工　程　数　学

数学物理方程·特殊函数

杨丘辰　徐明聪　编

国防工业出版社

内容简介

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”四个分册之一。本册包括数学物理方程、特殊函数两部分。数学物理方程部分介绍方程的建立和定解条件的提法、驻波法、积分变换法、行波法、点源影响函数法以及二阶线性方程的化简与分类，并介绍定解问题的适定性概念。各种方法的物理背景均作了较详的叙述。特殊函数部分介绍Γ函数、B函数,贝塞尔函数、勒让德函数与切比雪夫多项式。书中各部分均附有适量习题，并附有习题答案。

本书可作为高等工科院校试用教材，也可供有关科技人员参考。

工 程 数 学

数学物理方程·特殊函数

杨应辰　徐明聪　编

*

国防工业出版社 出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$787\times1092^{1}/_{32}$　印张$12^{1}/_{4}$　260千字

1980年10月第一版　1980年10月第一次印刷　印数：00,001—18,000册

统一书号：15034·2055　　定价：1.25元

前　言

本书是西北工业大学、北京航空学院、南京航空学院等三院校数学教研室合编的“工程数学”之一。全套共分八部分，按下列次序分四册出版：矢量分析、复变函数、积分变换；线性代数、计算方法；数学物理方程、特殊函数；概率论与数理统计。

本册包括数学物理方程和特殊函数两部分。数学物理方程部分介绍数学物理学中偏导数方程定解问题的一些最常用的解法——驻波法、积分变换法、行波法、点源影响函数法，以及二阶线性方程的化简、分类和定解问题的适定性概念。对各种解法都着重阐明其物理背景，揭示出它们的来龙去脉。特殊函数部分包括Γ函数、B函数、贝塞尔函数、勒让德函数、切比雪夫多项式。这一部分主要是为数学物理方程部分的需要而编写的。

本书内容可根据具体情况予以取舍。书中各部分皆附有适量习题，并附有习题答案。阅读本书只需要具备高等数学基础知识。

本册数学物理方程部分由北京航空学院杨应辰编写，特殊函数部分由北京航空学院徐明聪编写，两部分均由南京航空学院王步仁主审。参加本书审稿的还有西北工业大学、沈阳航空工业学院、南昌航空工业学院等院校数学教研室的同志。对在本书编写过程中给予大力支持以及提供宝贵意见的

所有同志，我们在此一并致以衷心的感谢。

由于我们的水平所限，书中缺点和错误在所难免，诚望同志们批评指正。

编　　者

目　录

数学物理方程

特殊函数

数学物理方程

第一章　典型方程与典型问题

自然科学与工程技术中种种运动发展过程与平衡现象各自遵守一定的规律。这些规律的定量表述通常呈现为关于某个或某些未知函数的方程或方程组。一般地，这些方程中不但含有未知函数，也含有未知函数的导数（或以微分的形式出现），或它的积分等，或兼而有之。我们将只介绍含有未知多元函数及其偏导数（可以仅含偏导数）的方程，并称之为偏导数方程（或偏微分方程）。例如

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{a}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=f(x,\ y,\ z) \tag{b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+h(x,\ t) \tag{c}$$

$$u=xu_x+yu_y+u_xu_y \tag{d}$$

$$yz_x+xz_y=z^n+g(x,\ y) \tag{e}$$

其中 a、κ、n 皆为已知常数，f、g、h 皆为已知函数。

我们介绍一些常用的解法，且只着重于这些方法的实际背景及其应用，而不追求论证，也不去论述这一数学领域的全貌。

关于常微分方程的一些术语，如：解、阶、线性、齐次等，这里可以沿用。例如

函数 $\phi=\sin(x+at)$ 和 $\psi=\sin(x-at)$ 都是方程(a)

的解（显然不是全部的解）。

方程（a）、（b）、（c）都是二阶的，（d）、（e）都是一阶的。

方程（a）、（b）、（c）都是线性的而且是常系数的，方程（d）是非线性的，方程（e）仅当 $n=1$ 或 0 时是线性的，但不是常系数的。

方程（a）是齐次的，方程（b）与（c）都是非齐次的，方程（e）仅当 $n=0$ 且 $g\equiv 0$ 时是齐次的。

下列是一个一般的一个二元函数的二阶线性常系数方程

$$a\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+d\frac{\partial\phi}{\partial x}+e\frac{\partial\phi}{\partial y}+f\phi=g(x,y)$$

