



華夏英才基金學術文庫

张少琴 杨维阳 张克颢 著

复合材料的Z-断裂 准则及专家系统



科学出版社

www.sciencep.com



华夏英才基金学术文库

复合材料的Z-断裂 准则及专家系统

张少琴 杨维阳 张克颢 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书重点介绍复合材料断裂理论领域的最新研究成果——复合材料的Z断裂准则.大量试验证明:该准则不仅可以对复合材料的裂纹扩展方向进行正确预测,而且可以解决复杂的复合材料构件抗断裂的设计问题.同时,详细介绍近期开发的基于Z断裂准则的工程应用软件——复合材料断裂分析专家系统.该软件系统实用、快速,可以计算复合材料板I型、II型、III型及复合型裂纹的断裂参数:应力强度因子, S 因子, Z 因子, J-积分, 裂纹尖端应力、应变场, 裂纹扩展方向预测, 抗断裂安全系数.此外,还探讨了复合材料断裂力学基础.利用复变函数方法,通过求解偏微分方程的边值问题,推出裂纹尖端的应力场、位移场.同时也探讨了 J-积分在 Z-断裂准则中的应用.

本书可供相关领域的大学生、大学教师、工程师和研究人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

复合材料的 Z-断裂准则及专家系统/张少琴, 杨维阳, 张克
颢著. —北京: 科学出版社, 2003

ISBN 7-03-011449-3

I. 复… II. ①张… ②杨… ③张… III. ①复合材料-
断裂准则 ②复合材料-断裂准则-专家系统 IV. TB33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034776 号

策划编辑: 毕 颖/文案编辑: 吴伶伶/责任校对: 柏连海
责任印制: 钱玉芬/封面设计: 黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2003 年 9 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2003 年 9 月第一次印刷 印张: 14 1/4
印数: 1—2 000 字数: 275 000

定价: 30.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

纤维复合材料是一种新兴的结构材料,广泛应用于航空、航天、国防、交通、化工等众多领域。纤维复合材料具有低密度、高强度、高刚度,以及能够通过控制纤维和基体的黏结及编织来设计复合材料结构性能的特性,所以它是一种很有发展前景的工程材料。

复合材料具有复杂的组成本性,复合材料结构的各向异性力学特征等因素使复合材料中的微观裂纹发生复合型变形,并且这些微观裂纹可能在黏结面上及在层与层之间发生、扩展,发展成宏观层间裂纹或是穿透性裂纹,最终导致结构破坏。

本书从宏观方面研究复合材料板的断裂问题。重点介绍复合材料断裂理论领域的最新研究成果:复合材料的 Z-断裂准则。同时,详细介绍近期开发的工程应用软件——复合材料断裂分析专家系统。此外,还探讨了复合材料断裂力学基础及 J-积分在 Z-断裂准则中的应用。

第一章介绍复合材料力学基本知识,第二章介绍复合材料断裂力学知识。采用复变函数方法,通过求解偏微分方程的边值问题,推出复合材料板裂纹尖端附近的应力场和位移场。前两章的内容为后面各章提供了理论基础。第三至五章论述了新近提出的适用于复合材料的 Z-断裂准则及其应用。推出了复合材料板 I 型、II 型、III 型、复合型裂纹的 Z 因子及其受纯弯、纯扭、弯扭载荷作用正交异性复合材料裂纹板的 Z 因子。根据 Z-断裂准则,预测复合材料板的裂纹扩展方向角,确定裂纹开始扩展的条件。大量的数值和实验结果证明了 Z-断裂准则应用于纤维复合材料断裂问题的正确性,而某些数值和实验结果说明了 S-断裂准则应用于某些纤维复合材料断裂问题是有缺陷的。第六章探讨了 J-积分在 Z-断裂准则中的应用。第七章阐述近期根据 Z-断裂准则开发的工程应用软件——复合材料断裂分析专家系统。该工程软件实用、快速,可以计算复合材料板 I 型、II 型、III 型及复合型裂纹的断裂参数:应力强度因子, S 因子, Z 因子, J-积分,裂纹尖端应力、应变场,裂纹扩展方向预测,抗断裂安全系数。

编写分工如下:张少琴编写第三、四、五、八章,杨维阳编写第一、二、六章,张克颢编写第七章。

本书作为一本专业参考书,适合于在复合材料断裂领域学习、研究的大学生、研究生、教师、工程师和研究人员参考使用。

借此机会,十分感谢华夏英才基金、山西省计划委员会留学人员基金和太原

重型机械学院对本书出版的大力支持，并且感谢祝伟荣研究生在本书成稿过程中给予的热心帮助。

目 录

前 言

第一章 复合材料力学	(1)
第一节 应力-应变关系	(1)
第二节 弹性常数及其取值范围	(4)
第三节 复合材料板的应力-应变关系	(8)
第二章 复合材料断裂力学	(12)
第一节 复合材料板 I 型裂纹应力场分析	(12)
第二节 复合材料板 II 型裂纹应力场分析	(27)
第三节 复合材料板复合型裂纹应力场分析	(37)
第四节 复合材料板 III 型裂纹应力场分析	(44)
第五节 受纯弯正交异性复合材料裂纹板应力场分析	(51)
第六节 受纯扭正交异性复合材料裂纹板应力场分析	(60)
第三章 Z-断裂准则	(68)
第一节 基于能量的 S-断裂准则	(68)
第二节 面内膨胀应变能密度因子和广义畸变应变能密度因子	(71)
第三节 基于能量的 Z-断裂准则	(79)
第四节 S-准则和 Z-准则的初步讨论	(83)
第四章 Z-断裂准则在复合材料板断裂分析中的应用	(92)
第一节 预测碳纤维增强复合材料板 I 型裂纹扩展方向	(92)
第二节 预测碳纤维增强复合材料板复合型裂纹扩展方向	(94)
第三节 预测裂纹扩展方向角的讨论	(105)
第五章 Z-准则在受弯扭复合材料板断裂分析中的应用	(108)
第一节 受纯弯正交异性复合材料裂纹板的 Z 因子	(108)
第二节 受纯扭正交异性复合材料裂纹板的 Z 因子	(110)
第三节 受弯扭正交异性复合材料裂纹板的 Z 因子	(111)
第四节 Z-准则在受弯扭复合材料板断裂分析中的应用	(114)
第六章 J-积分在 Z-准则中的应用	(115)
第一节 正交异性复合材料板 I 型裂纹的 J-积分	(115)
第二节 正交异性复合材料板 II 型裂纹的 J-积分	(120)
第三节 正交异性复合材料板复合型裂纹的 J-积分	(122)
第四节 J-积分在 Z-准则中的应用	(127)

第七章 复合材料断裂分析的专家系统	(132)
第一节 专家系统功能介绍.....	(132)
第二节 专家系统软件的安装.....	(133)
第三节 操作指南.....	(139)
第四节 应力场, 应变场, Z-断裂因子计算.....	(140)
第五节 S 、 S_V 、 S_d 因子的分布及断裂参数计算	(142)
第六节 裂纹扩展方向预测与安全性评估.....	(143)
第七节 专家系统软件的源程序介绍.....	(144)
第八章 结束语	(214)
参考文献	(216)

CONTENTS

Foreword

1. Mechanics of Composite Materials	(1)
1.1 Stress-Strain Relations	(1)
1.2 Elastic Constants and their limits	(4)
1.3 Stress-Strain Relations of Composite Plate	(8)
2. Fracture Mechanics of Composite Materials	(12)
2.1 Stress Field Analysis for Mode I Crack in Composite Plate	(12)
2.2 Stress Field Analysis for Mode II Crack in Composite Plate	(27)
2.3 Stress Field Analysis for Mixed Mode Crack in Composite Plate ...	(37)
2.4 Stress Field Analysis for Mode III Crack in Composite Plate	(44)
2.5 Stress Field Analysis for Orthotropic Composite Plate with Crack under Pure Bending	(51)
2.6 Stress Field Analysis for Orthotropic Composite Plate with Crack under Pure Twisting	(60)
3. Z-Fracture Criterion	(68)
3.1 Energy Based S-Fracture Criterion	(68)
3.2 In-Plane Dilatational Strain Energy Density Factor and Generalized Distortional Strain Energy Density Factor	(71)
3.3 Energy Based Z-Fracture Criterion	(79)
3.4 Numerical and Experimental Verification of Z-Criterion and Discussion of S-Criterion	(83)
4. Application of Z-Criterion to Fracture Analysis in Composite Plate	(92)
4.1 Prediction of Mode I Crack Propagating Direction in Carbon-Fiber Reinforced Composite Plastic(CRP)	(92)
4.2 Prediction of Mixed Mode Crack Propagating Direction in Carbon- Fiber Reinforced Composite Plastic(CRP)	(94)
4.3 Discussion on Prediction of Crack Propagating Direction	(105)
5. Application of Z-Fracture Criterion to Fracture Analysis in Composite Plate under Bending and Twisting	(108)
5.1 Z Factor in Orthotropic Composite Plate with Crack under Pure Bending	(108)

5.2	Z Factor in Orthotropic Composite Plate with Crack under Pure Twisting	(110)
5.3	Z Factor in Orthotropic Composite Plate with Crack under Bending and Twisting	(111)
5.4	Application of Z-Criterion to Fracture Analysis in Composite Plate under Bending and Twisting	(114)
6.	Application of J-Integral to Z-Fracture Criterion	(115)
6.1	J-Integral for Mode I Crack in Orthotropic Composite Plate	(115)
6.2	J-Integral for Mode II Crack in Orthotropic Composite Plate	(120)
6.3	J-Integral for Mixed Mode Crack in Orthotropic Composite Plate	(122)
6.4	Application of J-Integral to Z-Criterion	(127)
7.	Expert System of Fracture Analysis	(132)
7.1	Functional Introduction of Expert System	(132)
7.2	Installation of Expert System Software	(133)
7.3	Instruction of Using Expert System Software	(139)
7.4	Calculation of Strain Fields, Stress Fields, Z-factor	(140)
7.5	Calculation of Fracture Parameters S , S_V , S_d	(142)
7.6	Prediction of Crack Propagating direction and Safety Factor Analysis	(143)
7.7	Source Code of Expert System Software	(144)
8.	Conclusions	(214)
	References	(216)

第一章 复合材料力学

第一节 应力-应变关系

一、各向异性材料

从宏观角度来看,纤维增强复合材料可以认为是具有各向异性力学性能的单—材料.本书仅研究具有线弹性性能的材料.线弹性各向异性材料,其弹性性质在不同方向上不尽相同.对于各向异性材料而言,应力-应变关系如下^[1,2]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

即

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1-1)$$

式中: σ_i ——应力分量;

ϵ_j ——应变分量;

C_{ij} ——刚度矩阵分量,称为刚度系数.

式(1-1)表示应变分量是应力分量的线性函数,称为广义胡克定律.

可以证明刚度矩阵 $[C]$ 是一个对称矩阵,即

$$C_{ij} = C_{ji} \quad (1-2)$$

因此对于各向异性材料而言, $[C]$ 只有 21 个独立分量,每个分量即刚度系数是一个表征弹性特性的材料常数.

式(1-1)可改写为

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

即

$$\epsilon_i = B_{ij} \sigma_j \quad (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad (1-3)$$

式中: $[B]$ ——柔度矩阵;

B_{ij} ——柔度矩阵分量, 称为柔度系数.

显然, 刚度矩阵和柔度矩阵是互逆的, 即

$$[B] = [C]^{-1}, \quad [C] = [B]^{-1} \quad (1-4)$$

并且柔度矩阵 $[B]$ 也是一个对称矩阵, 只有 21 个独立分量. 每个分量即柔度系数也是一个表征弹性特性的材料常数.

二、正交异性材料

线弹性正交异性材料是指通过每一点都具有三个相互垂直的弹性对称平面的材料. 因此, 由弹性对称可以证明

$$C_{14} = C_{15} = C_{16} = C_{24} = C_{25} = C_{26} = C_{34} = C_{35} = C_{36} = C_{45} = C_{46} = C_{56} = 0 \quad (1-5)$$

由此刚度矩阵只有 9 个独立分量, 且应力-应变关系式(1-1)可写成

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-6)$$

类似地, 柔度矩阵 $[B]$ 也只有 9 个独立分量, 且应变-应力关系式(1-3)可写成

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & 0 & 0 & 0 \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

三、各向同性材料

线弹性各向同性材料, 其弹性性质在任一点的所有方向上都相同. 这时 C_{ij} 只有两个独立分量, 应力-应变关系式(1-1)可写成

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11} - C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

因此, 柔度矩阵 $[B]$ 也只有 2 个独立分量, 且应变-应力关系式(1-3)如下:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{12} & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{B_{11} - B_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_{11} - B_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{B_{11} - B_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (1-9)$$

第二节 弹性常数及其取值范围

一、正交异性复合材料

利用弹性常数：杨氏模量、泊松比和剪切模量表示柔度矩阵 $[B]$ 为

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

式中: $E_i (i = 1, 2, 3)$ ——正交异性材料沿弹性主方向 i 的杨氏模量(条件是 $\sigma_i \neq 0, \sigma_j = 0, i \neq j$);

$\nu_{ij} (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ —— i 方向伸、缩时决定 j 方向缩、伸的泊松比, 即 $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$ (条件也是 $\sigma_i \neq 0, \sigma_j = 0, i \neq j$);

$G_{ij} (i, j = 1, 2, 3, i \neq j)$ —— $i-j$ 平面的剪切模量. 弹性主方向的弹性常数, 称为主弹性常数, 以区别任意坐标系中的弹性常数.

考虑到柔度矩阵 $[B]$ 的对称性, 从式(1-10)可推出正交异性材料的互反定理(麦克斯韦尔定理):

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, i \neq j) \quad (1-11)$$

注意到

$$[C][B] = [I] \quad (1-12)$$

由式(1-10)容易推出刚度系数

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{E_2 E_3 \Delta} = C_{21} \\ C_{13} &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}}{E_2 E_3 \Delta} = C_{31} \\ C_{23} &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{E_1 E_3 \Delta} = C_{32} \\ C_{44} &= G_{23}, \quad C_{55} = G_{31}, \quad C_{66} = G_{12} \end{aligned} \quad (1-13)$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} \end{vmatrix} \quad (1-14)$$

我们知道,应变能密度恒取正值.因此刚度矩阵和柔度矩阵都是正定的,从而有^[2,3]

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{13}\nu_{32}\nu_{21}}{E_1 E_2 E_3} > 0 \quad (1-15)$$

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0 \quad (1-16)$$

$$G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0, \quad G_{31} > 0 \quad (1-17)$$

$$1 - \nu_{23}\nu_{32} > 0, \quad 1 - \nu_{13}\nu_{31} > 0, \quad 1 - \nu_{12}\nu_{21} > 0 \quad (1-18)$$

$$\begin{aligned} |\nu_{21}| &< \left(\frac{E_2}{E_1}\right)^{1/2}, & |\nu_{12}| &< \left(\frac{E_1}{E_2}\right)^{1/2} \\ |\nu_{32}| &< \left(\frac{E_3}{E_2}\right)^{1/2}, & |\nu_{23}| &< \left(\frac{E_2}{E_3}\right)^{1/2} \\ |\nu_{13}| &< \left(\frac{E_1}{E_3}\right)^{1/2}, & |\nu_{31}| &< \left(\frac{E_3}{E_1}\right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1-19)$$

利用式(1-11)、式(1-15)和式(1-16),可推出

$$\nu_{13}\nu_{32}\nu_{21} < \frac{1}{2} \left(1 - \nu_{13}^2 \frac{E_3}{E_1} - \nu_{32}^2 \frac{E_2}{E_3} - \nu_{21}^2 \frac{E_1}{E_2} \right) < \frac{1}{2} \quad (1-20)$$

式(1-20)告诉我们三个泊松比的乘积小于 0.5.

二、各向同性材料

利用弹性常数:杨氏模量、泊松比和剪切模量表示柔度矩阵[B]如下:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

式中: E ——各向同性材料的杨氏模量;

ν ——泊松比;

G ——剪切模量, 独立的弹性常数只有两个, 因为

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (1-22)$$

由式(1-12)和式(1-21)容易推出刚度矩阵 $[C]$ 的分量如下:

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} = 2G + \lambda \\ C_{12} &= C_{13} = C_{21} = C_{23} = C_{31} = C_{32} = \lambda \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = G \end{aligned} \quad (1-23)$$

式中

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - \nu)} \quad (1-24)$$

由于柔度矩阵和刚度矩阵都是正定的, 从而有

$$E > 0, \quad G > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (1-25)$$

第三节 复合材料板的应力-应变关系

对于纤维增强复合材料板,在面内有两个弹性主方向:纤维方向(纵向)和垂直纤维方向(横向).若两个坐标轴平行于弹性主方向,则复合材料板只有 4 个独立的弹性常数: E_1, E_2, ν_{12} 或 ν_{21}, G_{12} , 表现出正交异性特征,称为正交异性纤维复合材料板.若两个坐标轴不平行于弹性主方向,则复合材料板引起交叉效应,表现出各向异性特征,称为各向异性纤维复合材料板.

一、正交异性复合材料

如图 1-1 所示,若坐标轴平行于材料的弹性主方向,其中 x 轴平行于纤维方向,则在平面应力状态下正交异性纤维复合材料的应力-应变关系如下:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad (1-26)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \\ &= [B] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-27)$$

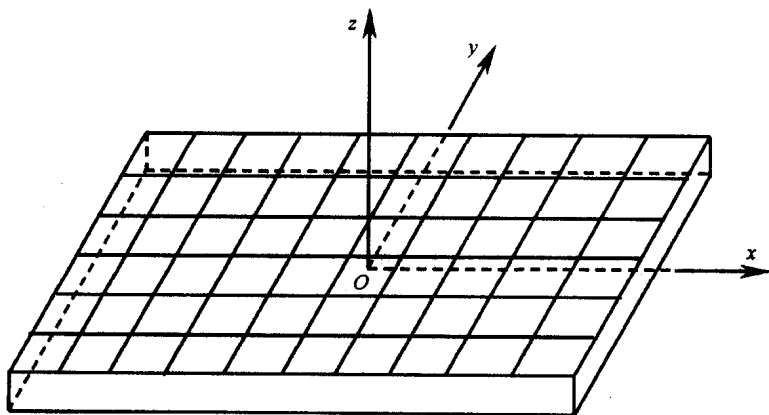


图 1-1 弹性主方向坐标系