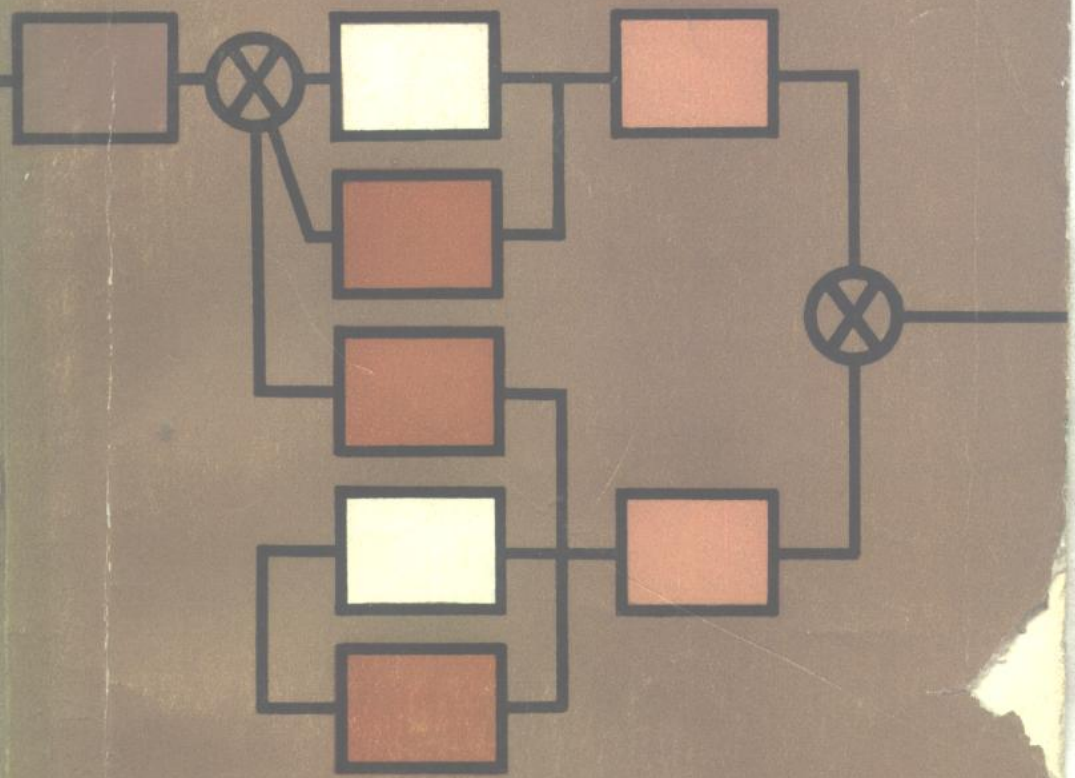

线性控制系统理论

xianxing kongzhi
xitong lilun

何　关　钰　著

辽宁科学技术出版社

线性控制系统理论

何关钰 著

辽宁科学技术出版社
一九八五年·沈阳

线性控制系统理论
Xianxing Kongzhi Xitong Lilun
何关钰　著

辽宁科学技术出版社出版　（沈阳市南京街6段1里2号）
辽宁省新华书店发行　沈阳新华印刷厂印刷

开本：850×1168 1/32　印张：21 7/8　插页：2
字数：604,000
1982年12月第1版　1985年7月第2次印刷

责任编辑：李殿华　封面设计：秀　中

印数：4,501—6,500
统一书号：15288·92　定价：5.45 元

序

自动控制理论在四、五十年代已发展成熟，其主要内容是传递函数方法，即通过传递函数的性质、频率特性来分析系统的性能．这种理论我国早在五十年代就有专书介绍，已为我国广大的自动控制工程专业人员所熟悉．到了五十年代末、六十年代初自动控制理论发展到以状态变量为标志的现代控制理论的阶段．经过了二十年的发展，现代控制理论已形成了拥有许多分支的边缘学科，并对航天、航海、航空和武器系统的制导、导航、控制与工业过程的控制都已起了巨大作用．此外，这种理论处理问题的方法已影响到经济学、管理科学、环境科学等等．