其中 a、b、…、f 为已知常数，$g(x,y)$ 为已知函数。上边的方程（a）与（c）都是它的特例。

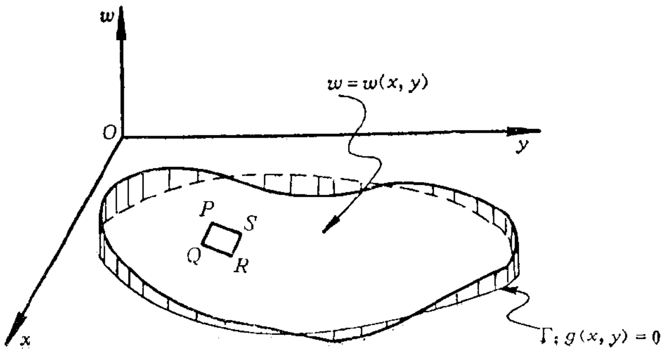
以后讨论的方程大都是二阶线性常系数的，不过也研究一些多于两个自变数的情况。我们着重于一些富有实际意义的、数学物理学中常遇到的那些方程。虽然在第一章里它们都是由特定的问题导出的，但它们之中的每一个都会出现在各种不同的科学领域里。所以研究它们的各种定解问题，既有代表性，又有广泛的应用范围。

§1.1 物理模型与典型方程的建立

（一）薄膜平衡方程

设有一片均匀而柔软的薄膜，张紧于固定而微挠的框架上，膜的面密度（单位面积的质量）为 ρ，张力（单位长度

的直截口上所受的拉力）为T（其方向在切平面内而垂直于截口），由于框架的翘起与膜自身的重力作用，膜呈一曲面形。参看图1-1。图中α、β、γ、δ为张力与水平面所成的角。



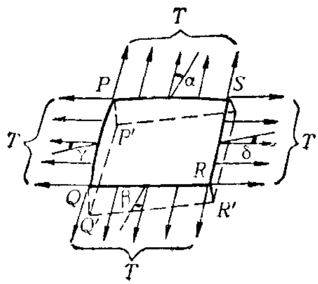


图 1-1

设此曲面的方程为$w = w(x, y)$。恒假定它有连续的二阶偏导数，且$|w(x, y)| \ll 1$。

在采用直角坐标系分析薄膜的平衡时，取四边形微元$PQRS$，其在xy面上的投影为一矩形$P'Q'R'S'$。它的四边皆平行于坐标轴，顶点的坐标分别是(x, y)、$(x+\Delta x, y)$、$(x+\Delta x, y+\Delta y)$、$(x, y+\Delta y)$。

在上述假定下，可以认为T是常数且

$$\widehat{PQ}\approx\widehat{RS}\approx\overline{P'Q'}=\overline{R'S'}=\Delta x$$

$$\widehat{PS}\approx\widehat{QR}\approx\overline{P'S'}=\overline{QR}=\Delta y$$

$$\sin\alpha\approx\operatorname{tg}\alpha\approx\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{后}$$

$$\sin\beta\approx\operatorname{tg}\beta\approx\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{前}$$

$$\sin\gamma\approx\operatorname{tg}\gamma\approx\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{左}$$

$$\sin\delta\approx\operatorname{tg}\delta\approx\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{右}$$

$$PQRS\text{ 的面积}\approx P'Q'R'S'\text{ 的面积}=\Delta x\Delta y$$

于是，作用在微元的周界上的张力沿w方向的分量的代数和是

$$T\Delta y(\sin\beta-\sin\alpha)+T\Delta x(\sin\delta-\sin\gamma)$$

$$\approx T\Delta y\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{前}-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{后}\right]+T\Delta y\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{右}-\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{左}\right]$$

$$=T\Delta y\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+T\Delta x\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

作用在微元上的重力（沿w轴的负方向）的大小是$\rho g\Delta x\Delta y$，g为重力常数。

当膜处于平衡的静止状态时，这两个力的代数和应等于零：

$$T\Delta y\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)+T\Delta x\Delta\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\rho g\Delta x\Delta y=0$$

以$T\Delta x\Delta y$除之，则得

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)}{\Delta x}+\frac{\Delta\left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)}{\Delta y}=\frac{\rho g}{T}$$

令 $\Delta x\to 0$、$\Delta y\to 0$，并把 $\frac{\rho g}{T}$ 简记为 f，得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f \tag{1.1.1}$$

这就是微翘的薄膜所呈曲面 $w=w(x, y)$ 所应适合的偏导数方程，简称为薄膜平衡方程。

一般地，又称

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x, y) \tag{1.1.2}$$

为**泊松**（Poisson）**方程**。

如果薄膜自身的重力可以被忽略，则 $f\equiv 0$ 而称之为**拉普拉斯**（Laplace）**方程**（**调和方程**）：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \tag{1.1.3}$$

在数学物理学与工程技术理论中有很多典型问题都归结为求 Laplace 方程或 Poisson 方程的解。例如热导体内的定常温度分布、静电场的场强分布、不可压缩流体的定常无旋流场的速度位势等问题。

在三维的问题里，相应地有

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=f(x, y, z) \tag{1.1.4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=0 \tag{1.1.5}$$

也分别称为 Poisson 方程与 Laplace 方程。

为了书写简便，人们常用符号 ∇^2 表示算符 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$

或$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。这样就可以把方程(1.1.4)、(1.1.5)简写成

$$\nabla^2 w=f,\quad \nabla^2 w=0$$

算符 ∇^2 就读为 Laplace，并称 $\nabla^2 w$ 为一个**拉普拉斯式**(Laplacian)。我们知道 Laplace 算符在极坐标、柱坐标、球坐标制中分别是

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1.1.6}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{1.1.8}$$

顺便指出，薄钣的平衡方程是

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=f(x,y) \tag{1.1.9}$$

当$f(x,y)\equiv 0$时，称为**重调和方程**。利用 Laplace 算符，可以把重调和方程写为

$$\nabla^2\nabla^2 w=0 \tag{1.1.10}$$

（二）热传导方程

设在热导体中，由于内部或界面上温度分布不均匀或有热源存在而引起热的传导，使得各点$P(x,y,z)$处的温度Φ不同且随时间t而变化，$\Phi=\Phi(x,y,z,t)$，物质的密度为ρ，比热（单位质量每升高一度所需要的热量）为c。欲探索各处温度分布的情况，可任取一微元（参看图 1-2）而

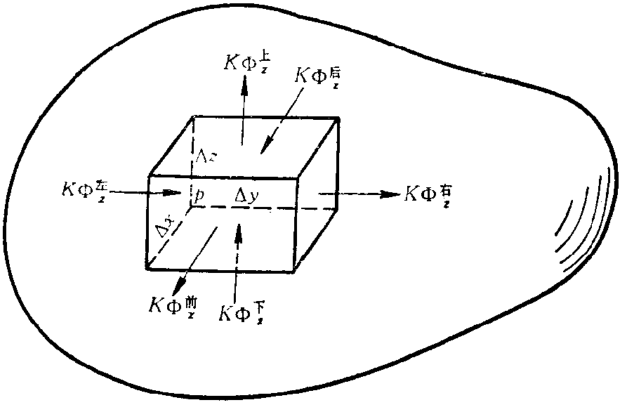


图 1-2

考查之。设所取微元为表面平行于直角坐标面的长方体，其各棱之长分别为 Δx、Δy、Δz。如果微元内无热源，在时间 Δt 内，通过微元的表面传进的热量较传出的热量多，那么微元的温度必增高，反之则降低。热传导定律谓：通过界面的热量与界面上的温度沿法线方向的变化率成正比，与界面的面积成正比，与经过的时间成正比。设介质内部热传导系数为K，则在时间 Δt 内，通过微元前后两面传进微元内的热量的代数和为

$$\Delta Q_{\mathrm{I}}=K\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{前}-\frac{\partial\Phi}{\partial x}\bigg|_{后}\right)\Delta y\Delta z\Delta t$$

$$=K\Delta_x\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Delta y\Delta z\Delta t$$

相仿地，通过左、右两面及上、下两面传进的是

$$\Delta Q_{\mathrm{II}}=K\Delta_y\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\Delta x\Delta z\Delta t$$

$$\Delta Q_{\mathrm{III}}=K\Delta_z\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta t$$