
§3 单纯形法.....	(14)
§4 单位向量不足时的处理方法.....	(24)
1. 大 M 法.....	(24)
2. 两阶段法.....	(26)
习 题 2.....	(32)
第二章 运输问题	(35)
§1 运输问题的数学模型.....	(35)
§2 表上作业法.....	(39)
1. 几个主要概念.....	(39)
2. 一次最优法.....	(41)
习 题 1.....	(43)
3. 等优元素法.....	(44)
4. 多最优方案.....	(53)
习 题 2.....	(56)
§3 不平衡情况的处理.....	(58)
§4 退化情况的处理.....	(67)
习 题 3.....	(72)
§5 图上作业法.....	(74)
1. 图上运输问题的数学模型和主要概念.....	(74)
2. 支路问题的最优方案与多方案.....	(77)
3. 单圈问题的最优方案与多方案.....	(79)
4. 多圈问题的最优方案.....	(84)

5. 用表上作业法解决图上问题.....	(87)
习 题 4.....	(88)
第三章 生产组织与计划中的线性规划问题.....	(91)
§1 规划的数学模型和主要概念.....	(91)
§2 一次最优法.....	(96)
§3 积等优元素法.....	(101)
习 题 1.....	(110)
§4 退化情况的处理.....	(112)
§5 多最优方案问题.....	(118)
习 题 2.....	(122)
第四章 动态规划的方法和应用.....	(125)
§1 最短路径问题与回推法.....	(125)
§2 动态规划的主要概念和回推公式.....	(128)
§3 动态规划的图解法.....	(130)
§4 动态规划的表解法.....	(132)
§5 最优投资问题.....	(134)
§6 生产与储存的优化问题.....	(139)
§7 设备更新最佳年限问题.....	(143)
§8 设备负荷最优分配问题.....	(148)
习 题	(152)
第五章 非线性规划问题——优选法.....	(155)
§1 非线性规划问题的数学模型.....	(155)
§2 优选法.....	(158)
§3 一维搜索.....	(160)
1. 0.618法(黄金分割法).....	(161)
2. 分数法(菲波那契法).....	(163)
3. 抛物线逼近法.....	(167)
4. 其他方法.....	(170)
习 题 1.....	(173)

§ 4 多维优选法	(174)
1. 交替固定单选法	(174)
2. 矩形法	(176)
3. 正交试验法	(178)
习 题 2	(182)
第六章 网络方法	(185)
§ 1 网络方法的原理、步骤和概念	(185)
§ 2 绘制网络图的规则	(189)
§ 3 网络计划图的分类	(192)
§ 4 编制网络计划——绘制网络图	(193)
习 题 1	(196)
§ 5 作业的五种时间	(198)
§ 6 非肯定型网络问题	(206)
习 题 2	(209)
§ 7 网络图的优化	(210)
习 题 3	(217)
第七章 决策论 (一) ——单目标决策	(218)
§ 1 决策是管理工作的核心	(218)
§ 2 决策的三大步骤和合理条件	(219)
§ 3 决策的主要概念和数学模型	(220)
§ 4 确定型决策	(222)
§ 5 风险型决策	(225)
§ 6 动态风险型决策	(231)
§ 7 非确定型决策	(235)
习 题	(242)
第八章 决策论 (二) ——多目标决策	(247)
§ 1 效益成本分析法	(248)
§ 2 目的规划法	(249)
§ 3 评分法	(251)

1. 简单加法.....	(252)
2. 加权法和.....	(254)
3. 其他方法.....	(258)
§4 灵敏度分析.....	(262)
习 题	(265)
习题答案.....	(268)
主要参考文献.....	(274)

第一章 一般线性规划问题

线性规划是20世纪40年代发展起来的一门重要的现代应用数学。在经济的各个领域，如工业、农业、交通运输、商业、军事乃至科学技术、管理决策的最优化等，均有着广泛的应用，是规划论、运筹学的一个重要分支，是最优管理的一个主要工具。例如，我国机械工业部1982年对全国重点汽车制造厂的年计划，用线性规划的方法进行优化以后，比原计划仅利润就增加3000多万元。美国1972年统计了107个公司应用线性规划方法解决的问题，占全部问题的19%。