现代控制理论中最基础、最成熟的部分是线性控制系统的理论．这也是在应用中起较大作用的部分．从线性系统的能控性、能观测性两个基础概念的提出起，极点配置、状态重构（观测器）、二次性能指标的线性系统的极值（即“最优”）控制等等，乃是现代控制理论中在工程设计上使用得最有效果的一些部分．如果不计随机干扰或别种干扰，不讨论系统辨识等问题，这些也就形成了学习现代控制理论的人所必须熟悉和掌握的基础知识．从欧洲各国的情况来看，这些也是高等工科院校自动控制系学生的一、二年级基础课的内容．这些部分还是现代控制理论中与经典控制理论衔接得最紧密的部分．从这些角度看来，线性控制系统理论正是最适合当前从事自动控制工程的实际工作者所应掌握的基础理论知识，从而也是学习自动控制专业的大学生所应学习的基础知识．

关于线性控制系统的专书，国外近年来出版了一些．但我国迄今尚未出版过全面介绍线性控制系统理论基础的入门书．何关钰同志参考了许多外国专书，特别是日本的书籍，主要用矩阵的方

法系统地介绍了线性控制系统理论的各个部分，写成了这本五十余万字的书．为了便利读者，书中简要地叙述了所需用的关于矩阵的知识．本书介绍各部分时还着重举简单的例，使读者通过这些例更好地理解那些理论．本书还着重与传递函数方法作比较，注意这里介绍的理论与经典控制理论的衔接，比较适合当前我国工程技术人员阅读．这本书既可以作为高等学校自动控制专业学生的参考书，也可以用作在职工程技术人员进修的读物．

近几年来我国有些同志在运用现代控制理论于实际工程设计上已经取得了一些成绩．广大的工程技术人员渴望有一些适合他们原有专业基础知识的读物，帮助他们在过去所学的经典控制理论的基础上较快熟悉现代控制理论中最基础的部分，以适应当前我国四个现代化，特别是工业现代化的需要，跟上国外自动控制发展的趋势．希望这本书的出版能在一定程度上满足这方面的需要．

关　肇　直

一九八一年四月三十日于北京

目　　录

第一章　矩阵基本知识

对线性控制系统进行理论分析时，可以用不同的数学方法．本书中采用矩阵工具，这种方法比较简单，读者容易接受和掌握．本章主要介绍一些有关的矩阵知识．

§1　环　和　域

在研究问题时，总要碰到一些具有共同内在属性的对象，数学上把这些对象归纳在一起，称为集合，集合中的每个对象称为元素．比如有一群人，假若把每个人看成元素，就组成一个人的集合；假若把每个人的年龄看成元素，就得到一个由正整数组成的年龄集合．被研究的所有元素的总和，称为空间，空间当然也是一个集合，它是所研究对象的最大集合．

一般，用大写字母 A、R、Ω 等表示空间或集合，小写字母 a、r、ω 等表示元素．

下面这些空间在线性系统理论中是经常遇到的：

R^1　一切实数 a 组成的一维实数空间．

R^n　n 个实数的有序排列 $(a_1\cdots a_n)$ 组成的 n 维实数空间．

C^1　一维复数空间．

C^n　n 维复数空间．

$R^{n\times m}$　一切 $n\times m$ 阶实矩阵组成的矩阵空间．

$C^{n\times m}$　一切 $n\times m$ 阶复矩阵组成的矩阵空间．

为了表示元素以及集合之间的关系，引进以下符号：

$\in$：表示属于．$a\in A$ 就是元素 a 属于集合 A，若 a 不属于 A，则表示成 $a\bar{\in}A$ 或 $a\notin A$．

$\subset$：表示包含． 当 A 中所有元素都属于 B，即若 $a \in A$ 就有 $a \in B$ 时，称 B 包含 A 或 A 被包含于 B，记作 $A \subset B$，这时还称 A 是 B 的子集．

