

现代电磁场理论的工程应用基础

# 电磁波基本方程组

宋文淼 张晓娟 徐 诚 著



科学出版社  
[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

现代电磁场理论的工程应用基础

# 电磁波基本方程组

宋文森 张晓娟 徐 诚 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是阐述现代电磁场理论的数学基础的《矢量偏微分算子》一书的续著.在前一著作中,介绍了作者提出的作为宏观电磁波问题的数学基础的“矢量偏微分算子”的理论.本书则介绍用这一数学理论把应用了一个多世纪的经典麦克斯韦方程组发展成的电磁波基本方程组.这一方程组克服了经典电磁场理论中由数学上不自洽性所带来的只能对单模问题才能精确求解,而对一般的三维问题无法进行解析求解和精确的数值求解的困难,给出了对电磁谐振腔和微波网络的一般的解析方法和一致收敛的数值方法.

本书可供从事电磁理论研究、电磁波传播、信息工程研究,以及从事数学和物理研究的科技人员阅读,也可作为高等院校上述专业的高年级大学生、研究生和教师的参考书.

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁波基本方程组:现代电磁场理论的工程应用基础/宋文森,张晓娟,徐诚著. —北京:科学出版社,2003

ISBN 7-03-011313-6

I. 电… II. ①宋… ②张… ③徐… III. 电磁波-方程组 IV. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 022757 号

策划编辑:鄢德平/文案编辑:彭斌 姚晖/责任校对:陈丽珠

责任印制:钱玉芬/封面设计:王浩

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

丽源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2003年10月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2003年10月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:1—2 000 字数:277 000

定价:30.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

## 前 言

本书是现代电磁场理论研究总计划中的一个组成部分。这一研究工作是在国家自然科学基金委员会基金项目的资助下进行的。从 1997 年起到 2003 年我们获得了国家自然科学基金委员会的下列三个面上基金项目的资助，每个项目的研究成果都以一部学术专著来表述：①电磁场的算子理论与三维场计算，1997.01~1999.12。这一项目已完成。作为项目的主要成果，1999 年由科学出版社出版了学术专著《矢量偏微分算子：现代电磁场理论的数学基础》。②电磁场数值方法的理论基础与应用，1999.01~2001.12。这一项目已基本完成，其主要成果就是现在的这本书《电磁波基本方程组：现代电磁场理论的工程应用基础》。③现代电磁场理论中电磁波动量与传播，2001.01~2003.12。这一工作正在进行中，计划也出一本学术专著“电磁波波束与波速：现代电磁场理论的物理探索”。本书就是其中的第二本专著。

我们对电磁场基础理论工作的关注还是 20 世纪 70 年代末，戴振铎教授到国内讲学《电磁理论中的并矢格林函数》时开始的。在美国期间我曾得到戴振铎教授的热情指导，回国后在中国科学院电子研究所当时的所长吕保维教授的支持下，进一步开展了应用算子理论来分析和研究电磁场的并矢格林函数的工作，并于 1991 年出版了我的第一本学术专著《并矢格林函数与电磁场的算子理论》。

中国科学院电子学研究所高功率微波与电磁辐射开放研究实验室成立后，根据近 30 年在电磁场理论与应用研究工作的体验，我们深感有必要对经典电磁场理论进行进一步的、系统的研究，从而确定了从数学、工程应用和物理学三个方面来对经典场论进行深入研究的计划。当然，真正的研究内容主要并不是在研究之前所确定的，而是在研究过程中自然形成的。这从基金的题目与专著的名称之间的差别就可以看出来。把关于经典电磁场理论中的数学问题最后归结为矢量偏微分算子理论，这是我们原先并没有想到的。同样，把电磁场的工程应用基础最后归结为电磁波基本方程组，这也是在工作过程中逐步形成的。

麦克斯韦在 19 世纪 70 年代提出了关于存在电磁波以及光就是电磁波这样一个科学史上最大胆的预言，但是正如在本书第一章中所指出的，麦克斯韦所提出的关于电磁场的统一的方程组实际上是无法求解的。他指出了科学发展的方向，而把如何求解电磁场这样的细节问题留给了后人。赫兹在 20 世纪初证明了电磁波的存在，并把麦克斯韦所提出的方程组简化为现在常用的方程组的形式，并把它称为麦克斯韦方程组。但是当时同样无法对这样的方程组进行求解。所能够证明的只是，从当时已经掌握的标量波动方程的理论和求解方法可以求得麦克斯韦方程组的某些特殊情况下的解。他同样把精确、普遍地求解这一方程组的问题留给了后人。从这一方程组的建立到现在也有一个多世纪了。一个多世纪以来人们一直致力于对麦克斯韦方程组的精确求解方法的研究，但是经过一个世纪的努力，这个问题一直没有得到完善的解决。看起来，在经典数学的基础上是不可能完善地解决宏观电磁场理论问题的。因此，应用矢量函数空间和矢量偏微分算