线性规划主要解决两类问题：

(1) 在人力、物力、财力一定的情况下，制订出最好的安排方案，使完成的任务量最大，从而使经济效益最高。

(2) 在生产任务一定的情况下，制订出最好的方案，使消耗的人力、物力、财力最少（或时间最少），从而使成本最低。

这两个问题实际上是一类问题的两个方面，即两种不同的处理方法。总之，在一定的条件下，通过规划使问题的目标（任务量、利润、成本、时间、……）达到最大或最小。

线性规划的数学模型中，包括条件约束（不等式或方程组）和目标函数内的全部变数都是一次的，即线性的。因此称这种规划为线性规划，这正是线性规划与非线性规划的区别。

由于线性规划应用面广，经济意义大，发展非常迅速，可利用电子计算机解决几千上万个变数的大型规划问题。

线性规划的内容包括一般线性规划问题和特殊线性规划问题两大类。在特殊线性规划问题中，又包含两个部分：运输问题和生产组织与计划中的线性规划问题。

§1 数学模型和主要概念

用线性规划的方法解决管理中的问题时，首先要建立数学模型——把实际问题变为数学问题，这是非常重要的一步。下面通过几个实例来讨论建立线性规划问题的数学模型的方法，进而分析线性规划问题的数学模型的特征。

例1 生产计划问题 某企业在一段时期内规划 A_1 、 A_2 两项生产任务，任务 A_1 每生产一个单位消耗电力3千瓦，其他成本2000元，得利润2000元；任务 A_2 每生产一个单位耗电6千瓦，其他成本1000元，获利3000元。该企业在 A_1 与 A_2 任务中，有电力24千瓦和成本1万元可供利用，求其最优生产方案(A_1 、 A_2 各生产多少)，使总利润最大。

设 A_1 、 A_2 分别生产 x_1 与 x_2 （单位）。为清楚起见将问题列如表1-1。

由题意，该问题的数学模型为：求未知变数 x_1 与 x_2 ，满足

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-1)$$

使总利润，

$$s = 2x_1 + 3x_2 \quad (1-2)$$

达到最大值。

其中，(1-1)式叫该问题的约束条件（为不等式）。不等式右边的常数24与10，叫约束常数。(1-2)式叫该规划的目标函数。

例2 最佳投资问题 某单位在三年内共有资金10万元，

表1-1

单位消耗 项目	任 务		总
	A_1	A_2	
电 力 (千瓦)	3	6	≤ 24
其 他 成 本 (千元)	2	1	≤ 10
利 润 (千元)	2	3	最大
设生产任务量	x_1	x_2	

可向 A_1 、 A_1 、 A_3 、 A_4 四个项目进行投资，其情况是：

A_1 ：三年中，在每年年初投资，年利润率为20%，每年年终结算，并可将于次年初再行投资，

A_2 ：三年中于第1年年初投资，两年结算，利润率为50%，而投资额最多5万元，

A_3 ：三年中，要在第2年年初投资，满两年时结算，利润率为60%，该项至少要投资4万元，

A_4 ：三年中，在第3年初投资，一年结算，利润率为40%，投资额为3万元。若要在三年末总投资的利润最高，最佳投资方案（各项目投多少）是什么？

设第 i ($i=1, 2, 3$,

4) 个项目在第 j 年 ($j=1, 2, 3$) 的投资额为 x_{ij} 。显然，项目 A_2 只能在第1年投资一次。各年投资如表1-2。

规划的数学模型为：

求投资变数 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{32}, x_{43}$ 满足约束条件：

表1-2

年次 项目	第1年 第2年 第3年			总 (万)
	第1年	第2年	第3年	
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	
A_2	x_{21}			≤ 5
A_3		x_{32}		≥ 4
A_4			x_{43}	$= 3$
原有资金(万)	10			

$$\begin{cases}
 x_{11} + x_{21} \leq 10 & \text{(第1年投资)} \\
 x_{12} + x_{32} \leq 10 - x_{21} + 0.2x_{11} & \text{(第2年投资)} \\
 x_{13} + x_{43} \leq 10 + 0.2x_{11} + 0.2x_{12} + 0.5x_{21} & \text{(第3年投资)} \\
 x_{21} \leq 5 \\
 x_{32} \geq 4 \\
 x_{43} = 3
 \end{cases}$$

使目标函数（总利润）达到最大，即

$$\max S = 0.2x_{11} + 0.2x_{12} + 0.2x_{13} + 0.5x_{21} + 0.6x_{32} + 0.4x_{43}.$$

例3 合理下料问题 某企业要下100套钢料，每套由长1.5米一根，2.1米两根和2.9米一根的元钢组成，而原料长7.4米。应如何下料，才能使所用钢料最少。

建立数学模型。显然，不同的下料方法，下的料长不同，而残料也不同，问题要求采用最佳下料方法，使总残料最少。为此，要分析各种下料方法，共五种下料法，其长度和残料如表1-3。

表1-3

下料方案 下料数量 料长	一	二	三	四	五	三种料 需要量
1.5 米	3	1	2		3	100
2.1 米			2	2	1	200
2.9 米	1	2		1		100
合计 (米)	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6	
残料 (米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8	总的 最少
设各方案下 料根数	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	

由表知，五种下料方案中，任何一种均不可能完成100套的下料任务，必须采用“混合下料方案”。为此，设五种下料方案的下料根数分别为 x_1 、 x_2 、 x_3 、 x_4 、 x_5 ，由题意，数学模型为：
求变数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ，满足约束条件

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 100 \\ 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 200 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

使残料 (目标函数)

行如下的数学加工：变不等式为等式（方程），右边约束常数均为正数。因此

①若式(1-3)中存在第 k 个式为

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n \leq b_k$$

则设 $x_{n+k} \geq 0$ ，加到不等式左边，变为方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n + x_{n+k} = b_k$$

②若式(1-3)中存在第 i 个式为

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$$

则设 $x_{n+i} \geq 0$ ，在不等式左边减去 x_{n+i} ，变为方程

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i$$

③若(1-3)式中存在第 r 个式为

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = -b_r$$

则两边同乘以 (-1) ，使右边常数为正值，即

$$-a_{r1}x_1 - a_{r2}x_2 - \cdots - a_{rn}x_n = b_r$$

其中， x_{n+k} ， x_{n+i} 叫松弛变数。

通过如此的数学加工，达到约束条件中除 $x_j \geq 0 (j=1, 2, \dots, n)$ 外，其他全部为线性方程组，而且各方程左边的常数 b ，全部是正的。松弛变数 x_{n+k} 和 x_{n+i} 在目标函数 S 中的系数全部为零。即

$$S = \sum_{j=1}^n c_j x_j + 0x_{n+k} + 0x_{n+i} \quad (1-7)$$

由此我们得到一般线性规划问题的标准形：求一组变数 $x_j (j=1, 2, \dots, n)$ ，满足约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i & (i=1, 2, \dots, m) \\ x_j \geq 0 \end{cases} \quad (1-8)$$

$$\max S = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{或} \min S) \quad (1-9)$$

任一个线性规划问题，经过上面的数学加工，均可变为这种标准的数学模型。

几个主要概念：

初始方案 最初给出的满足约束条件(1-3)的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的值，叫规划问题的初始方案，数学上叫初始解。

可行方案 任一满足约束条件式(1-3)的 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的一组值，叫问题的可行方案，又叫可行解。初始方案是可行方案的一种。可行方案不一定是最优方案。

最优方案 使目标函数 S 达到最大或最小值的可行方案，称为最优方案，又叫最优解。目标函数 S 达到最大的解叫最大解，规划又叫最大解问题或最大值问题，目标函数 S 达最小的解叫最小解，规划叫最小值问题或最小解问题。最大解和最小解统称为最优解。

一个线性规划问题的最优方案，可能只有一个也可能有多个。理论上可证明，线性规划若有多个最优方案，便有无穷多个。

§2 图解法

所谓“图解法”，就是根据规划的约束不等式，取平面坐标画出几何图形，从图上找出最优方案的点，即得最优方案。由于图形具有直观、明确、简单的特点，使图解法显示出一定的优越性。

但由于平面坐标只有两个坐标轴，所以，当规划的数学模型中只有两个变数时，才能用此方法。

例4 用图解法求 §1中例1生产安排问题的最优方案。

第一步：画图 取坐标轴 x_1 与 x_2 ，由该问题的数学模

型, 求 x_1, x_2 的值, 使得

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

$$S = 2x_1 + 3x_2 \text{ 取最大值。} \quad (1-11)$$

①画直线 $3x_1 + 6x_2 = 24$ 。如取 $x_1 = 0$ 则 $x_2 = 4$, 得点 $A(0, 4)$; 取 $x_2 = 0$, 则 $x_1 = 8$, 得点 $B(8, 0)$ 。连 AB 得直线 $3x_1 + 6x_2 = 24$, 如图1-1。

②画直线 $2x_1 + x_2 = 10$ 。若分别取 $x_1 = 3$ ($x_2 = 4$) 和 $x_2 = 0$ ($x_1 = 5$), 则得点 $C(3, 4)$ 与 $D(5, 0)$, 连 CD 即是。如图1-1, AB, CD 两直线交点为 $E(4, 2)$ 。

③由 $x_1 \geq 0$, 为 x_2 轴的右半平面 (包括 x_2 轴), $x_2 \geq 0$ 为 x_1 轴的上半平面 (包括 x_1 轴)。

由约束不等式

(1-10)可知, 图1-1中

四边形 $OAED$ 中的每个点 (包括边界上的点), 都满足该规划的约束条件, 所以均代表规划的一个可行方案 (可行解)。

由此可知, 一个线性规划问题若存在可行方案, 便有无穷多个,

但其中只有使 S 达到最大值的点, 其坐标值方是该规划的最优方案。

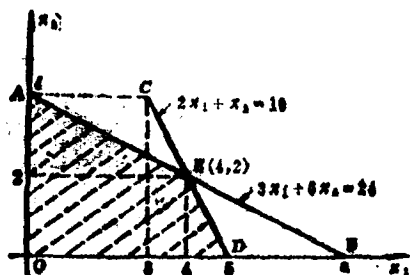


图1-1

第二步：求 S 取得最大值的点，从而求最优方案，有三种方法。

方法1 图1-1中的阴影部分为该规划的可行解域（有界闭区域），是凸多边形 $OAED$ ，又叫凸域、凸集。边界上的 O, A, E, D 四点均称为极点或顶点。使目标函数 S 达到最大的最优方案点，是这些极点中的一个（也可能有两个，为多最优方案情况）。因此，分别将各极点坐标代入 S ，理论上可证， S 值最大的点，便是最优方案点。

$$\text{点 } O: S(0,0) = 0; \quad \text{点 } A: S(0,4) = 12;$$

$$\text{点 } E: S(4,2) = 14; \quad \text{点 } D: S(5,0) = 10.$$

因 E 点处 S 值最大，故该问题最优方案为

$$x_1 = 4, \quad x_2 = 2 \quad \max S = 1.4 \text{ (万元)}$$

将 $x_1 = 4, x_2 = 2$ 代入约束不等式可知，电力和成本均恰好用完。

此方法当极点较多时，比较麻烦。

方法2 将目标函数——总利润 S 任意取值，在图上划出 $S = 2x_1 + 3x_2$ 的直线，如取

$$S_1 = 6 = 2x_1 + 3x_2,$$

$$S_2 = 9 = 2x_1 + 3x_2$$

二直线如图1-2。又叫利润直线。

由上式知， S 取不同的值，得到的不同的利润直线是平行

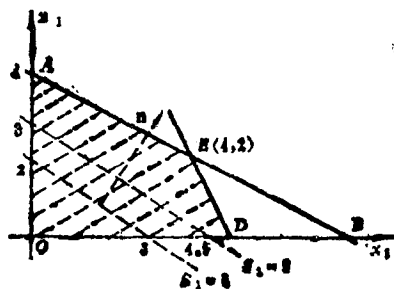


图1-2