空间 Ω 中某些元素组成的集合显然是 Ω 的子集． 以后，凡提及集合都假定是在某个空间中考虑的，即它是该空间的子集．

A^c：表示余集．设 A 是空间 Ω 中的集合，则 A^c 是由 Ω 中一切不属于 A 的元素组成的集合，称为 A 的余集．

ϕ：表示空集．它是这样一种集合，里面不含有任何元素，并约定对任意集合 A，有 $\phi \subset A$．

在集合之间可定义 $\cup$ 和 $\cap$ 两种运算：

$\cup$ 表示集合的并．$A \cup B$ 是一个新的集合，它的元素或 $\in A$ 或 $\in B$，两者至少居其一，即

$$A \cup B = \{a:\ a \in A \text{ 或 } a \in B\}$$

$\cap$ 表示集合的交．$A \cap B$ 的元素既 $\in A$ 又 $\in B$，即

$$A \cap B = \{a:\ a \in A \text{ 同时 } a \in B\}$$

根据集合运算的定义，可推得以下性质：

$$A \cap A = A \cup A = A,\quad A \subset A \cup B,\quad A \cap B \subset A$$
$$A \cap \phi = \phi,\qquad\qquad A \cup \phi = A,\ A \cap A^c = \phi$$
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

[例 1.1] 设空间 Ω 是全体整数，集合 A 是所有被 2 整除的数，集合 B 是所有被 3 整除的数，求 $A \cup B$，$A \cap B$，A^c，B^c．

解 根据题设，A 和 B 可以表示为

$$A = \{2k:\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$$
$$B = \{3k:\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\}$$

所以

$$A \cup B = \{6k,\ 6k+2,\ 6k+3,\ 6k+4:\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots\}$$

$$A\cap B=\{6k: k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$
$$A^c=\{2k+1: k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$
$$B^c=\{3k+1, 3k+2: k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$$

除了集合与集合的运算外，在集合或空间的元素之间也可以定义运算．比如实数空间 R^1 中就有加减乘除四则运算，抽象地看，这些运算无非都是对任意两个实数，确定另一个相对唯一的实数与它们相对应，只不过确定的方法不同而得到不同的运算．

设 A、B、C 是三个空间或集合，对任意 $a\in A$ 和 $b\in B$，都有唯一确定的 $c\in C$ 与之对应，称这种对应关系为 A、B 取值于 C 的运算，记作 $a*b=c$． 如果 $A=B$，就称 $*$ 是定义在 A 上的运算，如果还有 $A=C$，则称运算 $*$ 在 A 上封闭．假若对任意 a、b 都有 $a*b=b*a$，称运算 $*$ 是可交换的．

有了元素运算的概念，就可以对空间作一系列的定义．

设在空间 Ω 上定义了运算 $*$ 并且满足：

i. Ω 对运算 $*$ 封闭；

ii. 对任意 a、b、$c\in\Omega$，结合律成立，即

$$(a*b)*c=a*(b*c);$$

iii. 存在单位元 e，对一切 $a\in\Omega$ 有

$$a*e=e*a=a;$$

iv. 任意 $a\in\Omega$，都存在逆元 a^{-1} 使

$$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$$

则称 Ω 为群．如果 $*$ 是可交换运算，就称为交换群．

为了和实数空间中的运算相呼应，有时把运算 $*$ 视作加法或乘法． 当 $*$ 表示加法时，就改记为 $+$，单位元记作 0，逆元记作 $-a$，分别称为零元和负元． 当 $*$ 表示乘法时，$a*b$ 也记作 $a\cdot b$ 或 ab，单位元记作 1．

设在空间 Ω 上定义了加法和乘法两种运算并且封闭，如果满足：

i. 对加法构成交换群；

ii. 乘法结合律成立，即 $(ab)c=a(bc)$；

iii. 加法、乘法分配律成立，即

$$a(b+c)=ab+ac,\ (a+b)c=ac+bc$$

则称 Ω 为环. 如果乘法运算可交换，就称为交换环.

设 Ω 是具有乘法单位元 1 的交换环，它至少有一个非零元，并且对任意非零元 a，存在逆元 a^{-1} 使 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$，则称 Ω 是域.