子理论把麦克斯韦方程组的数学基础从经典数学发展为现代数学，用现代数学的方法从麦克斯韦方程组推导出用两个标量函数表示的数学上自洽的、能够完全消除无旋场干扰的**电磁波基本方程组**就是从根本上解决经典电磁场理论中数学上的不自洽性和物理上的经典的力学类比所遗留的近似性的途径。**电磁波基本方程组实际上就是麦克斯韦方程组中对于纯旋量场（即电磁波的场）的方程组**。有了这个方程组，闭域内电磁波的齐次和非齐次的各种工程问题，即无源的微波技术中的本征问题和网络参数问题都可以得到严格的、以解析为基础的精确解。有了这个方程组和相应的解析和数值方法，这类问题应该说从理论上已经得到了完善的解决，所以，我们把它作为电磁波工程应用的理论基础。虽然在这本书中，我们没有讨论开放空间的问题、有源的问题和非线性介质的问题，但是正如本书中所讲的：所有理想导体边界和理想介质中的电磁波的问题最终都可以用两个我们称为“态函数”的标量函数来解决。而且用这两个态函数所组成的电磁波基本方程组来解决电磁波的那些问题时，其解在数学上都是严格的、一致收敛的。这不能不使我们考虑这样一个问题，这就是到底哪一个量能够真正反映电磁波的物理实质，是两个独立的态函数还是经典场论中电磁场在欧氏空间中的三个投影。如果态函数确实比经典场论中的电磁场在欧氏空间中的投影更深刻地反映了电磁波的物理实质，我们自然希望这个方程组能够逐步代替经典场论中对于麦克斯韦方程组的各种规范下的近似形式，成为更广泛领域中电磁波工程应用的理论基础。赫兹所建立的麦克斯韦方程组已经沿用了一个多世纪，但是一直无法解决这一方程组的数学上的自洽性，在新的世纪里应该到了有所发展的时候了。

当然这一工作仅仅只是开始，本书中所涉及的问题只是理想的电磁谐振腔和理想无损微波网络问题。但是我们相信这一理论和方法同样可以应用在开放空间的电磁波问题中和存在理想介质的情况下，这就是我们目前正在进行的工作。我们相信这一工作的进展一定会有助于人们更好地理解电磁波的波束形状和电磁波波速的合理表达形式。当然，探索宏观状态下反映电磁波群体特性的态函数与单个光量子的态函数之间的关系（它们自然应该有密切的联系），将是与现代物理学紧密相关的另一个具有挑战性的问题。尽管对这些问题的探索是困难的，对于这些与现代物理学中的核心问题密切相关问题的探索是需要谨慎的，但是我们相信现代物理从其本质上来讲是与人们对于光（电磁波）这一特殊物质属性的了解紧密地联系在一起的，研究宏观的电磁波理论就不能不涉及这些问题。

宋文森

2003年1月



# 目 录

## 前言

|                                     |    |
|-------------------------------------|----|
| 第一章 经典场论和现代电磁场理论 .....              | 1  |
| 1.1 经典电磁场理论的建立与发展的历史回顾 .....        | 1  |
| 1.1.1 电磁学三大实验定律的建立过程 .....          | 2  |
| 1.1.2 电磁学规律与力学规律的比较 .....           | 5  |
| 1.1.3 麦克斯韦创立电磁场理论的物理基础和主要贡献 .....   | 9  |
| 1.2 关于经典电磁场理论的概述 .....              | 12 |
| 1.2.1 麦克斯韦方程组的规范化问题 .....           | 13 |
| 1.2.2 坡印廷矢量和电磁场的动量定理 .....          | 17 |
| 1.2.3 经典电磁场理论的合理性和局限性 .....         | 18 |
| 1.3 现代电磁场理论导引 .....                 | 20 |
| 1.3.1 量子力学数学方法与波粒二象性的物理内容 .....     | 20 |
| 1.3.2 矢量偏微分算子理论 .....               | 24 |
| 1.3.3 现代电磁场理论的数理逻辑体系 .....          | 33 |
| 第二章 旋量场算子的基本特性 .....                | 38 |
| 2.1 旋量场算子的本征特性 .....                | 39 |
| 2.1.1 电磁场算子的共轭空间——电场和磁场算子空间 .....   | 40 |
| 2.1.2 电磁场算子的二维性 .....               | 42 |
| 2.1.3 两类本征函数之间的正交性 .....            | 48 |
| 2.1.4 旋量场的本征函数展开 .....              | 49 |
| 2.2 旋量场算子的非齐次问题 .....               | 51 |
| 2.2.1 经典电磁场理论的规范化与现代电磁场理论的规范化 ..... | 52 |
| 2.2.2 非齐次麦克斯韦方程组的分离形式 .....         | 55 |
| 2.2.3 关于无旋电场问题的讨论 .....             | 58 |
| 2.3 电磁波基本方程中的激励函数 .....             | 62 |
| 2.3.1 广义函数理论中关于激励函数的问题 .....        | 63 |
| 2.3.2 规则边界下非齐次旋量场算子的标量化形式 .....     | 66 |
| 2.3.3 旋量场算子非齐次问题中激励函数的特性 .....      | 68 |
| 第三章 电磁波的格林函数和电磁波基本方程组 .....         | 70 |
| 3.1 “准三维”系统下的电磁波基本方程组 .....         | 72 |
| 3.1.1 现代场论与经典场论中的并矢格林函数 .....       | 72 |
| 3.1.2 一般边界条件下的并矢格林函数问题 .....        | 76 |
| 3.1.3 标量形式的格林函数及旋量场算子方程的标量化 .....   | 79 |
| 3.1.4 规则边界下的格林函数 .....              | 81 |

|            |                                 |            |
|------------|---------------------------------|------------|
| 3.2        | 三维系统下旋量场算子的标量形式                 | 84         |
| 3.2.1      | 三维系统标量波动方程的齐次问题                 | 84         |
| 3.2.2      | 电磁波的非齐次标量算子方程问题的讨论              | 86         |
| 3.2.3      | 电磁波的归一化本征函数及非齐次问题的逆映射           | 91         |
| 3.3        | 电磁波基本方程组                        | 93         |
| 3.3.1      | 电磁波的标量格林函数和标量形式的非齐次电磁波方程组       | 93         |
| 3.3.2      | 电磁波基本方程组的讨论                     | 94         |
| <b>第四章</b> | <b>电磁谐振系统本征问题的解析方法</b>          | <b>96</b>  |
| 4.1        | 边值问题解析理论的一些补充                   | 98         |
| 4.1.1      | 规则系统的本征问题                       | 98         |
| 4.1.2      | 非齐次边界下的格林函数问题                   | 100        |
| 4.1.3      | 复合系统的边界耦合问题                     | 103        |
| 4.2        | 复合系统的本征问题                       | 105        |
| 4.2.1      | 虚拟边界上的本征函数的边界积分及其特性             | 106        |
| 4.2.2      | 异形波导                            | 110        |
| 4.2.3      | 具有多个匹配边界的异形波导的计算                | 116        |
| 4.3        | 三维电磁谐振系统的本征问题                   | 118        |
| 4.3.1      | 虚拟边界上场匹配的完备性问题                  | 118        |
| 4.3.2      | 具有孪生模复合系统的本征问题                  | 122        |
| 4.3.3      | 三维系统本征问题的一般解                    | 125        |
| <b>第五章</b> | <b>微波网络的解析方法</b>                | <b>128</b> |
| 5.1        | 一维不均匀传输系统的散射问题                  | 129        |
| 5.1.1      | 一维半无限长系统的格林函数问题                 | 130        |
| 5.1.2      | 平面分层介质的格林函数                     | 131        |
| 5.1.3      | 平直地面的散射和并矢格林函数问题                | 133        |
| 5.2        | 波导中的导体膜片和阶梯波导的散射问题              | 135        |
| 5.2.1      | 阶梯波导的散射问题                       | 136        |
| 5.2.2      | 关于边界场匹配完备性的讨论                   | 139        |
| 5.2.3      | 波导中的金属厚膜片和无限薄膜片                 | 141        |
| 5.3        | 三维微波网络系统的一般解析方法                 | 144        |
| 5.3.1      | 微波网络系统解析方法的一般步骤                 | 144        |
| 5.3.2      | 具有孪生模的微波系统的解析方法                 | 146        |
| 5.3.3      | 具有相互垂直的虚拟边界的情况、三维系统的一般方法        | 148        |
| <b>第六章</b> | <b>电磁波基本方程组的数值方法</b>            | <b>152</b> |
| 6.1        | 电磁波基本方程组数值方法的基本理论               | 153        |
| 6.1.1      | 电磁波基本方程组差分方法的一般讨论               | 153        |
| 6.1.2      | 规则边界条件和不规则边界条件                  | 154        |
| 6.1.3      | 电磁波基本方程组的差分格式与“频域 FDTD”的差分格式的比较 | 157        |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| 6.2 谐振腔本征问题的数值计算·····                      | 164 |
| 6.2.1 电磁波本征问题的基本数值方法·····                  | 165 |
| 6.2.2 准三维谐振系统的数值方法及其与经典方法和解析方法的比较<br>····· | 169 |
| 6.2.3 具有孪生模的复合系统的三维谐振腔的本征问题的数值计算<br>·····  | 173 |
| 6.3 微波网络参量的数值方法·····                       | 176 |
| 6.3.1 波导中的膜片·····                          | 176 |
| 6.3.2 阶梯波导和波导中的厚膜片的数值方法·····               | 180 |
| 6.3.3 最简单的三维微波网络的数值计算·····                 | 181 |
| 6.3.4 微波网络数值方法小结·····                      | 182 |
| 参考文献 ·····                                 | 186 |



## 第一章 经典场论和现代电磁场理论

我们 20 世纪 50~60 年代在大学学习或从事科学研究的人，往往受到一种狭隘的科学哲学思想的影响，这就是认为一切科学知识都是从生产实践和科学实验中总结出来的——“实践出真知”。因此自然地认为电磁场理论就是中世纪以来的所有电磁学实验定律的总结。值得庆幸的是，现代年轻一代的科学工作者，对于科学有了更为宽广、更为深刻的认识：“科学特别是自然科学，更为重要的目标之一，就是追寻科学本身的原动力，或曰追寻其第一推动，同时，科学的这种追求精神本身，又成为社会发展和人类进步的一种最基本的推动。”<sup>[1]</sup>

毫无疑问，科学是认真的、严谨的、实事求是的。科学家的工作，他所提出的新的科学规律不能与人们在实践中所证明的事实相悖，但是科学家的主要工作，并不是解说现有的实践结果，把这些实践结果总结成一定的简明形式，他们所探索的科学规律总是超越了所有已有的科学实验的水平，从现有的实验现象中去追求更深刻的、还从未被当时的科学实验所发现过的科学现象和科学规律。他们天才的科学创见，主要并不是为了总结和解说当代人已经做过的那些实验结果，而是为今后的科学探索指明一条或许可行的途径。“在发展理论物理中，寻求自洽总是比实验结果更为重要。优雅而美丽的理论会因为不和观察相符而被否决，但是我从未看到任何仅仅基于实验而发展的主要理论。首先是需求优雅而协调的数学理论，然后理论作出可被观察的预言。如果观察和预言一致，这并未证明该理论；只不过该理论存活，以作进一步预言，新预言又要由观察来验证。如果观察和预言不符，即抛弃该理论。”

霍金的上面这段话既肯定了“实践是检验真理的惟一标准”；同时又否定了科学只能从实践中来的片面观点。“我从未看到任何仅仅基于实验而发展的主要理论”，明确地指出了科学理论就是科学本身的原动力。科学理论除了人类的直接实践经验以外，更重要的是以数学为基础的数理逻辑或自然科学哲学的发展。而这种数理逻辑的发展，主要是人类思维活动的结果，它与人类的实践活动往往并没有直接的联系。特别是到了科学发展到一定高度的时候，数学逻辑一般说来不再直接与人类的实践活动相联系，而是有其自身发展的动力和规律。

麦克斯韦就是这样一位天才的科学家，他所创立的电磁场理论与在他之前的电磁学实验已经有了本质的区别。他的工作主要不是总结前人已经做过的电磁学实验结果，而是为了后人，为了人类开辟了一个科学和技术的新时代。为了更好地说明这一点，让我们来回顾一下电磁学定律和电磁场理论的建立与发展的历史。

### 1.1 经典电磁场理论的建立与发展的历史回顾<sup>[2]</sup>

众所周知，麦克斯韦在 19 世纪 50~60 年代的 10 多年里，经过了一条十分曲折的道路，终于建立了完整的电磁场理论。在文献[2]中对于这一历史过程有十分详细的描

述. 麦克斯韦在 1855~1866 年发表了三篇电磁学论文, 又于 1873 年出版了巨著《电磁学通论》. 在这部巨著中, 麦克斯韦不仅提出了电磁波的存在, 指出了电磁波在空气中的传播速度等于光速  $c$ , 进而指明了光就是电磁波的一种. 这样麦克斯韦的理论就远远地超出了在他之前的经典电磁学实验的范畴. 那种把麦克斯韦方程组看做是经典电磁学实验定律总结的看法显然是不恰当的, 也不符合历史事实. 因为在麦克斯韦以前从来没有关于电磁波的概念, 更谈不上电磁波的实验了. 事实上, 麦克斯韦所预示的电磁波是在他死后才被赫兹等人所发现的, 也只有在发现了电磁波以后, 麦克斯韦关于电磁波的理论才得到承认. 当然麦克斯韦理论离不开在他以前已经创立的电磁学理论, 特别是法拉第的电磁感应理论和他关于电磁之间通过场来进行相互作用的观点, 这些都是麦克斯韦理论创立的基础. 但是由此把麦克斯韦理论看成是经典电磁学实验定律的总结则是完全不正确的, 它混淆了麦克斯韦电磁场理论与经典电磁学之间的根本区别. 因此也就分不清麦克斯韦在创立电磁场理论中所做的哪些工作是本质性的创造, 哪些只是带有历史局限性的看法. 而这些对于电磁场理论的发展是非常重要的. 为此我们先来看一下经典电磁学的发展历史和麦克斯韦在创立电磁场理论中的主要贡献, 这是十分必要的.

### 1.1.1 电磁学三大实验定律的建立过程

为了全面了解麦克斯韦的电磁场理论的创立过程及其所做的主要贡献, 我们有必要稍为详细地了解一下在麦克斯韦以前电磁学发展的历史过程, 特别是库仑定律、安培定律和法拉第定律的建立过程, 以及 19 世纪 40 年代的经典物理学家为了把这三大定律总结成一个关于电磁学的统一理论所做的努力. 虽然对于电磁现象人们早在几千年前就已经有了一定的认识(相传黄帝利用磁的同性相斥、异性相吸的特性发明了指南针, 关于琥珀或绸缎经摩擦后可以带有不同极性的“电”, 不同极性的电具有同性相斥、异性相吸特性的描述早已出现在先秦的典籍中), 但是这些只是人们对于电磁现象的原始的认识. 只有在一定的数学和物理学的理论基础上, 人们才能对电磁现象进行科学的观察, 从而得出通常所谓的电磁学的基本定律. 这些电磁学实验定律本身就是其他相关科学和数学理论发展的产物.

库仑定律是关于两个静止点电荷间相互作用的定律. 它指出, 两个静止点电荷之间的作用力与点电荷电量的乘积成正比, 与点电荷之间距离的平方成反比. 事实上, 这只是现在所做的描述方法. 在提出这一定律的前后, 并没有关于电量的定量描述的方法, 所研究的规律只是电荷间相互作用的平方反比律. 这一定律的建立是人们对于电荷之间相互作用的认知从同性相斥、异性相吸的原始的定性认识发展到经典电磁学科学理论的标志. 无疑法国科学家库仑对此做出了最大的贡献, 1785 年他用所设计的精确的扭称测量电荷之间的力, 证明了不论同性电荷之间的斥力, 还是异性电荷之间的吸力都与距离平方成反比, 他的实验误差偏离平方为  $4 \times 10^{-2}$ , 即如果令电荷之间的电力  $F$  的大小与距离  $r$  之间的关系为

$$F \propto \frac{1}{r^{2 \pm \delta}} \quad (1.1)$$

那么, 在库仑实验中误差  $\delta < 0.04$ . 他的实验最直接地验证了电力(电荷之间的作用力)的平方反比关系, 得到了公认, 并以他的名字来命名电力定律. 但是实际上早在库

仑实验以前很多人已经在各种非正式场合提出和证明了电力的平方反比关系。这些工作从物理上说，是受到万有引力定律的启发，从实验上并不是直接地测量电荷之间的作用力，因为这种弱力的测量精度不高，而是从带电金属空腔内部的电力等于零与电力的平方反比关系的等价性，来证明电力的平方反比律。特别值得提出的是英国著名物理学家卡文迪许（Cavendish）所做的分析和实验，早在 1772 年他就做了如下的实验：用一个金属球作为内导体，用两个金属半球形的薄壳合起来同心地套在金属球的外面。通过小孔和细的金属丝先把带电的金属外壳和金属球连接在一起，然后再把连接内金属球和外金属壳的金属丝抽出来，打开金属壳，用当时最灵敏的静电计测量金属球上的电荷，发现测不出金属球上有任何带电的迹象。通过测定静电计的精确度和精确的分析计算得到电力与平方反比率的误差  $\delta < 0.02$ 。也就是说，他所得到的关于库仑定律的精度实际上已经比 13 年后库仑所做实验的精度高一倍。

由于在经典电磁学和电磁场理论中，实际上只有库仑定律是可以用来经典物理学的测量方法来进行直接的实验检验的。所以对于库仑定律的反比律的实验几个世纪来一直兴趣不断，它的实验精度到 20 世纪 70 年代已达  $10^{-16}$  以上。而且在以后所有关于库仑定律的实验中，再也没有利用库仑所做的直接测量距离和力的方法，而都是用卡文迪许方法上的改进。从这里我们可以看到不仅实验结果总是受到测量手段的制约，它只能得到一定条件下的近似规律，而且实验本身也依赖于一个好的数学和物理模型。

与库仑定律不同，安培定律和法拉第定律本身都难以直接用实验检验，其精度不明。而且实际上，在麦克斯韦理论建立以前，这两个定律只是描写存在于电和磁之间相互作用的某些定性的规律。而电与磁，用现在的话来表示，是关于电场和磁场之间的严格的数学关系及其物理内容，实际上正是通过麦克斯韦的工作才确立起来的。

1820 年，丹麦物理学家奥斯特（Oersted）首先发现了电流的磁效应：在载流长直导线附近平行放置的磁针受力后沿垂直导线的方向偏转，这一发现揭示了电与磁的联系，开创了电磁学的新纪元。随后法国科学家安培研究了圆形电流对磁针作用、两平行直线电流之间的作用、钢在电流作用下的磁化、螺旋管与磁铁的等效性等一系列电磁现象，并提出了分子电流的假设。在这一系列电磁现象揭示出来以后，人们开始寻找支配这些电磁力的基本规律。其中最重要的就是毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律。毕奥和萨伐尔首先发现长直线电流导线对磁极的作用与  $\frac{1}{r}$  成正比。随后他们把长直载流导线弯成如图 1.1 的夹角为  $2\alpha$  的折线，把磁极放在折线所在平面的角平分线的  $P$  点。实验发现磁极所受的作用力的方向垂直于磁极与折线所构成的平面，其大小与电流成正比，与距离  $r$  成反比还与角  $\alpha$  有关，与  $\tan \frac{\alpha}{2}$  成正比

$$H_{\text{折}} = k_{\text{折}} \frac{1}{r} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (1.2)$$

由于上面实验的对称性，可以认为折线的一支对磁极的作用力的贡献是  $H_{\text{折}}$  的一半，即

$$H = k \frac{1}{r} \tan \frac{\alpha}{2} \quad (1.3)$$

式中  $k = \frac{1}{2} k_{\text{折}}$ 。式(1.3)表明，起于  $A$  点到无穷远的直线电流对点  $P$  磁极的作用力  $H$

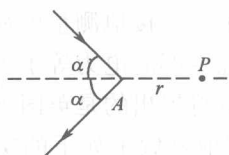


图 1.1 毕奥和萨伐尔的实验

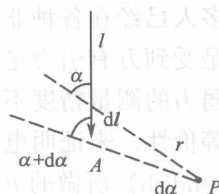


图 1.2 推导式 (1.5) 的图解

是距离  $r$  和角度  $\alpha$  的函数，为了得出在  $A$  点附近的电流元  $Idl$  对  $P$  点磁极的作用力，按图 1.2 将  $H$  对  $dl$  取导数，经一般的微分和三角函数运算后得到电流元  $Idl$  对  $P$  点磁极的作用力  $dH$

$$dH = k \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha \quad (1.4)$$

式 (1.4) 是在拉普拉斯帮助下完成的，以后又写成矢量形式

$$d\mathbf{H} = k \frac{Id\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^3} \quad (1.5)$$

式 (1.5) 就是著名的毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律。它也成为现代教科书中通用的电流元激发磁场的公式。但是必须说明的是关于磁场的观念还是麦克斯韦以后才明确建立的。在毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律中，它只表示对于磁极的作用力，实际上这一定律仍只是一个有一定局限性的近似定律。由于磁极在物理上是一个非常模糊的概念，而在麦克斯韦以前很长的时间里，关于磁场的概念并没有明确地建立起来。而这时通过安培的工作，关于磁极与电流的等价关系已经得到了公认。所以在当时的物理学界致力于建立电流元之间的作用公式。由于牛顿力学的影响，特别是超距作用观点的影响，当时一些著名的科学家还不能理解“场”的概念，所推导出来的作用力都存在一定的错误。只有在麦克斯韦建立了电磁场理论以后，才真正解决了电流元之间的作用力问题。

在电流的磁效应被发现以后，人们自然地关心它的逆效应：磁的电效应，即磁能否产生电流，19 世纪 20 年代，尽管科学家们在电的磁效应上取得了引人注目的进展，但是在寻找磁的电效应的研究工作却一直没有获得突破。从现在的观念来看，由于电流存在稳态的过程，所以电流的磁效应也存在稳态的效应；而直到今天，我们还没有发现单极的磁荷，因而也没有办法找到稳态下与电流相对应的磁流。所以磁的电效应本质上是非稳态的。在经过了多次失败以后，法拉第认识到了磁的电效应必须和某种磁的运动过程联系在一起。1831 年法拉第第一次成功地进行了电磁感应的实验，他的实验如图 1.3

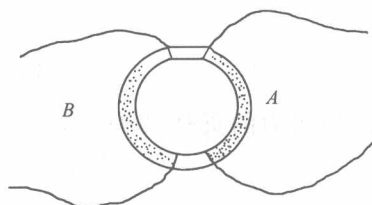


图 1.3 法拉第第一次成功的电磁感应实验

所示，在一个软铁圆环上绕两个彼此绝缘的线圈  $A$  和  $B$ ， $B$  的两端用铜导线连接，形成闭合回路，并在铜导线下面放置一个小磁针。 $A$  和电池组相连，接通开关，形成另一个闭合回路。法拉第发现，在线圈  $A$  的开关合上，有电流通过的瞬间，磁针反向偏转；这表明了线圈  $B$  中出现了感应电流。随后他又做了大量不同情况下的磁的电效应的实验，得出结论：感应电流与电流的变化有关，而与电流本身

无关，并正式把它定名为“电磁感应”。法拉第并没有得出电磁感应定律的数学表达式。电磁感应的数学表达式是诺依曼（Neumann）于 1845 年通过分析而给出的。下面我们将看到虽然诺依曼导出了电磁感应定律的定量表达式，但是他在对于电磁感应定律的物理解释上存在着超距作用的观点，所以很难说明这公式的正确的物理内容。只有在麦克斯韦创立电磁场理论以后，才真正给出了法拉第定律的精确的数学形式和比较确切的物理内容。

### 1.1.2 电磁学规律与力学规律的比较

从上一小节的讨论中我们可以看到，在一般的教科书中所强调的作为麦克斯韦创建电磁场理论的电磁学三大实验定律：库仑定律、安培定律和法拉第定律在他们的年代并没有真正的建立起来。整个电磁学的定律是从 18 世纪 60~70 年代到 19 世纪 60~70 年代整整一个世纪的物理学家们，通过实验观察、建立理论，再在理论的指导下进行新的观察，才逐步建立起来的。库仑、安培和法拉第只是这一群科学家的中的杰出的代表。但是在当时的科学技术发展的水平下，不可能有人发现并建立一个完整的电磁学定律，虽然有很多人，包括当时一些最享有盛名的科学家，如韦伯、诺依曼等人都致力于这一目标。只是由于当时还不具备产生电磁场理论的数学和物理学基础。在这以后科学界出现了几件大事：首先就是在这一过程中产生了一场关于超距作用和近距作用的争论。当然现在似乎已经公认超距作用的观点错误的，而近距作用是一种正确的科学哲学观点。但是我们并不想强调科学哲学上的争论，因为实际上只要不越出科学本身的范围，也就是说只要把科学理论是否符合实验观测作为科学理论能否存活的惟一依据，这种科学哲学的争论只是科学不断发展和人们对于宇宙的认识范围不断扩大和认识宇宙规律不断深入的一种反映。由于科学上的发展是没有止境的，我们也很难说能够或者已经找到一种永远正确的科学哲学。实际上科学家持有什么样的哲学观点对于他的科学理论的正确与否往往并没有直接的关系。那些持有超距作用观点的科学家在一些问题上对于科学的发展同样做出过重要的贡献，而持有近距作用观点的人同样也会产生科学上错误的结论。在科学发展的这一特殊的时代所产生的超距作用和近距作用的争论，实际上正是反映了人类对于宇宙认识的一种飞跃：从仅仅认识符合牛顿力学规律的实体物质的宏观世界，扩展到无静止质量的、因而也不符合牛顿力学规律的“场”的世界。科学发展总是既有对原有科学理论的继承，又有对原有理论的否定。所以电磁学的发展过程就是在与牛顿力学的类比中产生，并在对牛顿力学类比中所产生的某些规律的否定中发展起来的。实际上牛顿本人也并不是完全持有超距作用的观点。万有引力定律可以说是牛顿力学的一个基础。用超距作用的观点还是用近距作用的观点，实际上对于说明万有引力定律并不存在任何影响。万有引力从其直接的形式是描述两个相距有一定距离的实体物质之间的作用力，如果我们把它写成

$$F_{12} = G \frac{M_1 M_2}{R^2} \quad (1.6)$$

似乎可以看到两个质量分别为  $M_1$  和  $M_2$ ，间距为  $R$  的物体之间的作用力  $F_{12}$  只与这两个的质量和距离有关系，而与这两个物体之间的“空间”没有关系。所以往往被看成是超距作用的一个典型例子。但是我们知道对于单个物体  $M_1$  来说，在它周围空间的每一



个点都具有这样的性质，即如果把一个单位质量体积无限小的“质点”放置在该点上，这个质点就会受到如下的力：

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = G \frac{M_1 \mathbf{R}}{R^3} \quad (1.7)$$

从这个方程的形式来看，在一个有一定质量物体的周围空间的每一个点都有一个确定的量与之对应。自然我们可以把这个“量”看做某种特殊物质的一种属性，并把它称之为“场”。这样，两个物体之间的万有引力就可以看成是通过“场”来传递的。在万有引力这个问题上这两种观点并没有产生任何不同的结果。

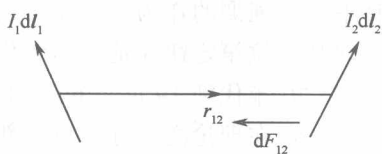


图 1.4 安培推导电流元之间的作用力时所用的模型

毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律虽然已经在近代教科书上被赋予电流元激发“场”的内容。但是当时并没有“场”的概念，而只是看做电流元对于“磁极”的作用力。但是磁极在物理上没有明确的内容，所以人们并不满足这样的公式，而是努力寻找两个电流元之间的作用力。这就是安培以及后来韦伯等人所做的工作。但是不论安培还是韦伯都没有得到正确的结果，按牛顿力学的

经验，安培等人把两个电流元之间的作用力看成与万有引力相类似，作用力的方向就在两个电流元的连接线的方向上。如图 1.4 所示。安培最初导出的结果为

$$d\mathbf{F}_{12} = -kI_1I_2\mathbf{r}_{12} \left[ \frac{2}{r_{12}^3}(d\mathbf{l}_1d\mathbf{l}_2) - \frac{3}{r_{12}^5}(d\mathbf{l}_1d\mathbf{l}_2)(d\mathbf{l}_2d\mathbf{r}_{12}) \right] \quad (1.8)$$

由于安培定律所表示的各种形式，包括毕奥-萨伐尔-拉普拉斯公式是经过微分处理后对于电流元的公式。而实际上电流元是不存在的，所以这些公式不能直接用于实验观测来加以验证。所以对于公式的正确与否往往要通过推理来加以验证。对于安培的式(1.8)我们只要假定如图1.5所示的情况，式(1.8)就简化为

$$d\mathbf{F}_{12} = -\frac{kI_1I_2d\mathbf{l}_1d\mathbf{l}_2}{r_{12}^3}\mathbf{r}_{12}(2 - 3\cos^2\theta_1) \quad (1.9)$$

由此可以推出，当  $\theta_1$  满足  $\cos^2\theta_1 = 2/3$  时，则  $d\mathbf{F}_{12} = 0$ 。这显然是不合理的。韦伯在这样的基础上希望推导出包括库仑定律、安培定律和电磁感应定律的统一的电磁理论，他自然也得不到有意义的结果。

在表示电流磁效应的安培定律上，一直停留在毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律的情况下，对法拉第电磁感应定律的定量形式却取得了突破。1845年，诺依曼首先给出了电磁感应定律的定量表达式，而令人感兴趣的是诺依曼本人却是一个“超距作用”论者，他从研究两个载流线圈之间的相互作用能出发，把一个运动的线圈称为施感线圈，其电流为  $i'$ ，周长为  $l'$ ，面积为  $S'$ ，而把不动的线圈称为被感线圈，其相应的量则不加撇。利用毕奥-萨伐尔定律施感线圈对于距离为  $r$  的单位磁极的作用力为

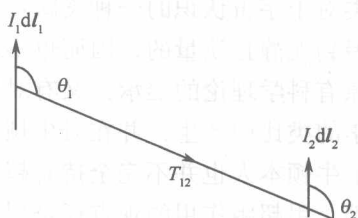


图 1.5 按照本图的模型推导出式 (1.15) 的结果



$$\mathbf{B} = k i' \int_{L'} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (1.10)$$

诺依曼把被感线圈看做由许多磁距为  $d\mathbf{M} = i d\mathbf{S}$  的磁分子组成的. 这些磁分子因受施感线圈作用而具有能量为  $dU_i = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{M} = i \mathbf{M} \cdot d\mathbf{S}$ . 对构成被感电流的全部磁分子求和, 即可得出被感线圈因受施感线圈的作用而具有的势能——即两载流线圈的相互作用能, 为

$$U_i = I \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.11)$$

把式(1.10)代入上式, 利用  $\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \left( \frac{1}{r} \right)$  及斯托克斯公式, 得

$$\begin{aligned} U_i &= k i i' \iint_S \int_{L'} \frac{d\mathbf{l}' \times \mathbf{r}}{r^3} d\mathbf{S} = k i i' \iint_S \int_{L'} \nabla \times \frac{d\mathbf{l}'}{r} d\mathbf{S} \\ &= k i i' \iint_S \int_{L'} \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r^3} d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.12)$$

这个表达式代表了当电流强度保持不变时, 分开两个电流回路到无限远, 克服电动力所必须完成的机械功的总和.

当被感线圈不动, 而施感线圈运动时, 两线圈的相互作用能发生变化. 诺依曼认为, 被感线圈中的感应电动势  $\epsilon$  与相互作用能表示式中  $i' \iint_L \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r}$  的部分的变化率成正比, 考虑到楞次定律加上一个负号, 即得

$$\epsilon = -k \frac{d}{dt} i' \iint_L \frac{d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}'}{r} \quad (1.13)$$

诺依曼引入一个矢量函数  $\mathbf{a}$ , 称之为电动力学势,  $\mathbf{a}$  定义为

$$\mathbf{a} \equiv i' \int_{L'} \frac{d\mathbf{l}'}{r} \quad (1.14)$$

把式(1.14)代入式(1.13)得

$$\epsilon = -k \int_L \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \cdot d\mathbf{l} \quad (1.15)$$

式(1.15)就是麦克斯韦建立电磁场理论以前由诺依曼所表述的电磁感应定律的数学形式. 从这一公式, 如果直接从式(1.9)中除去  $i$ , 即认为被感线圈中的感应电动势  $\epsilon$  与相互作用能表达式(1.10)中的  $\iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}$  部分的变化率成正比. 即可得到近代教科书中常见的电磁感应定律的下述表达式:

$$\epsilon = -k \frac{d}{dt} \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -k \frac{d\Phi}{dt} \quad (1.16)$$

式(1.16)与式(1.15)等价, 并且, 由此可以看出

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{a} \quad (1.17)$$

虽然式(1.17)并不是诺依曼当时所做的工作, 而且这里  $\mathbf{B}$  的含义与麦克斯韦方程组中的磁通量强度也不尽相同. 用旋度来表示法拉第电磁感应定律正是麦克斯韦创立电磁场理论工作的一个重要组成部分. 但是从诺依曼的工作可以得到式(1.17)这一点对于麦克斯韦方程组的建立显然有重要的影响.

诺依曼是持有超距作用观点的, 它并不认为  $\mathbf{a}$  是一个有任何意义的物理量, 而只

是作为数学运算过程中的替代这一积分的辅助量。但是为什么在安培定律中求解两个电流元的作用力时，超距作用观点导致了错误的结果呢？让我们来看一下近代电磁场理论中两个电流元之间的力的正确公式，这里我们只写出其结果，详细推导可见文献[2]

$$d\mathbf{F}_{12} = k \frac{I_1 I_2}{r_{12}^3} d\mathbf{l}_2 \times (d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}) \quad (1.18)$$

这一公式可以分解为两部分

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B} \quad (1.19)$$

和

$$\mathbf{B} = k \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} \quad (1.20)$$

式(1.18)抛弃了安培关于两个电流元之间的力必须在两个电流元的矢径方向上的假定，而包括了垂直与矢径的分量。但是这样一来，两个电流元之间的作用力与反作用力不再大小相等方向相反了，即牛顿第三定律在这里不再适用了。按照诺依曼的观点，电磁的作用与牛顿力学的作用相同，可以完全看成是两个实体物质之间的相互作用，而式(1.19)中的  $\mathbf{B}$  或式(1.13)中的  $\mathbf{a}$  没有实在的物理内容，而只是一种替代的数学形式，那么牛顿第三定律就必须满足，否则系统的动量就不会再守恒了。为了保持系统的动量守恒，必须认为式(1.19)中的  $\mathbf{B}$  或式(1.13)中的  $\mathbf{a}$  都是实在的物理量，它们也存在能量和动量。在电磁场理论中考虑了场的动量以后，在电流的相互作用过程中仍保持系统的动量守恒。这样一来，超距作用的观点在电磁场理论中就站不住脚了。但是为什么诺依曼推导电磁感应定律的公式中，坚持超距作用的观点而能得出合理的结果呢？这是因为在电磁感应定律的推导过程中，所考虑的只是两个物体（电流元）在相互作用过程中的能量关系，而没有考虑到力的问题。从电磁场理论中我们可以知道，磁场对于电流元的力，本质上就是洛伦兹力，这个力只改变电子运动的方向而不对电子做功。所以只考虑功和能量关系的诺依曼的电磁感应定律的推导中，并不因为把电磁运动规律与牛顿的力学规律类比而失去其合理性。

牛顿力学的数理逻辑的基础就是：力学定律在伽利略变换下的不变性。本来牛顿力学研究的是三维空间内矢量函数间的数学关系，伽利略变换不变性的本质就是三维空间内矢量的牛顿力学规律可以直接通过欧氏空间内投影表达成标量的数学形式。因而，一个三维系统内的力学规律，同样可以通过平面系统内的力学规律关系与垂直方向上的力学规律关系的叠加来表示。这就是安培研究电流元之间的作用力方法的理论基础。但是牛顿理论框架中的这一个基本点在电磁相互作用中不再适用了。经典电磁学家在与牛顿力学的类比中发展了电磁学规律，又在牛顿力学的束缚下，迷失了前进的方向，无法找到电磁现象的深刻的内在规律。这是本书所要研究的主要内容，我们这里所指出的对于牛顿理论框架的修正，不同于20世纪科学家们所做的关于运动相对性的所有讨论，在那里所有物理学的矢量关系都被欧氏空间上的投影直接地简化为标量的问题。而我们工作的出发点就是去研究和建立关于矢量运算的严格的运算法则，当然这种运算法则是不能在经典数学的基础上建立起来的，而是必须在现代数学的基础上才有可能得到严格的描述。并通过这一新的被称为矢量偏微分算子的理论的数学方法把矢量运算转换为标量算子的运算形式。

### 1.1.3 麦克斯韦创立电磁场理论的物理基础和主要贡献

在讨论麦克斯韦方程组的创立过程之前, 为了便于说明, 让我们先写出现在通用的在自由空间中的麦克斯韦方程组, 虽然这一麦克斯韦方程组并不是麦克斯韦创立电磁场理论时所用的形式, 而是在麦克斯韦死后多年, 由赫兹等人总结而成的

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.24)$$

但是这组方程无疑保持了麦克斯韦工作的精华或实质内容.

在以往的电磁场理论的书籍中, 强调的是麦克斯韦如何总结经典电磁学定律, 然后在安培定律上加上由他自己所创立的位移电流项, 于是就创立了麦克斯韦方程组. 但正如霍金所指出的, “……但是我从未看到任何仅仅基于实验而发展的主要理论. 首先是需求优雅而协调的数学模型提出理论, 然后理论作出可被观测的预言”. 实验基础固然是很重要的, 但是不应该提到不恰当的位置. 从上面几个小节的讨论可以看到, 仅从实验观测, 所能得到的规律性的东西是相当有限的, 因为实验观测不仅受到实验条件的限制, 而且像安培定律和电磁感应定律实际上是无法进行精确的定量的实验观测的. 那么麦克斯韦在发展电磁场理论中所做的工作与他的前人相比主要的差别在什么地方呢? 或者说除了经典电磁学已有的实验定律以外, 他是依靠什么才创建了电磁场理论呢?

我们认为首先是因为他找到了一种适合于描述电磁波这种特殊物质运动形式的数学方法. 韦伯由于没有找到一种能够反映电磁波这种新物质运动形式的“优雅而协调”的数学方法, 他在把电磁学三大定律结合在一起上同样做了大量的工作, 但是用的是欧氏空间中进行解析的经典数学方法, 所得到的始终只是一堆非常繁复而不协调的方程组, 从这些方程组除了得到一些基本上与已有的经典电磁学定律类似的结论外, 得不到任何物理上有新意义的内容. 从这里可以看到: 从经典电磁学定律向电磁场理论的发展过程中, 经典电磁学的观测和实验固然是一个重要的实验基础, 但是同样重要的是寻找一种新的数学方法, 这种能够反映物质世界新规律的数学方法就是以旋度运算为代表的矢量偏微分算子的数学形式. “麦克斯韦的名著《电磁场论》发表的时候, 他只是在著作中部分地采用哈密顿在 1834 年建立四元数论时所采用的数学方式, 并引入哈密顿算符  $\nabla$  来表达场的聚度 (散度的负值) 和旋度. 在麦克斯韦的理论形成若干年以后, 矢量场论开始发展起来<sup>[3]</sup>.” 麦克斯韦正是矢量场论这一重要的数学领域的奠基人. 实际上, 要精确地描述电磁波的运动形式, 需要的是现代分析的数学方法, 只有在矢量偏微分算子的空间内才能对电磁波进行精确的描述. 由于历史的原因, 关于抽象空间中的分析数学是在麦克斯韦以后 30 多年才出现的, 但这并不影响麦克斯韦提出存在电磁波的光辉预见. 因为只要引入了旋度运算, 经典电磁学的数学形式已经非常接近于当时人们已经熟悉的经典波动方程的形式. 虽然对于麦克斯韦方程组这种特殊的数学形式的精确求解问