非零有理数集、非零实数集都对乘法构成交换群；

无理数集对加法或乘法都不构成群，因为两个无理数的加法或乘法可能不是无理数，说明运算不封闭；

偶数集、整数集都是交换环；

实系数多项式集是交换环；

n 阶实矩阵集是环，但不是交换环；

有理数集、实数集、复数集都是域；

实系数有理分式集是域.

以上集合都含有无限个元素，我们再举一个只具有限元素的域的例子. 设空间 Ω_3 由 0，1，2 三个元素组成，加法和乘法运算分别定义为：

加法	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

乘法	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

可见 Ω_3 是个域，它的零元是 0，单位元是 1. 负元和逆元为：

$$-0=0,\ -1=2,\ -2=1,\ 1^{-1}=1,\ 2^{-1}=2.$$

更一般地，设 Ω_n 由 $0, 1, \cdots, n-1$ 这 n 个元素组成，加法和乘法运算定义为

加法	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
0	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
1	1	2	3	$\cdots$	0
2	2	3	4	$\cdots$	1
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-1$	$n-1$	0	1	$\cdots$	$n-2$

乘法	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
0	0	0	0	$\cdots$	0
1	0	1	2	$\cdots$	$n-1$
2	0	2	4	$\cdots$	$n-2$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$n-1$	0	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	1

则当 n 是质数时，Ω_n 为域；n 不是质数时，Ω_n 是交换环.

§2 矩阵的定义

设 Ω 是环或域，a_{ij} 是 Ω 的元素，$i=1,\cdots,n$，$j=1,\cdots,m$，把这 $n\times m$ 个元素排成 n 行 m 列的矩形阵势

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

称 A 为定义在 Ω 上的 $n\times m$ 阶矩阵，有时简单记为 $A=[a_{ij}]$. 作为矩阵元素的环或域 Ω，通常取为实数空间、复数空间、有理分式空间、函数空间等，以后若无特别说明，均是指实数空间.

当 $n=1$、$m>1$ 或者 $n>1$、$m=1$ 时，矩阵就是个横长条或竖长条，分别称为 m 维行向量和 n 维列向量. 当 $n=m$ 时，矩阵是方的，称为 n 阶方阵.

对于矩阵可定义如下运算，设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pq} \end{bmatrix}$$

i. 数乘. 设 $\alpha\in\Omega$，则

$$\alpha A=\begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \alpha a_{nm} \end{bmatrix}.$$

ii. 加法. 设 $n=p$，$m=q$，则

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{bmatrix}$$

iii. 乘法. 设 $m=p$, 则

$$AB=\begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nq} \end{bmatrix}$$

其中 $$d_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$$

iv. 相等. 如果 $n=p$, $m=q$ 并且 $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,\cdots,n$, $j=1,\cdots,m$, 称 A 和 B 相等,记作 $A=B$.

矩阵运算具有以下性质:

$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$, $\quad(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$,

$A+B=B+A$, $\quad(A+B)+C=A+(B+C)$,

$(AB)C=A(BC)$, $\quad A(B+C)=AB+AC$,

$(A+B)C=AC+BC$

矩阵乘法不满足交换律,即 AB 不一定等于 BA.

根据矩阵运算的定义,可见一切 n 阶方阵组成的空间是一个环,它的零元和单位元分别为

$$O_n=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\quad I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

称 O_n 为 n 阶零阵, I_n 为 n 阶单位阵. 零阵可以推广为 $n\times m$ 阶的,记作 $O_{n\times m}$. 为了演算时的书写方便,以后凡用到零阵或单位阵时都把它们的足标略去,简单地记为 O 和 I. 另外,我们还约定,如果矩阵中有某部分的元素都是 0,在不致引起误解的情况下,有时就用一个 0 来代替这个部分.

利用矩阵这个工具,可以给不少问题的描述和求解带来方便,请看下面几个例子.

[例 1.2] 试用矩阵表示如下的代数方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}\right\}$$

解 令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

则根据矩阵乘法和相等的定义,这个代数方程组就可表示为

$$AX = B$$

有了这个表示式后，便可借助矩阵性质来分析该方程组的解的存在性、解的表达式等等.

[例 1.3] 试用矩阵来描述如下的变系数高阶线性微分方程

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1(t)x^{(1)}(t) + a_0(t)x(t) = b(t)$$

其中 $a_0(t), \cdots, a_{n-1}(t), b(t)$ 都是连续函数.

解 设 $x_1(t) = x(t), x_2(t) = x^{(1)}(t), \cdots, x_n(t) = x^{(n-1)}(t)$, 则这个高阶微分方程可化为一阶线性微分方程组:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ &\dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ &\cdots\cdots \\ &\dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t) \\ &\dot{x}_n(t) = -a_{n-1}(t)x_n(t) - \cdots - a_0(t)x_1(t) + b(t) \end{aligned}$$

令

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0(t) & \cdots & \cdots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

$$C = [\,1 \;\; 0 \cdots 0\,]$$

除去C外,以上都是定义在连续函数空间的矩阵. 这样,该高阶微分方程就可表示为

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}(t) &= A(t)X(t) + B(t)\\ x(t) &= CX(t)\end{aligned}\right\}$$

[例 1.4] 设有某信号为

$$f(t) = a_1\cos\omega_1 t + a_2\cos\omega_2 t$$

其中a_1、a_2、ω_1、ω_2都是常值. 在对$f(t)$进行测量时混杂了随机干扰,为了对测量值做数据处理,试建立$f(t)$的数学模型.

解 令

$$x_1(t) = a_1\cos\omega_1 t,\qquad x_2(t) = a_2\cos\omega_2 t$$

$$x_3(t) = \dot{x}_1(t) = -a_1\omega_1\sin\omega_1 t,\quad x_4(t) = \dot{x}_2(t) = -a_2\omega_2\sin\omega_2 t$$

有 $$\dot{x}_3(t) = -\omega_1^2 x_1(t),\quad \dot{x}_4(t) = -\omega_2^2 x_2(t)$$

得到

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_3(t)\\ \dot{x}_2(t) &= x_4(t)\\ \dot{x}_3(t) &= -\omega_1^2 x_1(t)\\ \dot{x}_4(t) &= -\omega_2^2 x_2(t)\\ f(t) &= x_1(t) + x_2(t)\end{aligned}$$

记 $$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\end{bmatrix},\qquad \dot{X}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ -\omega_1^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\omega_2^2 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad C = [\,1\quad 1\quad 0\quad 0\,]$$

则数学模型就是

$$\left.\begin{aligned}\dot{X}(t) &= AX(t)\\ f(t) &= CX(t)\end{aligned}\right\}$$

对矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$, 称 $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1m} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$.

为A的转置. A^T是$m\times n$阶矩阵，它的第i行第j列位置上的元素是a_{ji}. 可见，行向量的转置是列向量,列向量的转置是行向量. A的转置也有记作A^τ或A'的.

矩阵转置具有以下性质:

$$(A^T)^T = A, \qquad (AB)^T = B^TA^T$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (\alpha A)^T = \alpha A^T$$

如果A是方阵并且$A = A^T$，称A是对称矩阵或者A是对称的. 方阵从左上到右下的斜线称为主对角线,也就是a_{11}，a_{22}，$\cdots$，a_{nn}连成的线,可见所谓对称正是对于主对角线对称.

如果方阵除了主对角线上的元素外,其余元素都是0，则称这个方阵为对角形,即

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

如果方阵主对角线上侧（下侧）的元素都是0，则称这个方阵为下三角形(上三角形),即:

$$\text{下三角形}\begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{上三角形}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

§3 矩阵的数字表征

对于每一个矩阵,都可用一些数值来表示它的结构特征,主要有行列式、秩、迹和特征值等,下面分别进行讨论.

行列式

这是反映方阵特性的数字表征,A的行列式记为$\det A$或$|A|$，它用如下方法定义: